[85] W. R. Pulleyblank: Progress in Combinatorial Optimization, *Academic Press, Toronto–New York–London 1984.*

[86] G. C. Robinson, D. J. A. Welsh: The computational complexity of matroid properties, *Math. Proc. Cambridge Phil. Society 87 (1980) 29–45.*

2.7.2 Fortschritte in der polyedrischen Kombinatorik

von Martin Grötschel

1. Einleitung

Die polyedrische Kombinatorik beschäftigt sich mit der Anwendung von Sätzen und Algorithmen der linearen Algebra, der Polyedertheorie und der linearen Programmierung auf kombinatorische Probleme und hier insbesondere auf Probleme der kombinatorischen Optimierung.

Erste wichtige Resultate — abgesehen von einigen frühen Vorläufern — finden sich in den fünfziger Jahren. Sie wurden hauptsächlich durch die Entwicklung des Simplexalgorithmus motiviert. Meilensteine in der Geschichte der polyedrischen Kombinatorik sind die Arbeiten von Edmonds [1, 2] zum Matching–Problem. Basierend auf den von Edmonds entwickelten Ideen setzte zu Beginn der siebziger Jahre eine stürmische Entwicklung dieses Gebietes ein, die bis heute andauert. Zunächst konzentrierten sich die Arbeiten auf Probleme, die polynomial lösbar sind. Es wurden vollständige Beschreibungen von Polyedern angegeben, die derartigen Problemen auf natürliche Weise zugeordnet werden können, und gleichzeitig — unter Ausnutzung der polyedrischen Resultate — wurden polynomiale Algorithmen zur Lösung dieser Probleme entworfen. Heute stehen wesentlich stärker $\mathcal{NP}$–vollständige Probleme im Vordergrund, die besonders praxisrelevant sind. In den letzten vier Jahren sind eine Vielzahl von Schnittebenenalgorithmen entwikkelt worden, die auf dem konzeptionellen Rahmen der Ellipsoidmethode beruhen, jedoch den Simplexalgorithmus verwenden und polyedertheoretische Resultate extensiv ausnutzen. Diese Schnittebenenverfahren haben sich als außerordentlich erfolgreich bei der Lösung praktischer Probleme erwiesen und scheinen (zumindest zur Zeit) allen anderen Ansätzen überlegen zu sein. Diese Studien sind noch in vollem Gange, und es dürfen hier noch einige wertvolle Beiträge zur Bewältigung von kombinatorischen Optimierungsaufgaben (besonders solcher, die in der Praxis auftreten) erwartet werden.

In diesem Aufsatz soll ein kurzer Überblick über einige Fortschritte auf dem Gebiet der polyedrischen Kombinatorik gegeben werden, die in den letzten zwanzig Jahren erzielt wurden. Dabei wird – aus gegebenem Anlaß – insbesondere auf Themenbereiche eingegangen, zu denen Gäste und Mitarbeiter des Sonderforschungsbereichs 21 wichtige Beiträge geleistet haben. Die Arbeiten des Sonderforschungsbereichs werden jedoch nicht isoliert behandelt, sondern im Zusammenhang mit der internationalen Entwicklung auf diesem Gebiet dargestellt. Der Überblick ist in keiner Hinsicht erschöpfend. Es werden lediglich anhand einiger repräsentativer Beispiele Fortschritte in der Theorie und in der praktisch–algorithmischen Lösbarkeit aufgezeigt. Weitergehende Überblicke mit zum Teil anderen Schwerpunkten sind die Aufsätze Grötschel [3], Pulleyblank [4] und Schrijver [5].

2. Lineare Programmierung und Separierung

Gegeben seien eine (m,n)–Matrix A, ein Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ und ein Vektor $c \in \mathbb{R}^n$, dann nennt man die Aufgabe, einen Vektor $x^* \in \mathbb{R}^n$ zu finden, der die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} &Ax^* \leq b, \\ &c^T x^* \geq c^T x \qquad \text{für alle } x \text{ mit } Ax \leq b \end{aligned}$$

ein *lineares Programm*. Man schreibt dafür kurz

$$\begin{array}{c}\max c^T x \\ Ax \leq b\end{array}, \quad \text{oder } \max\{c^T x \mid Ax \leq b\}. \tag{2.1}$$

Lineare Programme mit Tausenden von Variablen und Nebenbedingungen können heutzutage in vernünftigen Rechenzeiten mit dem Simplexalgorithmus gelöst werden. Dieses Verfahren hat jedoch den (theoretischen) Nachteil, das es in einigen — allerdings theoretisch nachweisbar ganz seltenen Fällen (siehe Borgwardt [6]) — eine Schrittzahl braucht, die exponentiell in m und n ist. Das Simplexverfahren ist also kein polynomialer Algorithmus. Von Khachiyan [7] wurde vor sieben Jahren ein Verfahren angegeben, die sogenannte Ellipsoidmethode, die lineare Programme in polynomialer Zeit löst. Die Ellipsoidmethode ist (derzeit) jedoch bei praktischen Rechnungen dem Simplexalgorithmus weit unterlegen.

Aus einer sorgfältigen Analyse der Ellipsoidmethode (Grötschel, Lovász und Schrijver [8]) konnte jedoch eine wichtige (und überraschende) Schlußfolgerung gezogen werden. Eine explizite vollständige Kenntnis des Ungleichungssystems $Ax \leq b$ ist zur Lösung von (2.1) nicht unbedingt notwendig. Man kann lineare

Programme (2.1) genau dann in polynomialer Zeit lösen, wenn das folgende Separationsproblem in polynomialer Zeit gelöst werden kann.

(2.2) Separationsproblem. *Gegeben sei ein Vektor $y \in \mathbb{R}^n$, entscheide ob y das (nicht notwendigerweise explizit gegebene) Ungleichungssystem $Ax \leq b$ erfüllt, und falls das nicht der Fall ist, finde (explizit) eine Ungleichung des Systems, die von y verletzt wird.*

Dieses Resultat ist für die kombinatorische Optimierung von großer Bedeutung, denn hier treten — wie wir nachfolgend zeigen werden — im allgemeinen riesige (aber strukturierte) Ungleichungssysteme auf. Aus der Ellipsoidmethode folgt also, daß man auch über sehr großen Ungleichungssystemen linear optimieren kann, wenn sie nur genügend strukturiert sind, d.h. falls sie Eigenschaften besitzen, die es ermöglichen, daß (2.2) gelöst werden kann.

Wir werden später Beispiele angeben, bei denen lineare Programme mit 2^{1000} oder mehr Nebenbedingungen gelöst wurden. Interessant ist dabei, daß man theoretisch so rechnet, als würde man die Ellipsoidmethode verwenden, diese aber in der Praxis durch das Simplexverfahren ersetzt, um akzeptable Rechenzeiten zu erreichen.

Die oben beschriebene Folgerung aus der Ellipsoidmethode hat zwei weitere wichtige Konsequenzen. Zum einen hat sie ein neues Forschungsgebiet initiiert, nämlich "Entwurf und Analyse von Separationsalgorithmen", und zum anderen gibt sie den polyedertheoretischen Resultaten zur kombinatorischen Optimierung eine neue, praxisrelevante Bedeutung. Diese Erkenntnisse sind zu den wichtigsten und fruchtbarsten Resultaten der letzten fünf Jahre zu zählen.

Viele der polyedertheoretischen Ergebnisse (einige Beispiele werden wir in den nachfolgenden Abschnitten kennenlernen) wurden häufig als Nebenprodukte von Algorithmen erzielt. Sie wurden zwar zum Teil in Beweisen benutzt, hatten jedoch sonst nur relativ theoretische Bedeutung. Die Ellipsoidmethode zeigt nun, daß man diese Resultate direkt durch den Entwurf von Separationsalgorithmen nutzen und in praktisch effiziente Schnittebenenverfahren einbringen kann. Algorithmen, die Probleme des Typs (2.2) lösen, waren bisher nur von rein theoretischem Interesse, und deshalb gab es kaum Untersuchungen zu diesem Problemkreis. Nunmehr hat die Ellipsoidmethode gezeigt, daß Separationsalgorithmen auch für die praktische Algorithmenentwicklung wichtig sind, und mittlerweile sind viele interessante Studien zu den verschiedensten Separierungsproblemen vorgelegt worden. Als Beispiele seien erwähnt: Conforti, Corneil und Mahjoub [9] zum K_i–Cover–Polytop, Cunningham [10] zum Matroid–Polytop, Grötschel und Pulleyblank [11] und Gerards [12] zum

Polytop der bipartiten Subgraphen, Grötschel, Lovász und Schrijver [8] und [13] zum Stabile–Mengen–Polytop, Padberg und Rao [14] zum Matching–Polytop, Padberg und Wolsey [15] zum Polytop der Wälder.

Aus Platzgründen kann dieser Problemkreis nicht vertieft behandelt werden. Wir werden aber in den nachfolgenden Abschnitten noch mehrfach genauer auf spezielle Separierungsprobleme eingehen. Eine umfassende Zusammenstellung der bisher erzielten Ergebnisse wird in dem Buch Grötschel, Lovász und Schrijver [16] erscheinen.

3. Polyedrische Kombinatorik

Viele kombinatorische Optimierungsprobleme können wie folgt beschrieben werden. Gegeben ist eine endliche *Grundmenge* E (z.B. die Kanten oder Knoten eines Graphen), und jedem Element $e \in E$ ist ein *Gewicht* $c_e \in \mathbb{R}$ zugeordnet. Ferner ist eine (endliche) Menge $I \subseteq 2^E$ von ***zulässigen Lösungen*** gegeben (z.B. die Menge aller Hamiltonschen Kreise oder aller stabilen Knotenmengen in einem Graphen), und gesucht wird eine zulässige Lösung $I^* \in I$, so daß

$$c(I^*) := \sum_{e \in I^*} c_e$$

maximal (oder minimal) ist.

Wie wir nun zeigen werden, kann jedem auf diese Weise gegebenen Problem ein Polyeder und damit ein lineares Programm zugeordnet werden. Zunächst folgen jedoch noch einige Definitionen.

