Bemerkungen zur Optimierung ökonomischer Modelle

Bernhard Korte und Martin Grötschel

Ökonomische Modelle weisen im allgemeinen folgende Merkmale auf: 1. Die große Zahl der in einer Volkswirtschaft produzierten Güter wird zu einer relativ kleinen Zahl m von „repräsentativen" Gütern aggregiert. 2. Einige Güter werden als nicht produzierbar und innerhalb des Modells als von außen gegeben angenommen. Diese Güter heißen Primärgüter. Ihre Anzahl sei r. 3. Die vielen verschiedenen Produktionsprozesse werden zu n „repräsentativen" Prozessen zusammengefaßt.

Ein Modell einer Ökonomie besteht nun darin, daß eine Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, \qquad f(x) := (g(x), h(x)) = (y, z)$$

spezifiziert wird, die angibt, welche Menge der erwünschten Güter produziert und wieviel von den Primärgütern verbraucht wird, wenn die Produktionsprozesse auf dem „Niveau" $x \in \mathbb{R}^n$ arbeiten.

Üblicherweise wird angenommen, daß Produktionsprozesse nicht auf negativem Niveau arbeiten können, also $x \geqq 0$.

Da in keiner Ökonomie alle Primärfaktoren (etwa Kapital, Arbeit) in unbeschränktem Maße vorhanden sind, andererseits aber auch ein Verbrauch gewisser Quantitäten (etwa an Arbeit) als politisch wünschenswert angesehen wird, verlangt man im allgemeinen, daß der Verbrauch der Primärfaktoren in einem Bereich $Z \subset \mathbb{R}^r$ liegt. Desgleichen werden häufig aufgrund technischer oder politischer Überlegungen Mindest- und Höchstgrenzen der Produktion gewisser erwünschter Güter vorgegeben, d.h. für $(y, z) = f(x)$ muß gelten $g(x) = y \in Y \subset \mathbb{R}^m$.

Optimierungsprobleme ergeben sich auf natürliche Weise, wenn aufgrund gewisser Bewertungsmaßstäbe und Zielvorstellungen ein Produktionsniveau x, eine Güterproduktion y und ein Verbrauch von Primärgütern z gesucht werden, so daß $f(x) = (y, z)$, $x \geqq 0$, $y \in Y$, $z \in Z$ gilt und daß (x, y, z) im Rahmen der Zielvorstellungen bestmöglich ist. Drücken wir die Bewertung von Produktionsniveau, Gütererzeugung und Primärgüterverbrauch durch eine Funktion

$$c\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$$

aus, so läßt sich dieses Optimierungsproblem als das folgende mathematische Programm schreiben

$$\begin{aligned} c(x, y, z) &= \max!\\ x &\geqq 0\\ f(x) - (y, z) &= 0 \quad \text{bzw.} \begin{cases} g(x) - y = 0\\ h(x) - z = 0 \end{cases}\\ y &\in Y\\ z &\in Z. \end{aligned}$$

Dabei rührt allein die Bedingung

$$f(x) - (y, z) = 0$$

von dem die Vokswirtschaft beschreibenden Modell her, während die Bedingungen $y \in Y$, $z \in Z$ wohl durch Kenntnis des Modells beeinflußt sein können, im wesentlichen jedoch politische oder technische Einschränkungen oder gar im schlechtesten Fall nur Vorurteile des Modellbauers reflektieren.

