

## Lineare Charakterisierungen von Travelling Salesman Problemen

Von *M. Grötschel* und *M. W. Padberg*, Bonn<sup>1)</sup>

Eingegangen am 17. September 1974  
Revidierte Fassung eingegangen am 9. Juli 1975

**Zusammenfassung:** Wir betrachten die Formulierung des asymmetrischen Travelling Salesman Problems als lineares Programm und leiten mehrere Klassen neuer Ungleichungen ab, die eine *schärfere* Charakterisierung des Travelling Salesman Polytopen (konvexe Hülle der Touren) in Form von Ungleichungen ergeben.

Es zeigt sich, daß einige der neuen Ungleichungen und auch einige der bekannten Kurzzyklus-Bedingungen tatsächlich Facetten des Travelling Salesman Polytopen sind, d.h. daß sie zu der Klasse von Ungleichungen gehören, die die konvexe Hülle aller Touren eines  $n$ -Städte Problems in eindeutiger Weise charakterisiert.

**Summary:** We consider the linear programming formulation of the asymmetric travelling salesman problem. Several new inequalities are stated which yield a *sharper* characterization in terms of linear inequalities of the travelling salesman polytope, i.e. the convex hull of tours.

In fact some of the new inequalities as well as some of the well-known subtour elimination constraints are indeed *facets* of the travelling salesman polytope, i.e. belong to the class of inequalities that uniquely characterize the convex hull of tours to a  $n$ -city problem.

### 1. Einleitung

Das Travelling Salesman Problem (TSP) hat in der Literatur große Beachtung gefunden als ein interessantes und für die Praxis wichtiges kombinatorisches Optimierungsproblem. (Für einen Überblick über die bis 1968 dazu erschienenen Arbeiten, siehe *Bellmore, Nemhauser* [1968], *Müller-Merbach* [1970], *Steckhan, Thome* [1972]). Neue Anregungen hat die Bearbeitung des TSP durch Arbeiten von *Chvátal* [1973b], *Held* und *Karp* [1970], [1971], *Hong* [1971], *Karp* [1972] sowie *Padberg* und *Rao* [1974] erfahren. Insbesondere die Arbeit von *Karp* [1972] ist in diesem Zusammenhang erwähnenswert, da in ihr gezeigt wird, daß das TSP zu seiner Lösung einen – im Sinne der Definition von *Karp* [1972] – ebenso *komplexen* Algorithmus benötigt wie das scheinbar viel allgemeinere lineare Programmierungsproblem in Null-Eins-Variablen. In der Arbeit von *Padberg* und *Rao* [1974] wird gezeigt, daß der *Diameter* der konvexen

<sup>1)</sup> *Martin Grötschel* und *Manfred W. Padberg*, Institut für Ökonometrie und Operations Research, Universität Bonn, Nassestraße 2, 5300 Bonn.

Hülle aller Touren eines TSP immer kleiner oder gleich zwei ist, d.h. daß die minimale Kantendistanz zweier beliebiger Touren des TSP auf der konvexen Hülle aller Touren höchstens zwei ist. Damit fällt das TSP bezüglich dieser Charakteristik konvexer Polytope in dieselbe Kategorie wie zahlreiche kombinatorische Programmierungsprobleme, für die es – im Sinne von Edmonds [1965] – „gute“ Algorithmen gibt (so z.B. für das Zuordnungsproblem, das Matching-Problem, etc.).

Mathematisch wird das TSP im allgemeinen wie folgt formuliert: Es sei  $P_A^n$  der Polytop des  $(n, n)$ -Zuordnungsproblems (Assignment Problem, kurz AP), siehe etwa Müller-Merbach [1970],

$$P_A^n = \{x \in R^{n^2} : x_{ij} \geq 0; \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \text{ für } j = 1, \dots, n; \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

Dann ist jede Tour des TSP mit  $n$  Städten eine Basislösung von AP, aber nicht umgekehrt.