Polyeder sind bekanntlich definiert als Lösungsmengen von (endlichen) Ungleichungssystemen, d.h. sie sind Durchschnitte von endlich vielen Halbräumen. Ein *Polytop* ist ein beschränktes Polyeder und kann äquivalent definiert werden als die konvexe Hülle endlich vieler Punkte. D.h., für ein Polytop $P \subseteq \mathbb{R}^n$ haben wir zwei Darstellungen

(3.1) $\quad P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\},$

(3.2) $\quad P = \operatorname{conv}(S),$

wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine endliche Menge ist.

Lineare Programme (2.1) kann man formal also auch wie folgt beschreiben:

(3.3) $\quad \max c^T x, \; x \in P.$

Jedoch wird bei allen Algorithmen der linearen Optimierung (z.B. Simplex–Verfahren, Ellipsoidmethode) unterstellt, daß P (explizit oder implizit) in der Form (3.1) gegeben ist. Die in der polyedrischen Kombinatorik betrachteten Polytope P

treten jedoch — wie nachfolgend beschrieben — in der Form (3.2) auf, und eine der wichtigsten und interessantesten Aufgaben ist die Bestimmung von zugehörigen Ungleichungssystemen, die P in der Form (3.1) beschreiben.

Nehmen wir an, daß ein kombinatorisches Optimierungsproblem gegeben ist durch eine Grundmenge E, eine Menge von zulässigen Lösungen $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ und Gewichte $c_e \in \mathbb{R}\ \forall e \in E$, kurz: das Problem ist durch $(E, \mathcal{I}, c)$ gegeben. Für $F \subseteq E$ definieren wir den *Inzidenzvektor* $\chi^F = (\chi_e^F)_{e\in E} \in \mathbb{R}^E$ durch

$$\chi_e^F := \begin{cases} 1 & \text{falls } e \in F, \\ 0 & \text{falls } e \notin F. \end{cases}$$

Der zu $(E, \mathcal{I}, c)$ gehörige Polytop $P_\mathcal{I}$ ist die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren der zulässigen Lösungen, d.h.

$$(3.4) \qquad P_\mathcal{I} := \operatorname{conv}\{\chi^I \in \mathbb{R}^E \mid I \in \mathcal{I}\}.$$

Jeder Ecke von $P_\mathcal{I}$ entspricht eine zulässige Lösung aus $\mathcal{I}$ und umgekehrt, d.h. jede optimale Basislösung des linearen Programms

$$(3.5) \qquad \max c^T x, \; x \in P_\mathcal{I}$$

entspricht einer optimalen Lösung unseres kombinatorischen Optimierungsproblems und umgekehrt. Wir haben also unser kombinatorisches Problem in ein lineares Programm umformuliert. Das Programm (3.5) liegt jedoch in der "falschen" Form vor. Um Methoden der linearen Programmierung anwenden zu können, muß ein System von Ungleichungen gefunden werden, so daß

$$P_\mathcal{I} = \{x \in \mathbb{R}^E \mid Ax \leq b\}$$

gilt. Ungleichungssysteme $Ax \leq b$ mit dieser Eigenschaft nennt man *vollständig* bezüglich $P_\mathcal{I}$.

Für fast alle kombinatorischen Optimierungsprobleme, die polynomial lösbar sind, hat man vollständige Beschreibungen der zugehörigen Polyeder gefunden. (Eine Liste einiger noch offener Fälle kann man in [3] finden.) Andererseits gibt es komplexitätstheoretische Gründe dafür (siehe [17]), daß man niemals vollständige Ungleichungssysteme zur Beschreibung von Polytopen, die zu $\mathcal{NP}$–vollständigen Problemen gehören, finden wird. In der Praxis hat es sich jedoch gezeigt, daß auch partielle Beschreibungen von derartigen Polyedern algorithmisch nutzbringend verwendet werden können. Zur Entwicklung praktisch effizienter Schnittebenenverfahren "lohnt" es sich also, nach guten Approximationen der betrachteten Polyeder durch "handhabbare" Systeme von Ungleichungen zu suchen.

Zum Verständnis des weiteren sind die folgenden Definitionen wichtig. Ist $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polyeder, dann heißt eine Ungleichung $a^T x \leq \alpha$ *gültig* (bezüglich

P), falls $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq \alpha\}$. Ist $a^T x \leq \alpha$ gültig, dann ist die Menge $F := \{x \mid a^T x = \alpha\} \cap P$ eine *Seitenfläche* von P. Ist $F \neq \emptyset$ eine Seitenfläche von P und gilt $\dim F = \dim P - 1$, dann heißt F *Facette* von P. (Für eine Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\dim S$ die maximale Anzahl in S enthaltener affin unabhängiger Punkte minus eins.)

Die *affine Hülle* von P, Bezeichnung $\text{aff}(P)$, ist der von den Punkten in P aufgespannte affine Teilraum von $\mathbb{R}^n$. Ein Gleichungssystem $Dx = d$ mit der Eigenschaft

$$\text{aff}(P) = \{x \mid Dx = d\}$$

heißt *minimal* (bezüglich P), falls die Zeilen von D linear unabhängig sind.

Will man ein Polytop P (gegeben in der Form (3.2)) durch ein System von Gleichungen und Ungleichungen beschreiben, so soll dieses System möglichst nicht redundant sein, d.h. es soll keine Gleichungen oder Ungleichungen enthalten, die weggelassen werden können, ohne die Lösungsmenge zu verändern.

(3.6) Satz. *Sei $\emptyset \neq P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polyeder. Ein nicht redundantes System von Gleichungen und Ungleichungen zur Beschreibung von P erhält man wie folgt.*

(a) Man bestimme ein minimales Gleichungssystem $Dx = d$ für P (dieses ist leer, falls $\dim P = n$).

(b) Für jede Facette F von P bestimme man genau eine gültige Ungleichung $a^T x \leq \alpha$ mit $F = \{x \mid a^T x = \alpha\} \cap P$.

Für Polytope P_I, die zu kombinatorischen Optimierungsproblemen gehören, ist es normalerweise einfach, ein minimales Gleichungssystem zu finden. Erheblich schwieriger ist die Beschreibung von Facetten oder gar die vollständige Charakterisierung aller Facetten von P_I durch Ungleichungen.

4. Matching–Polytope

Matchingprobleme waren die ersten Beispiele nichttrivialer kombinatorischer Optimierungsprobleme, für die vollständige Beschreibungen der zugehörigen Polyeder bekannt waren. Die "Matchingtheorie" wird auch heute noch weiterentwickelt, und viele der Ergebnisse über Matchings können als Prototyp–Resultate angesehen werden, die in andere Gebiete übertragen bzw. verallgemeinert wurden.

Ist $G = [V, E]$ ein Graph, dann heißt eine Kantenmenge $M \subseteq E$ ein *(perfektes) Matching*, falls jeder Knoten aus V auf höchstens (genau) einer Kante aus M

liegt. Mit MATCH(G) bezeichnen wir die konvexe Hülle aller Inzidenzvektoren von Matchings in G, d.h.

$$\text{MATCH}(G) = \text{conv}\{\chi^M \in \mathbb{R}^E \mid M \subseteq E \text{ Matching }\}.$$

Dieser Polytop wird *Matching-Polytop* von G genannt.

In einem Graphen $G = [V, E]$ bezeichnen wir für jede Knotenmenge $W \subseteq V$ die Menge aller Kanten aus E, die beide Endknoten in W haben, mit $E(W)$, und $\delta(W)$ bezeichnet die Menge aller Kanten aus E mit einem Endknoten in W und dem anderen in $V \setminus W$. Wir schreiben $\delta(v)$ statt $\delta(\{v\})$. Ferner kürzen wir die Summe $\sum_{e \in F} x_e$ durch $x(F)$ ab. Mit dieser Terminologie können wir eines der ältesten Resultate der polyedrischen Kombinatorik — üblicherweise Birkhoff–von–Neumann–Theorem genannt — angeben.

(4.1) Satz. *Ist $G = [V, E]$ ein bipartiter Graph, dann gilt*

$$\begin{aligned} \text{MATCH}(G) = \{x \in \mathbb{R}^E \mid \quad & (i) \quad 0 \le x_e \le 1 && \text{für alle } e \in E, \\ & (ii) \quad x(\delta(v)) \le 1 && \text{für alle } v \in V\}. \end{aligned}$$

Ist G nicht bipartit, d.h. enthält G einen Kreis ungerader Länge, so besitzt der durch die Ungleichungen (i), (ii) aus (4.1) definierte Polytop gebrochene Ecken. In dem bereits zitierten Paper [1] aus dem Jahre 1965 gelang es Edmonds, diese gebrochenen Ecken "abzuschneiden" und die Voraussetzung "G bipartit" zu elimieren. Dies mußte jedoch durch das Hinzufügen von Ungleichungen erkauft werden, deren Zahl exponentiell in $|V|$ ist.

(4.2) Satz. *Für alle Graphen $G = [V, E]$ gilt:*

$$\begin{aligned} \text{MATCH}(G) = \{x \in \mathbb{R}^E \mid \quad & (i) && 0 \le x_e && \le 1 && \text{für alle } e \in E, \\ & (ii) && x(\delta(v)) && \le 1 && \text{für alle } v \in V, \\ & (iii) && x(E(W)) && \le (|W| - 1)/2 && \text{für alle } W \subseteq V, \\ &&&&&&& |W| \ge 3 \text{ und} \\ &&&&&&& |W| \text{ ungerade}\}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit PMATCH(G) die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren der perfekten Matchings in G, so folgt aus Satz (4.2) unmittelbar

$$\begin{aligned} \text{PMATCH}(G) = \{x \in \mathbb{R}^E \mid\, & x \text{ erfüllt (i), (iii) aus (4.2), und} \\ & x \text{ erfüllt alle Ungleichungen (ii)} \\ & \text{aus (4.2) mit Gleichheit}\}. \end{aligned}$$

Diese Resultate sind in vielfältiger Hinsicht verschärft und verallgemeinert worden. Wir wollen einige dieser Ergebnisse kurz beschreiben.