Viele der in der Literatur vorgeschlagenen ökonomischen Modelle (vgl. Krelle [1967], Hildenbrand [1975], Chenery und Clark [1959], Dorfman, Samuelson und Solow [1958], König [1959]) sind linear, d.h. die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r$ ist linear. Speziell wird häufig, wenn Optimierungsansätze betrachtet werden, eine lineare Technologie zugrunde gelegt. Die weiteren technischen und politischen Beschränkungen Y, Z werden ebenfalls im allgemeinen durch konvexe Mengen oder Polyeder angegeben, die durch eine endliche Zahl von konvexen bzw. linearen Nebenbedingungen definiert sind. In den meisten ökonomischen Modellen, die auf empirischen Erhebungen beruhen und konkrete Analysen und Planungsalternativen mit Optimierungsansätzen ermitteln wollen, sind sowohl die Zielfunktion als auch das zugrunde liegenden Modell und die Nebenbedingungen linear, da zum einen lineare ökonomische Modelle einfacher geschätzt und zum anderen nichtlineare Optimierungsaufgaben etwas anspruchsvollerer Größenordnung kaum gelöst werden können. Das bedeutet, daß das betrachtete Optimierungsproblem ein lineares Programm über einem Polyeder ist, der durch die zugrundeliegende Technologie und spezielle weitere Restriktionen definiert ist. Als Zielfunktionen werden häufig gewählt:

Maximierung gewisser Komponenten der Endnachfrage mit eventueller Gewichtung durch Nutzenindizes, Minimierung des Einsatzes gewisser Primärfaktoren, Minimierung der Umweltbelastung oder Maximierung der Auslastung des Arbeitskräftepotentials.

Praktische Rechnungen nach diesen Vorschlägen haben zum Teil unbefriedigende Resultate erbracht, da die optimalen Lösungsvektoren entweder ökonomisch unsinnig waren (z.B. waren nur wenige Komponenten des Endnachfragevektors echt positiv) oder da sie insofern trivial waren, als sie bei beliebiger Zielfunktion den Werten von x, y und z in der dem Modell zugrundeliegenden Basisperiode entsprachen. Wie wir weiter unten zeigen werden, hat das für einen Teil der Probleme seinen Grund in der Struktur der ökonomischen Modelle.

Nehmen wir vernünftigerweise an, daß von keinem erwünschten Gut y_j negative Mengen produziert, desgleichen, daß von keinem der Primärgüter z_k negative Beträge verbraucht werden sollen, und nehmen wir an, daß sich die Bedingungen $y \in Y$, $z \in Z$ durch ein System von Funktionalungleichungen darstellen lassen, so können wir unser Programmierungsproblem wie folgt schreiben

$$(P) \qquad \begin{aligned} c(x, y, z) &= \max! \\ g(x) - y &= 0 \\ h(x) - z &= 0 \\ F(x, y, z) &\leqq b \\ x &\geqq 0 \\ y &\geqq 0 \\ z &\geqq 0, \end{aligned}$$

wobei wir keine speziellen Forderungen an die Art des Funktionensystems $F(x, y, z) \leqq b$ stellen wollen; desgleichen kann $c(x, y, z)$ zunächst eine beliebige Abbildung sein.

Betrachten wir das folgende Programm

$$(P_1) \qquad \begin{aligned} c_1(x) &= \max! \\ F_1(x) &\leqq b \\ x &\geqq 0, \end{aligned}$$

wobei $F_1(x) := F(x, g(x), h(x))$

$c_1(x) := c(x, g(x), h(x))$ gelten soll.

Bemerkung 1

a) Ist (x, y, z) zulässig für (P), dann auch x für (P_1) und $c(x, y, z) = c_1(x)$.
b) Ist x zulässig für (P_1) und $g(x) \geqq 0$, $h(x) \geqq 0$, dann ist $(x, y, z) := (x, g(x), h(x))$ zulässig für (P) und $c(x, y, z) = c_1(x)$.

Beweis: Folgt trivialerweise durch Einsetzen in die Definitionen. ▮

Folgerung 2

(P) und (P_1) sind genau dann äquivalent, wenn

$$g(x) \geqq 0 \quad \text{und} \quad h(x) \geqq 0 \quad \forall\, x \geqq 0 \text{ mit } F_1(x) \leqq b. \quad ▮$$

Nehmen wir nun an, daß $m = n$ und daß die Abbildung $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijektiv ist, d.h., daß die Anzahl der Produktionsprozesse gleich der Anzahl der erwünschten Güter ist und daß es zu jeder erwünschten Güterkombination (Nachfrage) genau ein Produktionsniveau gibt, das diese erzeugt (sofern genügend Primärfaktoren vorhanden sind).