Mit Hilfe des AP kann durch Hinzufügen der Kurzzyklus-Bedingungen (Subtour Elimination Constraints) das TSP als ganzzahliges lineares Programm formuliert werden: Es sei  $S \subseteq \{1, \dots, n\} =: V$  eine beliebige nicht-leere echte Teilmenge von  $V$ . Dann sind die Kurzzyklus-Bedingungen definiert durch

$$(S) \quad \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad S \subseteq V \text{ mit } 1 \leq |S| \leq n - 1.$$

Definieren wir nun  $P_S^n$  als diejenige Teilmenge aller Lösungen von  $P_A^n$ , die (S) erfüllt, d.h.  $P_S^n = \{x \in P_A^n \mid x \text{ erfüllt (S)}\}$ , so sind bekanntlich die ganzzahligen Ecken von  $P_S^n$  gerade die Touren des Travelling Salesman, d.h. der Polytop  $P_T^n$  des  $n$  Städte-TSP ist gerade die konvexe Hülle der ganzzahligen Lösungen aus  $P_S^n$ ,  $P_T^n = \text{conv} \{x \in P_S^n \mid x \text{ ganzzahlig}\}$ .

Eine vollständige lineare Charakterisierung von  $P_T^n$ , d.h. ein lineares Gleichungs- und Ungleichungssystem, dessen Lösungsmenge  $P_T^n$  ist, ist nicht bekannt. Es gilt aber die Relation  $P_T^n \subseteq P_S^n \subseteq P_A^n$ . Für die Lösung eines TSP bedeutet das, daß man die Optimallösungen über  $P_A^n$  und  $P_S^n$  heranziehen kann, um eine Abschätzung der Zielfunktion für das TSP zu erhalten. Allgemeiner: da jede Tour auch Ecke von  $P_A^n$  bzw.  $P_S^n$  ist, genügt es vielfach über die Polytopen  $P_A^n$  bzw.  $P_S^n$  zu optimieren, um die Optimalität einer gewissen Tour nachzuweisen. Dabei hat offensichtlich der Polytop  $P_S^n$  gegenüber  $P_A^n$  den Vorteil, daß er *schärfere* Schranken liefert und die Optimalität einer Tour *mit größerer Wahrscheinlichkeit* nachgewiesen werden kann.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es nun, *schärfere* partielle lineare Charakterisierungen von  $P_T^n$  zu erstellen, d.h. lineare Ungleichungssysteme (US) zu finden, so daß gilt:

$$P_T^n \subseteq P' = \{x \in P_S^n \mid x \text{ erfüllt (US)}\} \subseteq P_S^n \subseteq P_A^n.$$

Historisch gesehen ist die Suche nach solchen schärferen linearen Charakterisierungen motiviert durch eine bereits 1954 publizierte Arbeit von Dantzig, Fulkerson und Johnson [1954], in der vermittels ebensolcher Überlegungen die *Optimalität* einer Tour eines TSP mit 49 Städten gezeigt wurde. Trotz weiterer Einzelfälle, in denen es gelun-

gen ist, Probleme mit einer relativ großen Anzahl von Städten *exakt* zu lösen, siehe etwa *Thompson und Karg* [1964], *Helbig Hansen, Krarup* [1974], kann man dennoch sagen, daß in der Regel Probleme mit  $n \geq 60$  Städten heuristisch gelöst werden müssen, da der Rechenaufwand sonst in unvertretbarer Weise ansteigt. Das bedeutet in der Praxis, daß man Optimalität einer heuristisch gefundenen Lösung vielfach nicht nachweisen kann und in der Regel nur eine grobe Abschätzung der Entfernung vom „wahren“ Optimum zur Verfügung hat. Wesentlich ist in Zusammenhang mit unserem Vorgehen die Beobachtung, daß häufig eine nur relativ kleine Teilmenge aller linearen Ungleichungen, die  $P_T^n$  charakterisieren, „aktiviert“ werden muß (in Verbindung mit den Nebenbedingungen des AP), um die Optimalität von Touren nachzuweisen, siehe *Dantzig et al.* [1954], *Hong* [1971].