Ist $b \in \mathbb{R}^V$ ein nichtnegativer ganzzahliger Vektor, dann heißt ein ganzzahliger Vektor $x \in \mathbb{R}^E$ *b–Matching* von G, falls $x(\delta(v)) \leq b_v$ für alle $v \in V$ gilt. (Ist z.B. $b_v = 1$ für alle $v \in V$, dann ist ein b–Matching nichts anderes als der Inzidenzvektor eines Matchings.) Gilt $x(\delta(v)) = b_v$ für alle $v \in V$, so heißt das b–Matching x *perfekt*. Ist eine Kapazitätsfunktion $c : E \to \mathbb{Z}_+$ vorgegeben, dann heißt ein (perfektes) b–Matching x *c–kapazitiert*, falls $x_e \leq c_e$ gilt für alle $e \in E$.

Edmonds und Pulleyblank (siehe [18]) zeigten

(4.3) Satz. *Ist $G = [V, E]$ ein Graph und $b \in \mathbb{Z}_+^V$, dann ist die konvexe Hülle aller b–Matchings von G gegeben durch*

$$
\begin{array}{llcll}
(i) & x_e & \geq & 0 & \text{für alle } e \in E, \\
(ii) & x(\delta(v)) & \leq & b_v & \text{für alle } v \in V, \\
(iii) & x(E(W)) & \leq & (b(W)-1)/2 & \text{für alle } W \subseteq V \\
 & & & & \text{mit } b(W) \text{ ungerade.}
\end{array}
$$

Die konvexe Hülle aller perfekten b–Matchings erhält man dadurch, daß in allen Ungleichungen (ii) Gleichheit gefordert wird.

Der kapazitierte Fall wurde von Edmonds und Johnson [19] geklärt.

(4.4) Satz. *Ist $G = [V, E]$ ein Graph, $b \in \mathbb{Z}_+^V$ und $c : E \to \mathbb{Z}_+$ eine Kapazitätsfunktion, dann ist die konvexe Hülle aller c–kapazitierten b–Matchings von G gegeben durch*

$$
\begin{array}{llcll}
(i) & 0 \leq x_e & \leq & c_e & \text{für alle } e \in E, \\
(ii) & x(\delta(v)) & \leq & b_v & \text{für alle } v \in V, \\
(iii) & x(E(W)) + x(F) & \leq & (b(W)+c(F)-1)/2 & \text{für alle } W \subseteq V \\
 & & & & \text{und } F \subseteq \delta(W) \\
 & & & & \text{mit } b(W)+c(F) \text{ ungerade.}
\end{array}
$$

Die konvexe Hülle aller perfekten c–kapazitierten b–Matchings erhält man dadurch, daß in allen Ungleichungen (ii) Gleichheit gefordert wird.

Satz (4.4) konnte auch noch auf den Fall ausgedehnt werden, daß obere und untere Schranken für die Knoten und obere und untere Kapazitäten für die Kanten zu berücksichtigen sind, siehe [5].

Die Sätze (4.1),..., (4.4) geben also vollständige Beschreibungen von verschiedenen (allgemeinen) Matching–Polytopen an. Auch wenn in der Zwischenzeit recht kurze und elegante Methoden zum Beweis dieser Sätze gefunden wurden, so sind diese Sätze dennoch alles andere als trivial.

Noch etwas schwieriger scheint es zu sein, die Facetten der oben betrachteten Polytope vollständig zu charakterisieren. Zunächst gelang dies für das Polytop MATCH(G) Pulleyblank und Edmonds [20]. Ein Graph $G = [V, E]$ heißt *faktorkritisch*, wenn er kein perfektes Matching enthält, aber jeder Graph, der aus G durch Entfernen eines Knoten entsteht, ein perfektes Matching enthält. Mit $N(v)$ bezeichnen wir die Knoten aus $V \setminus \{v\}$, die mit v benachbart sind.

(4.5) Satz. *Das folgende Ungleichungssystem ist minimal bezüglich MATCH(G) (d.h., es ist vollständig, jede Ungleichung definiert eine Facette und keine Ungleichung kann weggelassen werden):*

(*i*)	x_e	$\geq$	0	für alle $e \in E$,
(*ii*)	$x(\delta(v))$	$\leq$	1	für alle $v \in V$, so daß entweder $\lvert N(v)\rvert \geq 3$ oder $\lvert N(v)\rvert = 2$ und $E(N(v)) = \emptyset$ oder $\lvert N(v)\rvert = 1$ und die Zusammenhangskomponente von G, die v enthält, enthält nur zwei Knoten,
(*iii*)	$x(E(W))$	$\leq$	$(\lvert W\rvert - 1)/2$	für alle $W \subseteq V$, so daß $\lvert W\rvert \geq 3$, und der von W induzierte Untergraph von G ist faktorkritisch und zweifach zusammenhängend.

In [18] wurde ein minimales Ungleichungssystem zur Beschreibung der konvexen Hülle aller b–Matchings von G angegeben. Schließlich gelang es Cook und Pulleyblank [21], alle Facetten des c–kapazitierten b–Matching–Polytops zu bestimmen. Um dieses Resultat formulieren zu können, benötigen wir die folgenden (technischen) Definitionen.

Es seien $G = [V, E]$ ein Graph, $b \in \mathbb{Z}_+^V$ und $c \in \mathbb{Z}_+^E$. Ist $H = [W, F]$ ein Teilgraph von G, dann sei $b_v^{(H,c)} := \min\{b_v, c(\delta_H(v))\}$ für alle $v \in W$. G heißt (b, c)–*kritisch*, falls G zusammenhängend ist, $|V| \geq 3$ und für alle $v \in V$ ein c–kapazitiertes

b–Matching $\bar{x}$ von G existiert, so daß $\bar{x}(\delta(v)) = b_v^{(G,c)} - 1$ und $\bar{x}(\delta(u)) = b_u^{(G,c)}$ für alle $u \in V \backslash \{v\}$. Eine (b,c)–Separation von G ist ein Paar (E_1, E_2), so daß $E_1, E_2 \subseteq E$, $E_1 \cup E_2 = E$, $E_1 \neq \emptyset \neq E_2$ und falls (für $i = 1,2$) k_i die größte Summe $\sum_{e \in E} x_e$ aller c–kapazitierten b–Matchings von G mit $x_e = 0$ für alle $e \in E \backslash E_i$ ist, dann ist $k_1 + k_2 = \max\{\sum_{e \in E} x_e \mid x$ c–kapazitiertes b–Matching von $G\}$. Setzen wir für alle Knoten $v \in V$, $b'_u := \min\{b_u, \sum_{e \in \delta(u) \cap \delta(v)} c_e\}$ für alle $u \in V \backslash \{v\}$, dann bezeichnet V' die Menge aller Knoten $v \in V$, die eine der folgenden Bedingungen erfüllen.

(i) $b'(N(v)) = b_v$, und v ist in einer Zusammenhangskomponente mit 2 Knoten von G, und falls $\sum_{e \in \delta(v)} c_e = b_v$, dann ist der Grad von v gleich eins.

(ii) $b'(N(v)) = b_v + 1$, und es gibt keine Kante $e = v_1 v_2 \in E(N(v))$ mit $b'_{v_1} = b_{v_1}$ und $b'_{v_2} = b_{v_2}$.

(iii) $b'(N(v)) \geq b_v + 2$.

Ferner heißt ein Untergraph $H = [W, F]$ von G *kantenmaximal*, falls es keine Kante $uv \in E \backslash F$ gibt mit $u, v \in W$ und mit $b_u^{(H,c)} = b_u$ und $b_v^{(H,c)} = b_v$.

(4.6) Satz. *Ein minimales Ungleichungssystem zur Beschreibung der konvexen Hülle der c–kapazitierten b–Matchings von $G = [V, E]$ ist gegeben durch*

(*i*)	x_e	$\geq$	0	für alle $e \in E$,
(*ii*)	x_e	$\leq$	c_e	für alle $e \in E$, so daß e keinen Endknoten v besitzt, der eine der folgenden Eigenschaften hat: $b_v < c_e$ oder $b_v = c_e$ und $\deg(v) \geq 2$,
(*iii*)	$x(\delta(v))$	$\leq$	b_v	für alle $v \in V'$,
(*iv*)	$x(F)$	$\leq$	$\lfloor b^{(H,c)}(W)/2 \rfloor$	für alle kantenmaximalen Untergraphen $H = [W, F]$ von G, die keine (b,c)–Separation besitzen.

Dieses Ergebnis (zusammen mit seiner Version über total duale Ganzzahligkeit, in [21]) kann als das allgemeinste derzeit bekannte Resultat der polyedrischen Matching–Theorie bezeichnet werden.

Die Facetten von perfekten (c–kapazitierten b–) Matchingpolyedern konnten jedoch nur in einigen Ausnahmefällen charakterisiert werden. Betrachten wir lediglich den einfachsten Fall, das perfekte Matchingpolytop PMATCH(G). Um die Facetten von PMATCH(G) zu bestimmen, muß die Dimension von PMATCH(G) bekannt sein. Erst 1982 gelang es Naddef [22], eine — allerdings algorithmisch schwer auswertbare — Formel für die Dimension von PMATCH(G) zu bestimmen. Edmonds, Lovász und Pulleyblank [23] entwickelten dann eine Dekompositionstheorie (brick decomposition), mit deren Hilfe ein polynomialer Algorithmus zur Berechnung der Dimension des perfekten Matching–Polytops angegeben werden konnte. Ebenso konnte hieraus ein vollständiges und nicht redundantes System von Gleichungen und Ungleichungen zur Beschreibung von PMATCH(G) abgeleitet werden.