Sei g^{-1} die Umkehrabbildung von g, und betrachten wir folgendes Programm

$$(P_2) \qquad \begin{aligned} c_2(y) &= \max! \\ F_2(y) &\leqq b \\ y &\geqq 0, \end{aligned}$$

wobei $F_2(y) := F(g^{-1}(y), y, h \circ g^{-1}(y))$
$c_2(y) := c(g^{-1}(y), y, h \circ g^{-1}(y))$ gelten soll.

Bemerkung 3

a) Ist (x, y, z) zulässig für (P), dann auch y für (P_2) und $c(x, y, z) = c_2(y)$.
b) Ist y zulässig für (P_2) und $g^{-1}(y) \geqq 0$, $h \circ g^{-1}(y) \geqq 0$, dann ist $(x, y, z) := (g^{-1}(y), y, h \circ g^{-1}(y))$ zulässig für (P) und $c(x, y, z) = c_2(y)$.

Beweis:

a) (x, y, z) zulässig für $(P) \Rightarrow y \geqq 0$ und
$$\begin{aligned} b &\geqq F(x, y, z) \\ &= F(g^{-1}(y), y, h \circ g^{-1}(y)) \\ &= F_2(y), \end{aligned}$$
also ist y zulässig für (P_2).
$$c(x, y, z) = c(g^{-1}(y), y, h \circ g^{-1}(y)) = c_2(y).$$
b) analog. ▮

Folgerung 4

(P) und (P_2) sind äquivalent genau dann, wenn $g^{-1}(y) \geqq 0$ und $h \circ g^{-1}(y) \geqq 0$ $\forall\, y \geqq 0$ mit $F_2(y) \leqq b$. ∎

Offensichtlich haben die Programme (P_1) und (P_2) gegenüber (P) den Vorteil, daß sie wesentlich weniger Variable und Restriktionen besitzen und daher bei numerischen Rechnungen einfacher gelöst werden können. Darüber hinaus könnten, falls (P) und (P_1) bzw. (P) und (P_2) äquivalent sind, erheblich größere Probleme betrachtet werden. Es ist also sinnvoll zu fragen, bei welchen der für empirische Studien wichtigen Modellen das Programm (P) durch eines der Programme (P_1) oder (P_2) ersetzt werden kann. Außerdem kann dabei studiert werden, inwieweit die zugrundeliegende Technologie überhaupt für die Aufstellung eines optimalen Programms restriktiv ist bzw. ob die Optimallösung allein von den zusätzlichen Beschränkungen abhängt.

Wir nehmen zunächst an, daß die Volkswirtschaft in n Produktionssektoren unterteilt ist, n Güter produziert werden und jedes Gut in genau einem der Sektoren produziert wird.

Sei $X = (x_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$, eine (empirisch erhobene) interindustrielle Transaktionsmatrix, d.h. x_{ij} gibt die Lieferungen des i-ten Sektors an den j-ten Sektor an, $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ sei der Vektor der Gesamtendnachfrage, und

$$x := X e + y$$

sei der Vektor der Bruttoproduktionswerte $(e := (1, \ldots, 1)^T)$.

$$\bar{X} := X \operatorname{diag}(x)^{-1} \quad (\operatorname{diag}(\ ) = \text{Diagonalmatrix des Vektors } (\ ))$$

ist dann die Matrix der klassischen Inputkoeffizienten. Daraus erhalten wir das *Leontief-System*

$$(I - \bar{X})\, x - y = 0.$$

Folgende Eigenschaften der Matrix $A := (I - \bar{X})$ sind wohlbekannt (vgl. etwa Hildenbrand [1975]).