Die vorliegende Arbeit bietet in Hinblick auf die vorangegangenen Bemerkungen Ansätze für schärfere Kriterien zur Überprüfung auf Optimalität von Touren, und es werden in ihr erstmals Ungleichungen daraufhin untersucht, ob sie „Facetten“ von  $P_T^n$  sind, d.h. lineare Beziehungen darstellen, die zu einer *nicht-redundanten* linearen Charakterisierung von  $P_T^n$  auch tatsächlich benötigt werden. (Solche Ungleichungen sind in gewissem Sinne „strongest cutting planes“). Damit steht dieser Aufsatz in einer Reihe von neueren Arbeiten, die darauf abzielen, ganzzahlige Optimierungsprobleme dadurch einer Lösung näherzubringen, daß Strukturuntersuchungen an der konvexen Hülle der ganzzahligen zulässigen Punkte durchgeführt werden, siehe etwa *Balas* [1975], *Chvátal* [1973a], *Glover* [1973], *Hammer, Johnson, Peled* [1975b], *Padberg* [1971, 1973, 1975], *Wolsey* [1975].

In Abschnitt 2 geben wir einen Überblick über einige der bisher bekannten theoretischen Resultate und die Darstellung unserer Notationsweise. In Abschnitt 3 werden die von *Chvátal* [1973b] gefundenen Kammungleichungen auf das asymmetrische TSP übertragen, anschließend werden drei neue Klassen gültiger Ungleichungen abgeleitet. Der Abschnitt 4 bringt die Berechnung der Dimension von  $P_T^n$ . In Abschnitt 5 werden verschiedene Klassen von Ungleichungen daraufhin untersucht, ob sie Facetten von  $P_T^n$  definieren. In Abschnitt 6 wird gezeigt, daß die neuen Ungleichungen eine schärfere – wenngleich nur partielle – lineare Charakterisierung von  $P_T^n$  liefern. Schließlich werden in Abschnitt 7 die erhaltenen Resultate zusammengestellt, einige Vermutungen über  $P_T^n$  geäußert und Möglichkeiten zur weiteren Arbeit aufgezeigt. Die Verwendung der hier erhaltenen Ergebnisse im Bezug auf die numerische Lösung von TSP's – etwa im Sinne des Verfahrens von *Hong* [1971] – ist einer weiteren Arbeit vorbehalten.

## 2. Notation und Vorbemerkungen

Ein (gerichteter) *Graph*  $G = (V, E)$  besteht aus einer endlichen Menge  $V$  (Knoten) und einer endlichen Menge  $E \subset V \times V$  (Kanten). Ist  $W \subset V$ , so bezeichnet  $F(W)$  den von  $W$  aufgespannten Untergraphen, d.h.  $F(W) = E \cap W \times W$ . Mit  $|W|$  bezeichnen wir die Mächtigkeit von  $W$ .

Ein (schlingenloser, gerichteter) Graph  $G = (V, E)$  heißt *vollständig*, falls  $E = V \times V - \{(i, i) \mid i = 1, \dots, n\}$ .

Graphentheoretisch läßt sich das TSP nun wie folgt formulieren: Es sei  $G = (V, E)$  ein vollständiger Graph. Eine Kante  $(i, j)$  in  $G$  repräsentiert den Weg von der Stadt  $i$  zur Stadt  $j$ . Bewerten wir jede Kante mit einer Weglänge  $c_{ij}$ , so ist ein Hamiltonscher Kreis in  $G$  zu suchen, so daß die Summe der Kantenbewertungen minimal ist. In einem *symmetrischen* TSP ist  $c_{ij} = c_{ji}$ , das bedeutet, daß man ein solches Problem mit Hilfe ungerichteter Graphen, somit also mit der Hälfte der Kanten formulieren kann. In diesem Aufsatz werden wir uns jedoch nur mit dem *asymmetrischen* TSP befassen.

Um das TSP als Problem der ganzzahligen Programmierung zu formulieren, ordnet man jeder Kante  $(i, j) \in E$  eine Variable  $x_{ij} \in \{0,1\}$  zu und setzt  $x_{ij} = 1$ , falls der Handlungsreisende von  $i$  nach  $j$  geht,  $x_{ij} = 0$  sonst. Im weiteren schreiben wir  $x$  als Vektor  $x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$ . Jede *zyklische Permutation*  $\pi = \langle i_1, \dots, i_n \rangle$  interpretieren wir als Vektor  $x$  mit Hilfe der Vorschrift  $x_{ij} = 1$ , falls  $(i, j)$  in der Permutation vorkommt,  $x_{ij} = 0$  sonst. Für jede Tour eines Handlungsreisenden haben wir also nun drei äquivalente Darstellungen a) als Permutation, b) als Vektor  $x$  und c) als Folge von Kanten (Hamiltonzyklus),  $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_n, i_1)$ . Wir nennen zwei Touren linear unabhängig, wenn sie als Vektoren des  $\mathbb{R}^{n^2}$  dargestellt linear unabhängig sind. Seit Dantzig et al. [1954] wird das TSP im allgemeinen wie folgt als ganzzahliges Programm formuliert:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