Der Fall der perfekten Matchings ist unter den "perfekten Problemen" der einzige derzeit vollständig gelöste. Für die konvexe Hülle der perfekten, $\mathbf{1}$–kapazitierten 2–Matchings wurde in Grötschel [24] eine vollständige lineare Charakterisierung bestimmt, die allerdings nur im Falle des vollständigen Graphen K_n nicht redundant ist. Welche der Ungleichungen aus Satz (4.4) (i) und (iii) redundant sind und welche Facetten der konvexen Hülle der perfekten c–kapazitierten b–Matchings definieren, ist unbekannt. Auch der perfekte unkapazitierte Fall, siehe Satz (4.3), ist noch nicht geklärt. Vermutlich dürfte eine Lösung mit Hilfe einer Verallgemeinerung und genauen Analysen der brick–decomposition–Technik von Edmonds, Lovász und Pulleyblank [23] möglich sein. Die Charakterisierungen der Facetten werden wahrscheinlich technisch recht kompliziert aussehen und erheblich aufwendiger als die Bedingungen des Satzes (4.6) sein.

An dieser Stelle sei auf eine weitere wichtige Entwicklung aufmerksam gemacht. Dekompositionsresultate standen zwar mit an der Wiege der Graphentheorie, siehe z.B. Wagners Charakterisierung der nicht zu K_5 kontrahierbaren Graphen in [25], in der kombinatorischen Optimierung spielten sie jedoch lange Zeit keine Rolle. In Bezug auf die Matching–Theorie zeigt das Resultat von Edmonds, Lovász und Pulleyblank [23] zur Bestimmung der Dimension von PMATCH(G), daß konstruktive Beschreibungen von Graphen auch in der polyedrischen Kombinatorik wichtig sein können. In den letzten Jahren hat sich die Erkenntnis immer mehr durchgesetzt, daß mit Hilfe von Dekompositionsresultaten wesentliche, neue Beiträge zur Algorithmenentwicklung und zur polyedrischen Kombinatorik erbracht werden können. So sind z.B. eine Vielzahl von Arbeiten zur Dekomposition von perfekten Graphen erschienen. Dekompositionsmethoden wurden verwendet, um polynomiale Algorithmen für Spezialfälle $\mathcal{NP}$–vollständiger Probleme zu entwerfen, siehe z.B. Hsu, Ikura und Nemhauser [26] und Grötschel und Nemhauser [27]. Die wichtigsten Arbeiten sind aber sicherlich diejenigen von Seymour zur Dekomposition von Matroiden. Speziell möchte ich hier die tiefliegende Charakterisierung von regulären Matroiden, d.h. — für die kombinatorische Optimierung wichtig — von total unimodularen Matrizen, siehe Seymour [28], erwähnen. Truempers algorithmische Versionen dieser Resultate, siehe z.B. Truemper [29], sind noch nicht genügend beachtet worden und dürften sich auch noch als sehr bedeutsam für die Entwicklung polynomialer Algorithmen erweisen.

Das Matching–Problem und das Travelling–Salesman–Problem (siehe Abschnitt 5) waren die ersten kombinatorischen Optimierungsprobleme, für die Separationsalgorithmen entwickelt wurden, und zwar noch bevor die Ellipsoidmethode die Bedeutung derartiger Verfahren deutlich machte. In Grötschel und Padberg [30] wurde gezeigt, daß fast alle der Ungleichungen, die Facetten des Polytops der perfekten **1** –kapazitierten 2–Matchings definieren, die sogenannten 2–Matching–Ungleichungen (siehe (5.6)), auch Facetten des Travelling–Salesman–Polytopen induzieren. Es trat also die Frage auf, wie man die 2–Matching–Ungleichungen effizient in einem Schnittebenenalgorithmus für das Travelling–Salesman–Problem verwenden kann. Padberg und Rao [14] haben dieses Problem nicht nur für die Ungleichungen (5.6), sondern in voller Allgemeinheit gelöst. Sie haben ein Verfahren angegeben, das das Separierungsproblem für den in (4.4) beschriebenen Polytop (auch in seiner perfekten Version) in ein sogenanntes Odd–Cut–Problem transformiert. Padberg und Rao haben auch gezeigt, daß dieses Odd–Cut–Problem mit einer Modifikation des Algorithmus von Gomory und Hu in polynomialer Zeit gelöst werden kann. Wieder einmal initiierte also das Matching–Problem (zusammen mit der Ellipsoidmethode) eine neue Entwicklung in der kombinatorischen Optimierung.

Verwendet man den Separationsalgorithmus von Padberg und Rao innerhalb der Ellipsoidmethode, so erhält man ein polynomiales Verfahren, das sich ganz erheblich von den bisher bekannten Methoden zur Lösung von Matching–Problemen unterscheidet (diese basieren alle auf dem Verfahren von Edmonds [2]). Auf den ersten Blick erscheint es unvorstellbar, daß dieses Verfahren mit dem Edmonds–Algorithmus konkurrieren könnte. In Grötschel und Holland [31] wurde dennoch der Versuch unternommen, dieses Verfahren für das perfekte 1–Matching–Problem (effizient) zu implementieren. Hierbei wurde die Ellipsoidmethode durch den Simplexalgorithmus ersetzt, und die Schnittebenenerkennung wurde durch einige Heuristiken erheblich beschleunigt. Das Resultat ist ein (theoretisch nicht polynomialer) Schnittebenenalgorithmus für das Matching–Problem.

Das (durchaus erstaunliche) Ergebnis der Rechenstudie [31] ist, daß dieser Schnittebenenalgorithmus in Bezug auf die tatsächlich erzielten Rechenzeiten konkurrenzfähig und insbesondere bei großen Problemen den derzeitig benutzten kombinatorischen Verfahren leicht überlegen ist. Mit diesem Schnittebenenalgorithmus wurden 1–Matching–Probleme auf vollständigen Graphen mit bis zu 1 000 Knoten gelöst. Das bedeutet, daß die Optimallösungen von linearen Programmen mit bis zu 499 500 Variablen und bis zu 2^{999} Nebenbedingungen bestimmt wurden. Explizit können derartige Programme natürlich nicht behandelt werden (unser Universum reicht nicht einmal zur Speicherung der Daten aus), aber durch die Schnittebenentechnik mit der iterativen Generierung von verletzten Ungleichungen werden derartige Unternehmungen möglich.

5. Travelling–Salesman–Polytope

So wie das Matchingproblem (und seine Verallgemeinerungen) ein Prototyp–Problem für die polynomial lösbaren Probleme ist, ist das Travelling–Salesman–Problem (und seine Verallgemeinerungen) ein Standardproblem unter den $\mathcal{NP}$–vollständigen Problemen. Viele der bei Untersuchungen zu diesem Problem entwickelten Techniken und Beweisverfahren werden heute erfolgreich auf andere $\mathcal{NP}$–vollständige Probleme übertragen. Das gleiche gilt für die Algorithmenentwicklung. Fast alle derzeit in der Praxis verwendeten Verfahren zur Lösung schwieriger kombinatorischer Optimierungsprobleme beruhen auf Methoden, die zunächst für das Travelling–Salesman–Problem entwickelt wurden: Branch & Bound–Verfahren, Benutzung von Subgradientenverfahren zur Lösung von Lagrange–Relaxierungen, Schnittebenenverfahren. Desgleichen wurde auch das in (2.2) besprochene Separierungsproblem zum ersten Mal explizit für das Travelling–Salesman–Problem formuliert und für einige interessante Klassen von Facetten gelöst, siehe Abschnitt 4.

Die klassische Formulierung des Travelling–Salesman–Problems ist die folgende:

Gegeben seien n Städte und Entfernungen zwischen diesen, gesucht ist eine Rundreise, die in Stadt 1 beginnt, durch alle anderen Städte genau einmal führt, wieder in Stadt 1 endet und die minimale Länge hat. Sind die Entfernungen c_{ij} symmetrisch, d.h. $c_{ij} = c_{ji}\ \forall i,j \in \{1,\dots,n\}$, so heißt das Problem symmetrisches Travelling–Salesman–Problem, andernfalls wird es asymmetrisch genannt.

Rundreiseprobleme dieser Art treten in dieser klassischen Art durchaus bei Tourenplanungsproblemen auf. Häufig gibt es zusätzliche Nebenbedingungen wie etwa: nach dem Besuch von jeweils höchstens oder genau k Städten muß man zum Ort 1 zurückkehren, eine Rückkehr muß erfolgen, wenn gewisse Kapazitäten überschritten sind (z.B. Ladefähigkeit eines Lastwagens, Arbeitszeiten von Fahrern) etc. Viele dieser Varianten lassen sich durch einfache Transformationen auf das Standardproblem zurückführen.

Eine besonders wichtige Anwendung tritt bei der Herstellung von Leiterplatten und ähnlichen Objekten mit Hilfe numerisch kontrollierter Maschinen (NC–Maschinen) auf. Hier müssen z.B. auf einer Platte Löcher (z.B. mit einem Laserbohrer oder Stanzer) gebohrt, Lötstellen angebracht, Punkte geschweißt oder genau plaziert chemische Mittel aufgebracht werden. Die NC–Maschine soll so über die Platte geführt werden, daß die durch den Bohrkopf (Lötkopf etc.) zurückgelegte Wegstrecke minimal ist. Normalerweise hat eine derartige NC–Maschine einen "Startpunkt" (Nullposition vor Einführung der Platte in die Maschine), so daß es sich hierbei um eine Rundreise vom Startpunkt zum Startpunkt handelt. Probleme dieser Art sind üblicherweise sehr groß. Mir sind Anwendungsfälle mit über 5000 zu bohrenden Löchern bekannt.

Einen umfangreichen Überblick über gegenwärtig alle zum Travelling–Salesman–Problem bekannten polyedertheoretischen Resultate gibt der Aufsatz Grötschel und Padberg [32]. Wir wollen uns hier auf das symmetrische TSP beschränken und nur einige der interessantesten Resultate zitieren.

Sei $K_n = [V, E_n], n \geq 3$, ein vollständiger Graph, dann ist das Travelling–Salesman–Polytop Q_T^n die konvexe Hülle aller Inzidenzvektoren von Hamiltonschen Kreisen (Touren) in K_n, d.h.