Bemerkung 5

a) $a_{ij} \leqq 0 \quad i \neq j, \qquad a_{ii} > 0 \quad i, j = 1, \ldots, n.$

b) A ist regulär (sei $M := A^{-1}$), da die Spaltennorm von $\bar{X}$ echt kleiner als eins ist.

c) Zu jedem $y \geqq 0$ existiert genau ein $x \geqq 0$ mit

$$A x = y \quad (x := M y) \quad \text{(Frobenius-Perron bzw. Simon-Hawkins Eigenschaft).}$$

d) Aus $Ax \geqq 0$ folgt $x \geqq 0$.

e) $L := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geqq 0\}$ ist ein Kegel mit Spitze in 0, der ganz im positiven Orthanten enthalten ist und innere Punkte enthält. ▮

Eine Verallgemeinerung dieses Modells besteht darin, daß erlaubt wird, daß verschiedene (lineare) Produktionsprozesse dasselbe Gut herstellen können, weiterhin aber jeder Prozeß nur ein Gut produziert. Solche Modelle heißen *Input-Output-Systeme mit Substitution*. Die die Technologie beschreibende Matrix A ist dann eine (m, n)-Matrix mit $m > n$, wobei jede Spalte von A analog zu den Spalten von A im einfachen Modell definiert ist. Jedes Gut i werde von n_i Prozessen hergestellt und die Prozesse seien so geordnet, daß Gut 1 von den ersten n_1 Prozessen, Gut 2 von den Prozessen $n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$ etc. hergestellt wird.

Sei

$$k_0 := 0 \quad \text{und} \quad k_i := \sum_{j=1}^{i} n_j, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Für die so definierte Matrix A gilt dann

Bemerkung 6

a) $a_{ij} > 0$, falls $j \in \{k_{i-1} + 1, \dots, k_i\}$, $a_{ij} \leqq 0$ sonst.

b) A ist, da $n > m$, nicht regulär, hat aber vollen Rang m.

c) Zu jedem $y \geqq 0$ gibt es ein $x \geqq 0$ mit $Ax = y$.

d) Ist $Ax \geqq 0$, so ist nicht notwendig $x \geqq 0$, aber es gibt ein $x_1 \geqq 0$ mit $Ax = Ax_1$.

e) $L := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geqq 0\}$ ist ein Kegel mit Spitze in 0 und enthält innere Punkte.

Beweis:

a) Nach Definition.

b) c) d) Nach Definition ist jede (n, n) Untermatrix von A mit der Eigenschaft, daß es zu jedem Gut (Zeile) einen Prozeß (Spalte) gibt, der dieses produziert, eine Input-Output-Matrix des klassischen Typs, also regulär, d.h. A hat vollen Rang. Aus Bemerkung 5c) folgen dann c) und d).

e) Offensichtlich. ▮

Kehren wir zurück zu unseren Programmen (P), (P_1), (P_2) und nehmen wir an, daß die Beziehungen zwischen Intensitätsniveau und Güterproduktion durch ein einfaches Leontief-Modell oder eines mit Substitution dargestellt sind, d.h.

$$(P)\qquad \begin{aligned} c(x,y,z)&=\max!\\ Ax-y&=0\\ h(x)-z&=0\\ F(x,y,z)&\leqq b\\ x&\geqq 0\\ y&\geqq 0\\ z&\geqq 0\end{aligned}$$

$$(P_1)\qquad \begin{aligned} c_1(x)&=\max!\\ F_1(x)&\leqq b\\ x&\geqq 0\end{aligned}$$

$$(P_2)\qquad \begin{aligned} c_2(y)&=\max!\\ F_2(y)&\leqq b\\ y&\geqq 0.\end{aligned}$$

Im allgemeinen wird im Rahmen der Input-Output-Theorie vorgeschlagen, für den Verbrauch an Primärfaktoren Leontief-Walrassche Produktionsfunktionen oder Produktionsfunktionen des Arrow-Solow-Typs (siehe etwa SCHUMANN [1968]) zu wählen. Alle ökonomisch sinnvollen Funktionen dieser Art haben die Eigenschaft, daß bei nichtnegativem Intensitätsniveau x auch der Verbrauch $h(x)$ an Primärfaktoren nicht negativ ist. Unter dieser Annahme folgt dann

Bemerkung 7

Die Programme (P) und (P_2) sind äquivalent, wenn A die Matrix des einfachen Leontiefsystems ist und $h(x)$ eine der klassischen Produktionsfunktionen ist.