unter (1)  $\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$

(2)  $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$

(3)  $x_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n.$

(L)  $\sum_{i \in S} \sum_{j \in V-S} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S \subset V, S \neq \emptyset.$

oder

(S)  $\sum_{(i,j) \in F(S)} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq V, 1 \leq |S| < n.$

Die Ganzheitsbedingung (3) fordert, daß eine Kante  $(i, j)$  entweder in einer Tour ist oder nicht. Die Bedingungen (1) und (2) besagen, daß jede Stadt genau einmal besucht wird; (1) und (2) geben gerade die Nebenbedingungen des  $(n, n)$ -Zuordnungsproblems (AP) wieder. Für die Nebenbedingungen (1) und (2) schreiben wir in Matrixschreibweise:  $Ax = e$ . Für das  $n$ -Städte Problem sei dann

$$P_A^n = \{x \in \mathbb{R}^{n^2} \mid Ax = e, x \geq 0\}, P_T^n = \text{conv} \{x \in P_A^n \mid x \text{ ist Tour}\}$$

$$P_S^n = \{x \in P_A^n \mid x \text{ erfüllt (S)}\}.$$

$P_A^n$  ist die Menge aller Lösungen des Zuordnungsproblems, das aufgrund der totalen Unimodularität von  $A$  die Eigenschaft hat, daß alle Ecken ganzzahlig sind. Dagegen besitzt  $P_S^n$  auch nichtganzzahlige Ecken, jedoch repräsentieren alle ganzzahligen Ecken Touren.  $P_T^n$  besitzt wiederum nach Definition nur ganzzahlige Ecken, die Touren darstellen, jedoch ist kein lineares Gleichungs- und Ungleichungssystem bekannt, das  $P_T^n$  vollständig charakterisiert. Erste Schritte zu einer *nicht-redundanten*, vollständigen linearen Charakterisierung von  $P_T^n$  werden in dieser Arbeit unternommen. Dazu bemerken wir zunächst der Vollständigkeit halber, daß die Loop-Constraints (L) äquivalent sind zu den Subtour-Elimination Constraints (S) sowie daß es genügt, eine echte Teilmenge aller Nebenbedingungen der Form (S) zu betrachten.

*Bemerkung 2.1:* Die Loop Constraints (L) sind äquivalent zu den Subtour Elimination Constraints (S).

Der *Beweis* folgt unmittelbar aus der Beziehung:

$$\sum_{(i,j) \in F(S)} x_{ij} = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} = \sum_{i \in S} \sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{i \in S} \sum_{j \in V \setminus S} x_{ij}. \quad \square$$

*Bemerkung 2.2:* Es genügt, die folgenden Ungleichungen (S) zu betrachten

$$\sum_{(i,j) \in F(S)} x_{ij} \leq |S| - 1 \text{ für alle } S \subset V \text{ mit } 1 \leq |S| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

Der *Beweis* der Bemerkung 2.2 folgt im wesentlichen ebenfalls aus der oben angegebenen Beziehung.  $\square$

Da es im Falle „ $n$  gerade“ genügt, die Hälfte aller  $S \subseteq V$  mit  $|S| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  zu betrachten, werden insgesamt also  $2^{n-1} - 1$  Ungleichungen vom Typ (S) benötigt und darin sind  $n$  Restriktionen der Form  $x_{ii} \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , enthalten, d.h. wir können im folgenden zur Vereinfachung der Schreibweise immer annehmen, daß  $x_{ii} = 0$  für  $i = 1, \dots, n$ .