(5.1) $\quad Q_T^n = \operatorname{conv}\{\chi^T \in \mathbb{R}^{E_n} \mid T \subseteq E_n \;\; \text{Hamiltonscher Kreis}\}.$

Offensichtlich erfüllen alle Punkte in Q_T^n die Ungleichungen

(5.2) $\quad 0 \leq x_e \leq 1 \quad \text{für alle } e \in E_n.$

Jeder Knoten wird von jeder Rundreise genau einmal durchlaufen, d.h. genau zwei Kanten jeder Tour sind inzident mit jedem Knoten aus K_n. Algebraisch läßt sich diese Bedingung durch das folgende Gleichungssystem formulieren:

(5.3) $\quad x(\delta(v)) = 2 \quad \text{für alle } v \in V,$

wobei $\delta(v) = \{vi \in E_n \mid i \in V \setminus \{v\}\}$. Das Gleichungssystem (5.3) ist minimal bezüglich Q_T^n, d.h. die Lösungsmenge von (5.3) ist gleich $\operatorname{aff}(Q_T^n)$, und die n Gleichungen sind linear unabhängig. Daraus folgt

$$\dim Q_T^n = |E| - |V|.$$

Die Ecken des Polytops, das durch (5.2) und (5.3) definiert ist, sind perfekte 1–kapazitierte 2–Matchings (d.h. Inzidenzvektoren von Vereinigungen disjunkter Kreise in K_n, so daß jeder Knoten auf genau einem Kreis liegt) oder Vektoren x, deren Komponenten die Werte $x_e \in \{0, 1, \frac{1}{2}\}$ annehmen, wobei die Menge der

Kanten $e \in E_n$, die zu Komponeneten $x_e = \frac{1}{2}$ gehören, aus disjunkten Kreisen ungerader Länge besteht.

Um diejenigen ganzzahligen Ecken dieses Polytops abzuschneiden, die nicht Inzidenzvektoren von Touren sind, wurden von Dantzig, Fulkerson und Johnson [33] die folgenden

Kurzzyklus-Ungleichungen

(5.4) $\quad x(E(W)) \leq |W| - 1 \quad$ für alle $W \subseteq V,\ \emptyset \neq W \neq V$

eingeführt. Man sieht unmittelbar ein, daß

$$Q_T^n = \mathrm{conv}\{x \in \mathbb{R}^{E_n} \mid x \text{ erfüllt (5.2), (5.3) und (5.4)}, \; x \text{ ist ganzzahlig}\} \tag{5.5}$$

gilt. Das System (5.2), (5.3), (5.4) von Gleichungen und Ungleichungen wurde auf vielfältige Weise zur Lösung von Travelling–Salesman–Problemen eingesetzt. Im Jahre 1954 benutzten Dantzig, Fulkerson und Johnson [33] es im Rahmen eines Schnittebenenalgorithmus. Held und Karp [34] optimierten lineare Funktionen über (5.2), (5.3), (5.4) mit Subgradiententechniken der Lagrange–Relaxierung.

Polyedertheoretisch wurde das Travelling–Salesman–Problem erstmals in den fünfziger Jahren studiert. Norman [35] gelang eine vollständige und nicht redundante Beschreibung von Q_T^n für $n = 3, 4, \ldots, 7$. Jedoch wurden keine "allgemeinen" Resultate erzielt. In Grötschel und Padberg [30] wurde gezeigt, daß die Kurzzyklus–Ungleichungen für $3 \leq |W| \leq n-3$ Facetten von Q_T^n definieren, allerdings definieren die beiden Ungleichungen $x(E(W)) \leq |W| - 1$ und $x(E(V \backslash W)) \leq |V \backslash W| - 1$ ein und dieselbe Facette.

Das durch (5.2) und (5.3) definierte Polytop hat — wie oben beschrieben — gebrochene Ecken. Edmonds [1] hat eine Klasse von Ungleichungen angegeben, die alle gebrochenen Ecken dieser Art eleminiert (Spezialfall von (4.4) (iii)), die sogenannten

2-Matching-Ungleichungen

$$\begin{aligned} x(E(H)) + \sum_{j=1}^{s} x(E(T_j)) \leq |H| - \frac{s+1}{2} \quad & \text{für alle } W, T_1, \ldots, T_s \subseteq V \\ & \text{so daß } |H \cap T_j| = 1, |T_j \backslash H| = 1, j = 1, \ldots, s \\ & \text{und } s \text{ ungerade.} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Das durch (5.2), (5.3), (5.6) definierte Polytop hat nur ganzzahlige Ecken (perfekte 1–kapazitierte 2–Matchings). Fügt man jedoch die Ungleichungen (5.4) zu (5.2), (5.3), (5.6) hinzu, so werden neue gebrochene Ecken erzeugt. Um diese abzuschneiden, wurden neue Klassen von Ungleichungen durch Verallgemeinerung der Ungleichungen (5.6) abgeleitet. Chvátal [36] betrachtete zunächst sogenannte Kamm–Ungleichungen, diese wurden von Grötschel und Padberg [30] weiterentwickelt und schließlich durch Grötschel und Pulleyblank [37] in eine — in einem präzisierbaren Sinne — allgemeinste Form gebracht. Wir erinnern daran, daß eine Clique in einem Graphen eine maximale Knotenmenge W ist, so daß je zwei Knoten aus W benachbart sind.

(5.7) Definition. *Ein* **Cliquenbaum** *ist ein zusammenhängender Untergraph C des K_n, der aus Cliquen besteht, die die folgenden Eigenschaften haben (s. Abb. 5.1):*

(1) *Die Cliquen bestehen aus zwei Mengen, den* **Griffen** $H_1, \ldots, H_r$ *und den* **Zinken** $T_1, \ldots, T_s$.

(2) $T_i \cap T_j = \emptyset, 1 \leq i < j \leq s$.

(3) $H_i \cap H_j = \emptyset, 1 \leq i < j \leq r$.

(4) $2 \leq |T_j| \leq n-2$ und $|T_j \setminus \cup_{i=1}^{r} H_i| \geq 1, j = 1, \ldots, s$.

(5) *Jeder Griff hat einen nichtleeren Durchschnitt mit einer ungeraden Anzahl von mindestens drei Zinken.*

(6) *Falls $T_j \cap H_i \neq \emptyset$, dann ist $C \setminus (T_j \cap H_i)$ unzusammenhängend.*

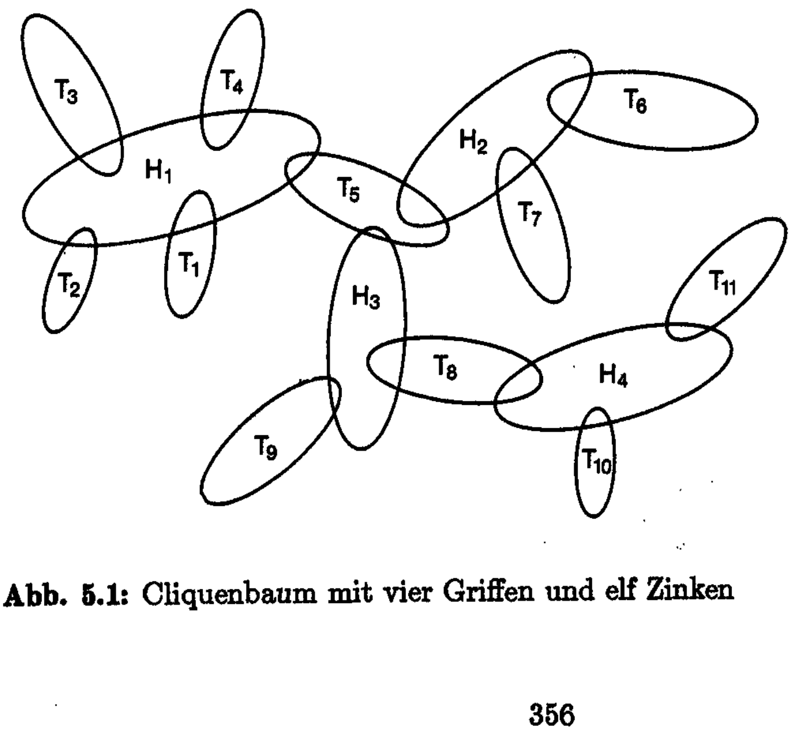

Abb. 5.1: Cliquenbaum mit vier Griffen und elf Zinken

In [37] konnte gezeigt werden:

(5.8) Satz. *Für jeden Cliquenbaum C des K_n gegeben durch die Griffe $H_1, \ldots, H_r$ und die Zinken $T_1, \ldots, T_s$ definiert die* **Cliquenbaum–Ungleichung**

$$(5.9) \qquad \sum_{i=1}^{r} x(E(H_i)) + \sum_{j=1}^{s} x(E(T_j)) \leq \sum_{i=1}^{r} |H_i| + \sum_{j=1}^{s} (|T_j| - t_j) - \frac{s+1}{2}$$

eine Facette von Q_T^n. (Hierbei ist t_j die Anzahl der Griffe, die mit der Zinke T_j einen nichtleeren Durchschnitt haben.)

Gilt für zwei Knoten u, v eines Cliquenbaums $\{u, v\} \subseteq T_j \cap H_i$, so ist der Koeffizient der Variablen x_{uv} auf der linken Seite von (5.9) zwei. Die Koeffizienten von Cliquenbaum–Ungleichungen haben also Werte in $\{0, 1, 2\}$. Die Kamm–Ungleichungen von Grötschel und Padberg [30] sind die Cliquenbaum–Ungleichungen (5.9) mit nur einem Griff H_1. Die Chvátalschen Kamm–Ungleichungen erhält man aus diesen durch die Zusatzforderung $|H_1 \cap T_j| = 1, j = 1, \ldots, s$.