Beweis:

Ist h eine der klassischen Produktionsfunktionen, dann gilt $h(x)\geqq 0$, falls $x\geqq 0$. Ist A die Leontief-Matrix und $y\geqq 0$, dann ist nach Bemerkung 5c) $A^{-1}y=:x\geqq 0$, folglich auch $h(A^{-1}y)\geqq 0$. Mit Folgerung 4 folgt die Behauptung. ▮

Die Bemerkung 7 sagt also aus, daß in dem Falle, wo die Beziehungen zwischen Produktionsniveau und Güterproduktion durch ein einfaches Leontief-Modell wiedergegeben werden, das Optimierungsprogramm (P) durch das wesentlich einfachere Optimierungsproblem (P_2) ersetzt werden kann. Nehmen wir als Beispiel eines der i.a. üblichen linearen Optimierungsmodelle.

$$\begin{aligned} cy &= \max! \\ Ax - y &= 0 \\ Zx - z &= 0 \\ B_1 x &\leqq b_1 \\ B_2 y &\leqq b_2 \\ B_3 z &\leqq b_3 \\ x \geqq 0, \quad y &\geqq 0, \quad z \geqq 0. \end{aligned}$$

Die Endnachfrage bei Gewichtung der einzelnen Güter soll maximiert werden unter Beachtung verschiedener Kapazitätsbeschränkungen. Sei $M := A^{-1}$, dann ist dieses Programm äquivalent zu

$$cy = \max!$$

$$\begin{pmatrix} B_1 M \\ B_2 \\ B_3 ZM \end{pmatrix} y \leqq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$y \geqq 0.$$

Das zweite Programm ist wesentlich handlicher als das erste und reflektiert vor allen Dingen, wenn man bedenkt, wie simpel meistens die Struktur der Matrizen B_1, B_2, B_3 bei empirischen Modellen ist, kaum noch die Technologie des Input-Output-Modells. Das Problem ist reduziert auf ein Programm, das eine optimale Güterproduktion bestimmt unter Nebenbedingungen, die meistens die Meinung des Modellbauers über sinnvolle Ober- oder Untergrenzen reflektieren. Das Optimum ist allein von den gewählten Schranken abhängig und bis auf die Matrixtransformationen unabhängig von der Struktur des Input-Output-Modells.

Da die Matrix A im Input-Output-Modell mit Substitution nicht invertierbar ist, lassen sich in diesem Fall ähnliche Schlußfolgerungen natürlich nicht ziehen.

Betrachten wir nun die Beziehungen zwischen den Programmen (P) und (P_1). Zunächst ist (P) offensichtlich zu folgendem Programm äquivalent

$$(P_3) \qquad \begin{aligned} c_1(x) &= \max! \\ Ax &\geqq 0 \\ h(x) &\geqq 0 \\ F_1(x) &\leqq b \\ x &\geqq 0. \end{aligned}$$

Das Programm (P_1) entsteht aus (P_3) durch Weglassen der Ungleichungssysteme $Ax \geqq 0$, $h(x) \geqq 0$. Wir wollen untersuchen, wann diese weggelassen werden können, ohne daß die Optimallösung geändert wird.

Analog zur Diskussion im vorhergehenden Falle können wir bei jeder praktischen Rechnung annehmen, daß für die Nachfrage nach Primärgütern gilt: $h(x) \geqq 0$ falls $x \geqq 0$, d.h. daß die Nebenbedingung $h(x) \geqq 0$ von $x \geqq 0$ impliziert wird, also redundant ist.

Die Menge $L := \{x \colon Ax \geqq 0\}$ ist nach Bemerkung 5e) bzw. 6e) ein Kegel, der im Falle des einfachen Leontief-Systems sogar im positiven Orthanten liegt. Im Falle des Modells mit Substitution ist L nicht Teilmenge von $\mathbb{R}^m_+$, aber es gilt auch nicht $\mathbb{R}^m_+ \subset L$. Ohne zusätzliche Einschränkungen können wir also die Nebenbedingungen $x \in L$ nicht fallen lassen.