Die Cliquenbaum–Ungleichungen sehen strukturell noch einigermaßen "handlich" aus. In Grötschel [38] wurden weitere Ungleichungen definiert, die eine außerordentlich komplexe und nicht explizit beschreibbare Form haben. Ein Graph G heißt bekanntlich *Hamiltonsch (begehbar)*, wenn er einen Hamiltonschen Kreis (Weg) enthält. Wir nennen einen Graphen G *hypohamiltonsch (hypobegehbar)*, wenn G nicht Hamiltonsch (nicht begehbar) ist, aber wenn für alle Knoten v von G der Graph $G - v$ Hamiltonsch (begehbar) ist. Es war lange Zeit nicht klar, ob reiche Klassen hypohamiltonscher Graphen bzw. ob hypobegehbare Graphen überhaupt existieren. Mittlerweile sind viele (und recht komplexe) Klassen dieser Graphen konstruiert worden. Aus der Definition folgt unmittelbar, daß für jeden hypohamiltonschen Untergraphen $H = [W, F]$ von K_n die *hypohamiltonsche Ungleichung*

$$(5.10) \qquad x(F) \leq |W| - 1$$

gültig bezüglich Q_T^n ist. Desgleichen ist für jeden hypobegehbaren Untergraphen $H = [W, F]$ von K_n die *hypobegehbare Ungleichung*

$$(5.11) \qquad x(F) \leq |W| - 2$$

gültig. In [38] wurde gezeigt, daß — unter einigen technischen Voraussetzungen, die allerdings für fast alle derzeit bekannten Klassen derartiger Graphen erfüllt sind — die Ungleichungen (5.10) und (5.11) Facetten definieren.

Die in [38] geäußerte Frage nach der Schwierigkeit, hypohamiltonsche und hypobegehbare Graphen zu erkennen bzw. das Separationsproblem bezüglich (5.10) und (5.11) zu lösen, hat Papadimitriou und Yannakakis [39] zu einer allgemeinen Untersuchung der Komplexität polyedertheoretischer Fragestellungen bei $\mathcal{NP}$–schwierigen kombinatorischen Problemen angeregt. Es zeigte sich, siehe auch Papadimitriou [17], daß viele dieser Fragen in einer Komplexitätsklasse liegen, die $\mathcal{NP}$ umfaßt, daß also die polyedertheoretischen Probleme, die hier auftreten, zum Teil schwieriger als die Ausgangsprobleme sind.

Dennoch ist der Erfolg der algorithmischen Anwendungen dieser Untersuchungen erstaunlich. Lineare Programme über dem System von Gleichungen und Ungleichungen (5.2), (5.3) sind mit dem Simplexalgorithmus sehr schnell lösbar. Padberg und Hong [40] haben bemerkt, daß man das Separierungsproblem bezüglich der Kurzzyklus–Ungleichung (5.4) als Min–Cut–Problem formulieren kann. Es ist somit durch Maximalflußalgorithmen recht effizient lösbar. Wie in Abschnitt 4. ausgeführt, haben Padberg und Rao [14] gezeigt, daß das Separierungsproblem bezüglich der 2–Matching–Ungleichungen (5.6) durch eine Variation des Gomory–Hu–Algorithmus in polynomialer Zeit lösbar ist. Folglich sind lineare Programme über (5.2), (5.3), (5.4) und (5.6) mit Hilfe der Ellipsoidmethode in polynomialer Zeit lösbar. Benutzt man statt dieser den Simplexalgorithmus, so erhält man — bei geeigneter Implementation — Schnittebenenverfahren, die in der Praxis zufriedenstellend arbeiten, siehe [40], [41] und [42]. Diese auf dem Simplexalgorithmus basierenden Schnittebenenverfahren sind derzeit die besten Methoden zur Lösung von Travelling–Salesman–Problemen und allen anderen Verfahren weit überlegen. Obwohl die Kamm–Ungleichungen bzw. Cliquenbaum–Ungleichungen (5.9) eine konstruktiv recht einfache Beschreibung haben, ist derzeit nicht bekannt, ob das zugehörige Separierungsproblem in polynomialer Zeit gelöst werden kann. Diesbezügliche Fortschritte würden den polyedertheoretischen Ansatz zur Lösung von Travelling–Salesman–Problemen vermutlich algorithmisch noch attraktiver machen.

Derzeit werden viele der oben angegebenen Resultate auf Varianten des Travelling–Salesman–Problems übertragen. Polyedertheoretische Untersuchungen hierzu liegen z.B. von Cornuéjols, Fonlupt und Naddef [43] und Fleischmann [44] vor. Für derartige Routenplanungsprobleme sind auch bereits Schnittebenenverfahren entwickelt worden, mit denen weitaus größere Probleme gelöst werden konnten als mit den bisher bekannten Verfahren, siehe [45].

6. Weitere Beispiele

Es gibt inzwischen eine stattliche Anzahl von polynomial lösbaren und $\mathcal{NP}$–vollständigen kombinatorischen Optimierungsproblemen, zu denen umfangreiche polyedertheoretische Untersuchungen (wie Adjazenzcharakterisierungen, Facetten-beschreibungen, Dimensionsberechnungen, Bestimmung von total dual ganzzahligen Systemen etc.) vorliegen. Aus Platzgründen ist es unmöglich, auf diese Resultate so detailliert wie in den beiden vorhergehenden Abschnitten einzugehen. Es sollen hier nur noch einige (repräsentative) Beispiele aufgeführt werden, die die derzeitigen Entwicklungen deutlich machen.

6.1 Das Max–Cut–Problem

Gegeben sei ein Graph $G = [V, E]$ mit Kantengewichten c_e für alle $e \in E$. Eine Kantenmenge $F \subseteq E$ heißt *bipartit,* wenn der Graph $[V, F]$ bipartit ist. Die Schnitte $\delta(W)$ für $W \subseteq V$ sind spezielle bipartite Kantenmengen. Das *Max–Cut–Problem* oder *Schnittproblem (Bipartite–Subgraphen–Problem)* ist die Aufgabe, einen Schnitt $\delta(W^*)$ (eine bipartite Kantenmenge F^*) von G zu finden so daß $c(\delta^*(W))$ $(c(F^*))$ maximal ist.

Diese beiden Probleme sind $\mathcal{NP}$–vollständig, und, falls $c_e > 0$ für alle $e \in E$, liefern sie die gleichen Optimallösungen. Die zugehörigen Polytope

$$\mathrm{CUT}(G) := \mathrm{conv}\{\chi^F \in \mathbb{R}^E \mid F \subseteq E \text{ Schnitt }\}$$
$$\mathrm{BIP}(G) := \mathrm{conv}\{\chi^F \in \mathbb{R}^E \mid F \subseteq E \text{ bipartit }\}$$

sind in letzter Zeit deswegen sehr intensiv untersucht worden, weil das Schnittproblem und das Bipartite–Subgraphen–Problem interessante Anwendungen in der Physik haben (Bestimmung des Grundzustandes von Spingläsern, siehe Barahona, Maynard, Rammal und Uhry [46]).

Es ist unmittelbar einzusehen, daß die Ungleichungen

(6.1) $\quad 0 \leq x_e \leq 1 \qquad$ für alle $e \in E$,

(6.2) $\quad x(C) \leq |C| - 1 \qquad$ für alle ungeraden Kreise $C \subseteq E$

gültig bezüglich $\mathrm{BIP}(G)$ und $\mathrm{CUT}(G)$ sind. Grötschel und Pulleyblank [11] haben diejenigen Graphen, für die das durch (6.1) und (6.2) definierte Polytop mit $\mathrm{BIP}(G)$ übereinstimmt, ***schwach bipartit*** genannt. Es konnte gezeigt werden, daß u.a. alle bipartiten, alle planaren und alle Graphen, die nicht zu K_5 kontrahierbar sind (der Beweis von Fonlupt, Mahjoub und Uhry [47] benutzt Wagners bereits zitierten Dekompositionssatz), schwach bipartit sind. Gegenwärtig wird an einer vollständigen Charakterisierung dieser Graphen gearbeitet. Vielleicht ist eine Charakterisierung durch verbotene Minoren möglich.

Von Barahona, Grötschel und Mahjoub [48] wurden weitere Klassen von Facetten von $\mathrm{BIP}(G)$ bestimmt (bicycle wheel inequalities, K_{2k+1}–inequalities etc.), die eine recht umfangreiche partielle lineare Beschreibung von $\mathrm{BIP}(G)$ geben. Diese

Resultate sind von Barahona und Mahjoub [49] auf den Schnittpolytop CUT(G) übertragen worden. Barahona [50] konnte beweisen, daß das System von Ungleichungen (6.1) und

$$x(F) - x(C \setminus F) \leq |F| - 1 \text{ für alle Kreise } C \subseteq E \text{ und alle } F \subseteq C, |F| \text{ ungerade} \tag{6.3}$$

den Polytopen CUT(G) genau dann vollständig beschreibt, wenn G nicht zu K_5 kontrahierbar ist. (Auch hier werden wieder Dekompositionstechniken benutzt.) Diese Resultate wurden in Barahona und Grötschel [51] zur Beschreibung der konvexen Hülle der Inzidenzvektoren der Kreise in binären Matroiden verallgemeinert. Diese matroidalen Ergebnisse umfassen auch andere graphentheoretische Spezialfälle. Zum Beispiel folgt aus ihnen eine vollständige und nicht redundante Beschreibung der konvexen Hülle der Inzidenzvektoren der Eulerschen Teilgraphen eines Graphen.

Inzwischen sind auch einige interessante Separierungsalgorithmen für Klassen von Facetten von BIP(G) und CUT(G) entwickelt worden, siehe z.B. [11], [12] und z.T. noch nicht veröffentlichte Arbeiten. Eine erste Implementation eines Schnittebenenverfahrens für das Max–Cut–Problem von Barahona und Maccioni [52] ist recht vielversprechend. Sie wird gegenwärtig überarbeitet, um große Max–Cut–Probleme, die aus physikalischen Anwendungen stammen, zu lösen.

6.2 Das Linear–Ordering–Problem

Probleme dieses Typs tauchen immer dann auf, wenn gewisse Objekte in eine Rangfolge (lineare Ordnung) gebracht werden sollen, und diese bezüglich eines Kriteriums optimal sein soll. Das Linear–Ordering–Problem, das wir hier skizzieren wollen, kann folgendermaßen beschrieben werden.