Nehmen wir an, daß die Zielfunktion $c \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ konkav ist, daß die Abbildung $F \colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^p$ konvex ist, und daß die Produktionsfunktion $h \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$ linear ist, d.h. daß eine Leontief-Walras-Produktionsfunktion vorliegt. Es folgt dann

Bemerkung 8

$c_1 \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ist konkav und $F_1 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ konvex.

Beweis: Sei $0 \leqq \lambda \leqq 1$, dann gilt:

$$\begin{aligned} c_1(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= c(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2), h(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)) \\ &= c(\lambda x_1, A\lambda x_1, h(\lambda x_1)) + ((1-\lambda)x_2, A(1-\lambda)x_2, h((1-\lambda)x_2)) \\ &= c(\lambda(x_1, Ax_1, h(x_1)) + (1-\lambda)(x_2, Ax_2, h(x_2))) \\ &\geqq \lambda c(x_1, Ax_1, h(x_1)) + (1-\lambda)c(x_2, Ax_2, h(x_2)) \\ &= \lambda c_1(x_1) + (1-\lambda)c_1(x_2). \end{aligned}$$

Analog sieht man, daß F_1 konvex ist. ∎

Die zulässigen Bereiche der beiden Programme (P) und (P_1) sind somit als Durchschnitt konvexer Mengen konvex. Die Zielfunktionen beider Programme sind konkav.

Bezeichnen wir den Rand des Kegels $L = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \geqq 0\}$ mit $Rd\,L$. Ein Vektor $x \in L$ ist also genau dann aus $Rd\,L$, wenn mindestens eine Komponente des Bildvektors Ax gleich Null ist. Es gilt dann

Bemerkung 9

Sei $c \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ konkav, $h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ linear, $h(x) \geqq 0$ für $x \geqq 0$ und $F \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^p$ konvex. Sei (x, y, z) optimal für (P) und x_1 optimal für (P_1).

Dann gilt

(a) $c_1(x_1) > c(x, y, z) \Rightarrow x \in Rd\,L$.

(b) $c_1(x_1) = c(x, y, z)$ und $x_1 \notin L \Rightarrow$.
Es existiert ein für (P) zulässiger Vektor (x_2, y_2, z_2) mit $x_2 \in Rd\,L$ und $c(x_2, y_2, z_2) = c(x, y, z)$.

Beweis:
Da die Programme (P) und (P_3) äquivalent sind und der Definitionsbereich von (P_1) den von (P_3) enthält, ist der Wert der Optimallösung von (P_1) immer mindestens so groß wie der Wert der Optimallösung von (P_3) bzw. (P).

(a) Angenommen $x \notin Rd\,L$. Da $x_1 \notin L$ gibt es ein α mit $0 < \alpha < 1$, so daß $x_\alpha := \alpha x_1 + (1-\alpha) x \in Rd\,L$. Sei $y_\alpha := A x_\alpha$, und $z_\alpha := h(x_\alpha)$. Da $x_\alpha \in L$, ist nach Definition $y_\alpha \geqq 0$, und da $x \geqq 0$, $x_1 \geqq 0$, ist auch $x_\alpha \geqq 0$, folglich nach Annahme $z_\alpha \geqq 0$. Aufgrund der Konvexität von F folgt

$$\begin{aligned}
F(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) &= F\big(\alpha x_1 + (1-\alpha)x, \alpha A x_1 + (1-\alpha) A x, \alpha h x_1 + (1-\alpha) h x\big) \\
&= F\big(\alpha(x_1, A x_1, h x_1) + (1-\alpha)(x, A x, h x)\big) \\
&\leqq \alpha F(x_1, A x_1, h x_1) + (1-\alpha)(x, A x, h x) \\
&= \alpha F_1(x_1) + (1-\alpha) F(x, y, z) \leqq \alpha b + (1-\alpha) b = b.
\end{aligned}$$

Mithin ist $(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$ zulässig für (P). Da c konkav ist, ergibt sich

$$\begin{aligned}
c(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) &= c\big(\alpha(x_1, A x_1, h x_1) + (1-\alpha)(x, A x, h x)\big) \\
&\geqq \alpha c(x_1, A x_1, h x_1) + (1-\alpha)\, c(x, y, z) \\
&= \alpha c_1(x_1) + (1-\alpha)\, c(x, y, z) \\
&> c(x, y, z).
\end{aligned}$$

Das aber ist ein Widerspruch zur Optimalität von (x, y, z).

(b) Ist (x, y, z) optimal für (P) und $x \notin Rd\,L$, so konstruieren wir wie oben den gesuchten Vektor (x_2, y_2, z_2), mit $x_2 \in Rd\,L$. ∎

Wie ist nun diese Aussage zu interpretieren? Aufgrund des relativ hohen Aggregationsgrades aller empirisch erhobenen ökonomischen Modelle (speziell in der Input-Output-Analyse) ist anzunehmen, daß nur solche Güter in das Modell aufgenommen werden, die in der Volkswirtschaft produziert werden und auch weiterhin produziert werden sollen.

Ein Optimierungsmodell, das als Lösung angibt, daß kein Stahl mehr produziert werden soll, muß fehlspezifiziert sein. Üblicherweise werden in die Optimierungsprogramme positive Unter- und Obergrenzen für die Güterproduktion aufgenommen, was heißt, daß in diesem Fall alle den Kegel L definierenden Restriktionen redundant sind, d.h., daß die Bedingung

$Ax \geqq 0$ weggelassen werden kann, ohne die Lösungsmenge zu verändern. Das aber bedeutet nun, daß unter den Voraussetzungen von Bemerkung 9, die in allen uns bekannten empirischen Studien erfüllt sind, das Programm (P) durch das Programm (P_1) ersetzt werden kann. Denn liefert das Programm (P_1) eine Lösung x_1, so daß $A x_1 \notin \mathbb{R}_+^m$, dann gibt es nach Bemerkung 9 eine Optimallösung (x, y, z) von (P), so daß mindestens eine Komponente von y Null ist. Unter den üblichen Voraussetzungen, die bei empirischen Studien von Ökonomien gemacht werden, heißt das aber, daß das Optimierungsprogramm für vernünftige Aussagen über das Modell fehlspezifiziert ist.

Für Modellbauer, die Planungsalternativen durch Optimierung von Systemen, die ökonomische Modelle enthalten, ermitteln wollen, ergibt sich aus den vorangegangenen Überlegungen, daß sich die Programme durch Reduktion der Variablenzahl und Weglassen vieler Ungleichungen wesentlich vereinfachen lassen. Weiter zeigt sich, daß häufig das zugrunde gelegte ökonomische Modell gar keinen Einfluß auf die Lösungsmenge des Programms hat, was bedeutet, daß die Optimallösungen allein von den zusätzlichen Beschränkungen abhängen, die leider manchmal nur nach gewissen Daumenregeln angesetzt werden. Für die Entwicklung von Optimierungsmodellen, die für empirische Zwecke Verwendung finden sollen, ergibt sich daraus der Schluß, daß wesentlich mehr Sorgfalt auf die Erstellung der zusätzlichen Restriktionen gelegt werden muß, da diese im allgemeinen allein die Lage des Optimums beeinflussen.

Literatur

Chenery, H. B. und Clark, P. G. [1959], *Interindustry Economics*, New York.

Dorfman, R., Samuelson, P. und Solow, R. [1958], *Linear Programming and Economic Analysis*, New York.

Hildenbrand, K. und W. [1975], *Lineare ökonomische Modelle*, Berlin-Heidelberg-New York.

König, H. [1959], Input-Output-Analyse und Lineares Programmieren, *Jahrbuch für Sozialwissenschaften*, 4./10. Bd., S. 64–79.

Krelle, W. [1967], *Volkswirtschaftliche Gesamtrechnung*, 2. Aufl., Berlin.

Schumann, J. [1968], *Input-Output-Analyse*, Berlin, S. 138ff.