In einem vollständig gerichteten Graphen $D_n = (V, A_n)$, sei jeder Bogen $(i,j) \in A_n$ mit einem Gewicht $c_{ij} \in \mathbb{R}$ belegt. Gesucht wird eine lineare Anordnung der Knoten, sagen wir $i_1, i_2, \ldots, i_n$, so daß

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} c_{i_j i_k}$$

maximal ist, d.h. es wird eine Rangfolge der Knoten gesucht, so daß die Summe der Gewichte der Bögen, die mit der Rangfolge kompatibel sind, maximal ist.

Dieses Problem hat vielfältige Anwendungen. Eine der wichtigsten ist die Triangulation von Input–Output–Matrizen, bei der eine "optimale" Hierarchie der Sektoren einer Volkswirtschaft gesucht wird, die gewisse Strukturanalysen und

Vergleiche unterschiedlicher Länder ermöglicht sowie Aussagen über die Zirkularität (Grad der internen Sektorverflechtungen) der Volkswirtschaft erlaubt, siehe Grötschel, Jünger und Reinelt [53]. Diese Anwendung hat tatsächlich zu den nachfolgend dargestellten polyedertheoretischen Untersuchungen geführt. Anwendungen gibt es z.B. auch im Sport (Auswertung von Turnierergebnissen), in der Psychologie (Hierarchieuntersuchungen in Gruppen), in der Archäologie (Ahnenbestimmung, Datierung), in der Maschinenbelegungsplanung und im Marketing. Im Marketing tritt das Linear–Ordering–Problem z.B. bei der Planung von Marketingstrategien oder der Auswahl von Anzeigenserien auf.

Ein *Turnier* in einem vollständigen Digraphen $D_n = (V, A_n)$ ist eine Bogenmenge $T \subseteq A_n$, so daß je zwei Knoten $i, j \in V$ durch genau einen Bogen verbunden sind. Ein Turnier heißt *azyklisch,* falls es keinen gerichteten Kreis enthält. Mit diesen Bezeichnungen kann man das Linear–Ordering–Problem folgendermaßen formulieren:

Finde in D_n ein azyklisches Turnier maximalen Gewichtes.

Das zum Linear–Ordering–Problem gehörende Polytop P_{LO}^n kann somit wie folgt definiert werden:

$$P_{LO}^n := \text{conv}\{\chi^T \in \mathbb{R}^{A_n} \mid T \subseteq A_n \text{ azyklisches Turnier}\}.$$

Linear–Ordering–Probleme können also mit Hilfe des linearen Programms

$$\max c^T x, \ x \in P_{LO}^n$$

gelöst werden.

In Grötschel, Jünger und Reinelt [54] wurde u.a. folgendes gezeigt.

(6.4) Satz *Sei $D_n = (V, A_n)$ ein vollständiger Digraph, $n \geq 2$. Dann gilt:*

(a) *Das Gleichungssystem*

$$x_{ij} + x_{ji} = 1 \text{ für alle } i, j \in V, \ i < j$$

ist ein minimales Gleichungssystem bezüglich P_{LO}^n. (Daraus folgt $\dim P_{LO}^n = \binom{n}{2}$.)

(b) *Die Ungleichungen*

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \text{ für alle } (i, j) \in A_n$$

definieren Facetten von P_{LO}^n. Dabei definieren jedoch die beiden Ungleichungen $x_{ij} \leq 1$ und $x_{ji} \geq 0$ jeweils ein und dieselbe Facette.

(c) *Für jeden gerichteten Kreis $C \subseteq A_n$ ist die Ungleichung*

$$x(C) \leq |C| - 1$$

gültig bezüglich P^n_{LO}. Jedoch definieren lediglich die zu Kreisen der Länge drei gehörigen Ungleichungen Facetten von P^n_{LO}.

(d) *Es seien $k \geq 3$ und $n \geq 2k$, $U = \{u_1, \ldots, u_k\}$, $W = \{w_1, \ldots, w_k\}$, $U \cap W = \emptyset$. Die Bogenmenge*

$$F = \{(u_i, w_i) \mid i = 1, \ldots, k\} \cup \{(w_i, u_j) \mid i \neq j, i, j = 1, \ldots, k\}$$

heißt ***k–Zaun.*** *Für jeden k–Zaun $F \subseteq A_n$ definiert die Ungleichung*

$$x(F) \leq k^2 - k + 1$$

eine Facette von P^n_{LO}.

Es sind noch weitere Facetten von P^n_{LO} bekannt, etwa solche, die von Möbiusleitern, k–Rädern und anderen Digraphen abgeleitet sind. Die Definitionen der zugehörigen Ungleichungen sind jedoch reichlich kompliziert. Wir verweisen hierzu auf Reinelt [55].

In Grötschel, Jünger und Reinelt [56] wurde für das Linear–Ordering–Problem ein Schnittebenenalgorithmus entwickelt, der speziell zur Lösung von Triangulationsproblemen in der Input–Output Analyse gedacht war. Die meisten empirisch erhobenen Input–Output Tabellen haben Zeilen– und Spaltenzahlen n, die zwischen 40 und 60 liegen. Da das Triangulationsproblem von erheblicher praktischer Bedeutung ist, wurden in der Vergangenheit eine Vielzahl von Verfahren zur Lösung von Problemen dieser Größenordnung vorgeschlagen. Jedoch ist es erstmals mit einem Schnittebenenverfahren gelungen, in diese Dimensionen vorzustoßen, und zwar wurden in [53] alle den Autoren zugänglichen Input–Output–Matrizen innerhalb akzeptabler Rechenzeiten trianguliert.

Für die k–Zaun–Ungleichungen, Möbiusleiter–Ungleichungen etc. sind bisher keine polynomialen Separationsalgorithmen bekannt. Hierfür wurden Heuristiken entwickelt, die in Reinelt [55] diskutiert werden. Erstaunlich ist bei diesem Problem, daß die optimalen LP–Lösungen in den untersuchten rund 100 realen Problemen fast immer ganzzahlig waren, also so gut wie nie eine Branch & Bound–Phase aufgerufen werden mußte.

7. Folgerungen und Ausblick

Die polyedrische Kombinatorik, ein Teilgebiet der kombinatorischen Optimierung, hat sich in den letzten 20 und vor allem in den letzten 10 Jahren außerordentlich stark entwickelt. An dieser Entwicklung waren Gäste und Mitglieder des Sonderforschungsbereichs 21 maßgeblich beteiligt. Wurden zu Beginn dieses Zeitraumes die Resultate der polyedrischen Kombinatorik vielfach lediglich als theoretische Kuriositäten betrachtet, die gelegentlich bei Beweisen und Interpretationen nützlich waren, so hat sich vor allem in den letzten fünf Jahren die praktische Verwendbarkeit dieser Theorie gezeigt. Angeregt durch die Arbeiten zur Ellipsoidmethode wurde Polyedertheorie gezielt betrieben, um Schnittebenenverfahren für kombinatorische Optimierungsprobleme zu ermöglichen. Diese Studien waren außerordentlich fruchtbar und erfolgreich. Sie haben zu neuen Klassen von Algorithmen für kombinatorische Optimierungsprobleme geführt, die den bisherigen Methoden überlegen sind, und haben dazu beigetragen, daß Probleme aus der Praxis gelöst werden konnten, die noch vor wenigen Jahren unangreifbar erschienen.

Diese Entwicklung ist eigentlich erst an ihrem Anfang. Die meisten der bisher erzielten Resultate scheinen noch in vielfältiger Weise verfeinert und verallgemeinert werden zu können. Dadurch dürften noch bessere Problemkenntnisse und –klassifikationen möglich werden. Manche Problemkreise und spezielle Problemtypen sind noch gar nicht bearbeitet worden. Viele Probleme der Praxis, die heute nur mit Heuristiken behandelt werden können, dürften in naher Zukunft auch mit exakten Verfahren anzugehen sein, die auf polyedertheoretischen Resultaten beruhen und auf raffinierte Weise Schnittebenenverfahren der linearen Optimierung mit Heuristiken und Enumerationstechniken verknüpfen.

8. Literatur

[1] J. Edmonds: Maximum Matchings and a Polyhedron with 0-1 Vertices, *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B 69 (1965) 125 – 130.*

[2] J. Edmonds: Paths, Trees and Flowers, *Canad. J. Math. 17 (1965) 449 – 467.*

[3] M. Grötschel: Developments in Combinatorial Optimization, *in W. Jäger, J. Moser, R. Remmert (eds.): Perspectives in Mathematics (Anniversary of Oberwolfach 1984), Birkhäuser, Basel 1984, S. 249 – 294.*

[4] W.R. Pulleyblank: Polyhedral Combinatorics, in *A. Bachem, M. Grötschel, B. Korte (eds.): Mathematical Programming – The State of the Art, Bonn 1982, Springer, Heidelberg 1983, S. 312 – 345.*

[5] A. Schrijver: Min–Max Results in Combinatorial Optimization, *in A. Bachem, M. Grötschel, B. Korte (eds.): Mathematical Programming – The State of the Art, Bonn 1982, Springer, Heidelberg 1983, S. 439 – 500.*

[6] K.H. Borgwardt: The Average Number of Pivot Steps Required by the Simplex–Method is Polynomial, *Zeitschrift für Operations Research 26 (1982) 157 – 177.*

[7] L.G. Khachiyan: A Polynomial Algorithm in Linear Programming, *Soviet Math. Dokl. 20 (1979) 191 – 194.*

[8] M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver: The Ellipsoid Method and its Consequences in Combinatorial Optimization, *Combinatorica 1 (1981) 169 – 197.*

[9] M. Conforti, D. Corneil, A.R. Mahjoub: K_i–Covers I: Complexity and Polytopes, *Working Paper, IMAG, Université de Grenoble 1984.*

[10] W. Cunningham: Testing Membership in Matroid Polyhedra, *Journal of Combinatorial Theory, Series B 36 (1984) 161 – 188.*

[11] M. Grötschel, W.R. Pulleyblank: Weakly Bipartite Graphs and the Max–Cut Problem, *Operations Research Letters 1 (1981) 23 – 27.*

[12] B. Gerards: Testing the Odd Bicycle Wheel Inequalities for the Bipartite Subgraph Polytope, *Mathematics of Operations Research 10 (1985) 359–360.*

[13] M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver: Relaxations of Vertex Packing, *Journal of Comb. Theory (B), 1986 to appear.*

[14] M.W. Padberg, M.R. Rao: Odd Minimum Cut–Sets and b–Matchings, *Mathematics of Operations Research 7 (1982) 67 – 80.*

[15] M.W. Padberg, L.A. Wolsey: Fractional Covers for Forests and Matchings, *Mathematical Programming 29 (1984) 1 – 14.*

[16] M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver: The Ellipsoid Method and Combinatorial Optimization, *Springer, Berlin 1986, to appear.*

[17] C.H. Papadimitriou: Polytopes and Complexity, in *W.R. Pulleyblank (ed.), Progress in Combinatorial Optimization, Academic Press, Toronto 1984, S. 295 – 305.*

[18] W.R. Pulleyblank: Facets of Matching Polyhedra, *Ph. D. Thesis, University of Waterloo, Canada 1973.*

[19] J. Edmonds, E.L. Johnson: Matching: A Well Solved Class of Integer Linear Programs, *in R.K. Guy et al. (eds.), Combinatorial Structures and Their Applications, Gordon and Breach, New York 1970, S. 89 – 92.*

[20] W.R. Pulleyblank, J. Edmonds: Facets of 1–Matching Polyhedra, *in C. Berge & D. Ray–Chaudhuri (eds.), Hypergraph Seminar, Springer, Berlin 1974, S. 214 – 242.*

[21] W. Cook, W.R. Pulleyblank: Linear Systems for Constrained Matching Problems, *Report No. 84323–OR, Institut für Ökonometrie und Operations Research, Universität Bonn 1984.*

[22] D. Naddef: Rank of Maximum Matchings of a Graph, *Mathematical Programming 22 (1982) 52 – 70.*

[23] J. Edmonds, L. Lovász, W.R. Pulleyblank: Brick Decomposition and the Matching Rank of Graphs, *Combinatorica 2 (1982) 247 – 274.*

[24] M. Grötschel: Polyedrische Charakterisierungen kombinatorischer Optimierungsprobleme, *Mathematical Systems in Economics 26, Verlag Anton Hain, Meisenheim am Glan 1977.*

[25] K. Wagner: Über eine Erweiterung des Satzes von Kuratowski, *D. Math. 2 (1937) 280 – 285.*

[26] W.L. Hsu, Y. Ikura, G.L. Nemhauser: A Polynomial Algorithm for Maximum Weighted Vertex Packings on Graphs Without Long Odd Cycles, *Mathematical Programming 20 (1981) 225 – 232.*

[27] M. Grötschel, G.L. Nemhauser: A Polynomial Algorithm for the Max–Cut Problem on Graphs without Long Odd Cycles, *Mathematical Programming 29 (1984) 28 – 40.*

[28] P. Seymour: Decomposition of Regular Matroids, *Journal of Combinatorial Theory B 28 (1980) 305 – 359.*

[29] K. Truemper: A Decomposition Theory of Matroids, Part I: General Results, Part II: Minimal Violation Matroid, Part III: Decomposition Conditions, *Working Papers, University of Texas at Dallas 1982, 1983.*

[30] M. Grötschel, M.W. Padberg: On the Symmetric Travelling Salesman Problem I: Inequalities, II: Lifting Theorems and Facets, *Mathematical Programming 16 (1979) 265 – 280, 281 – 302.*

[31] M. Grötschel, O. Holland: Solving Matching Problems with Linear Programming, *Mathematical Programming 33 (1985) 243–259.*

[32] M. Grötschel, M.W. Padberg: Polyhedral Aspects of the Travelling Salesman Problem I: Theory, Polyhedral Aspects of the Travelling Salesman Problem II: Computation, *in E. Lawler, J.-K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan and D. Shmoys (eds.), "The Travelling Salesman Problem", Wiley, New York 1985, S. 251 – 305, S. 307 – 360.*

[33] G.B. Dantzig, D.R. Fulkerson, S.M. Johnson: Solution of a Large–Scale Traveling Salesman Problem, *Operations Research 2 (1954) 393 – 410.*

[34] M. Held, R.M. Karp: The Traveling Salesman Problem and Minimum Spanning Trees, *Operations Research 18 (1970) 1138 – 1162.*

[35] Z. Norman: On the Convex Polyhedra of the Symmetric Travelling Salesman Problem (Abstract), *Bulletin of the American Mathematical Society 61 (1955) 559.*

[36] V. Chvátal: Edmonds Polytopes and Weakly Hamiltonian Graphs, *Mathematical Programming 5 (1973) 29 – 40.*

[37] M. Grötschel, W.R. Pulleyblank: Clique Tree Inequalities and the Symmetric Travelling Salesman Problem, *Math. of Operations Research, 1986 to appear.*

[38] M. Grötschel: On the Monotone Symmetric Travelling Salesman Problem: Hypohamiltonian/Hypotraceable Graphs and Facets, *Mathematics of Operations Research 5 (1980) 285 – 292.*

[39] C.H. Papadimitriou, M. Yannakakis: The Complexity of Facets (and Some Facets of Complexity), *Proc. 14th ACM Symposium on the Theory of Computing, ACM, 1982, 255 – 260.*

[40] M.W. Padberg, S. Hong: On the Symmetric Travelling Salesman Problem: A Computational Study, *Mathematical Programming Study 12 (1980) 78 – 107.*

[41] M. Grötschel: On the Symmetric Travelling Salesman Problem: Solution of a 120–City Problem, *Mathematical Programming Study 12 (1980) 61 – 77.*

[42] H. Crowder, M.W. Padberg: Solving Large–Scale Travelling Salesman Problems to Optimality, *Management Science 26 (1980) 495 – 509.*

[43] G. Cornuéjols, J. Fonlupt, D. Naddef: The Traveling Salesman Problem on a Graph and Some Related Integer Polyhedra, *Working Paper, IMAG, Université de Grenoble, 1984.*

[44] B. Fleischmann: A New Class of Cutting Planes for the Symmetric Travelling Salesman Problem, *Working Paper, Universität Hamburg 1984.*

[45] B. Fleischman: A Cutting Plane Procedure for the Travelling Salesman Problem on Road Networks, *Working Paper, Universität Hamburg 1983.*

[46] F. Barahona, R. Maynard, R. Rammal, J.P. Uhry: Morphology of Ground States of Two–Dimensional Frustration Model, *Journal of Physics A: Math. Gen. 15 (1982) 673 – 699.*

[47] J. Fonlupt, A.R. Mahjoub, J.P. Uhry: Composition of Graphs and the Bipartite Subgraph Polytope, *Working Paper, IMAG, Université de Grenoble 1984.*

[48] F. Barahona, M. Grötschel, A.R. Mahjoub: Facets of the Bipartite Subgraph Polytope, *Math. of Operations Research 10 (1985) 340 – 358.*

[49] F. Barahona, A.R. Mahjoub: On the Cut Polytope, *Report No. 83271–OR, Institut für Ökonometrie und Operations Research, Universität Bonn, Bonn 1983.*

[50] F. Barahona: The Max Cut Problem in Graphs not Contractible to K_5, *Operations Research Letters 2 (1983) 107 – 111.*

[51] F. Barahona, M. Grötschel: On the Cycle Polytope of a Binary Matroid, *Journal of Comb. Theory (B), 1986 to appear.*

[52] F. Barahona, E. Maccioni: On the Exact Ground States of Three–Dimensional Ising Spin Glasses, *Journal of Physics A: Math. Gen. 15 (1982) L611 – L615.*

[53] M. Grötschel, M. Jünger, G. Reinelt: Optimal Triangulation of Large Real World Input–Output Matrices, *Statistische Hefte 25 (1984) 261 – 295.*

[54] M. Grötschel, M. Jünger, G. Reinelt: Facets of the Linear Ordering Polytope, *Mathematical Programming 33 (1985) 43–60.*

[55] G. Reinelt: The Linear Ordering Problem: Algorithms and Applications, *Dissertation, Universität Augsburg, Augsburg 1984.*

[56] M. Grötschel, M. Jünger, G. Reinelt: A Cutting Plane Algorithm for the Linear Ordering Problem, *Operations Research 32 (1984) 1195 – 1220.*

2.7.3 Dualität und Polarität in diskreten Strukturen

von Achim Bachem

1. Einleitung

Dualität und Polarität gehören schon seit Beginn des Operations Research zum unerläßlichen Instrumentarium der Mathematischen Programmierung, deren Übertragbarkeit auf diskrete Strukturen aufgrund der ihr inhärenten kontinuierlichen Mathematik bisher fraglich erschien. Wir wollen in dieser Übersichtsarbeit einige der Forschungsergebnisse der Projektgruppe C2 des Sonderforschungsbereichs 21 zusammenfassen, die sehr deutlich zeigen, daß Dualität und Polarität einen ausgeprägten kombinatorischen Charakter besitzen.

Wir beginnen in Abschnitt 2 mit dem Zusammenhang zwischen Dualität und effizienten Algorithmen und zeigen, daß eine Dualitätstheorie ganz wesentlich zur Konstruktion effizient nachprüfbarer Stoppkriterien beiträgt. Hierbei zeigt sich, daß ein Alternativsatz vom Typ des Farkas Lemmas der eigentliche Inhalt einer Dualitätstheorie ist, was am Beispiel der linearen Programmierung besonders deutlich wird. In Abschnitt 3 betrachten wir Verallgemeinerungen des Farkas Lemmas für linear diophantische Systeme und ganzzahlige Programmierungsprobleme.

In Abschnitt 4 definieren wir orientierte Matroide als die diskrete Struktur, in welche eine verallgemeinerte Version des Farkas Lemmas Gültigkeit besitzt. Die Eigenschaften dieser diskreten Struktur werden in Abschnitt 5 von verschiedenen Seiten beleuchtet, und es zeigt sich, daß orientierte Matroide auch einen Konvexitätsbegriff zulassen bzw. selbst durch konvexe Hüllenoperatoren definiert werden können.