### 3. Ungleichungen für den Travelling Salesman Polytopen

In diesem Abschnitt wollen wir einige Klassen neuer Ungleichungen ableiten, die *gültig* für das TSP sind, d.h. daß alle Touren diese Ungleichungen erfüllen. Sinnvollerweise sollten diese Ungleichungen „scharf“ sein, geometrisch bedeutet das, daß die neuen Ungleichungen zusammen mit den Subtour Elimination Constraints einen Polytopen liefern, der in  $P_S^n$  echt enthalten ist und möglichst viele Facetten mit  $P_T^n$  gemeinsam hat. *Chvátal* [1973b] hat sogenannte „Kammungleichungen“ angegeben, mit deren Hilfe er neue notwendige Bedingungen für die Existenz Hamiltonscher Kreise in ungerichteten Graphen fand. Seine Kammungleichungen lassen sich direkt auf gerichtete Graphen übertragen.

## a) C1-Ungleichungen

**Definition:** Sei  $K_0, K_1, \dots, K_k \subset V$ , für  $i = 0, 1, \dots, k \geq 0$  und gelte  $|K_i| \geq 2$ ,

$|K_0 \cap K_i| = 1, i = 1, \dots, k$ . Sei  $K = \bigcup_{i=0}^k F(K_i)$ . Dann heißt  $(K; K_0, K_1, \dots, K_k)$

oder kurz  $K$  ein C1-Kamm. Die Kantenmengen  $F(K_1), \dots, F(K_k)$  nennen wir **Zinken**.

**Beispiel:** Es seien  $K_0 = \{1, 2, 3\}$ ,  $K_1 = \{1, 4\}$ ,  $K_2 = \{2, 4\}$  und  $K_3 = \{3, 5, 6\}$ . Dann hat der durch  $K$  gelieferte Untergraph von  $G$  folgendes Aussehen.

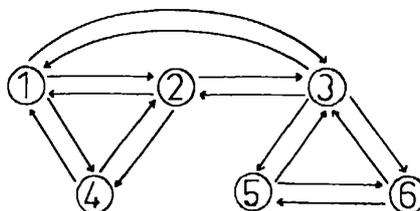


Fig. 1

Unsere C1-Kämme sind unmittelbare Verallgemeinerungen der Chvátalschen „combs“ auf den Fall eines gerichteten Graphen. Für einen C1-Kamm  $K$  gilt folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}
 2 \sum_{(i,j) \in K} x_{ij} &= \sum_{i \in K_0} \sum_{(i,j) \in K} (x_{ij} + x_{ji}) + \sum_{h=1}^k \left( \sum_{(i,j) \in F(K_h)} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in F(K_h - K_0)} x_{ij} \right) \\
 &\leq \sum_{i \in K_0} \sum_{j=1}^n (x_{ij} + x_{ji}) + \sum_{h=1}^k \left( \sum_{(i,j) \in F(K_h)} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in F(K_h - K_0)} x_{ij} \right) \\
 &\leq 2|K_0| + \sum_{h=1}^k (|K_h| - 1) + \sum_{h=1}^k (|K_h| - 2) \\
 &= 2|K_0| + 2 \sum_{h=1}^k (|K_h| - 1) - k.
 \end{aligned}$$

Da  $x_{ij}$  ganzzahlig ist, gilt für jeden Kamm  $K$ :

$$(UC1) \quad \sum_{(i,j) \in K} x_{ij} \leq |K_0| + \sum_{h=1}^k (|K_h| - 1) - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor =: s(K)$$

Wir nennen Ungleichungen vom Typ (UC1) **C1-Kammgleichungen**.  $s(K)$  heißt die **Größe des C1-Kammes**  $K$ . (Ist  $a$  eine reelle Zahl, so bezeichnen wir mit  $\lfloor a \rfloor$  die kleinste ganze Zahl  $\geq a$  und mit  $\lceil a \rceil$  die größte Zahl  $\leq a$ ). Alle Touren eines Handlungsreisenden erfüllen die Ungleichungen des Typs (UC1), d.h. die C1-Kammgleichungen sind gültige Ungleichungen für das TSP.

**Bemerkung 3.1:** Sei  $\emptyset \neq W \subset V$ , dann ist  $F(W)$  ein C1-Kamm.

**Beweis:** Sei  $i_0 \in W$ , dann definiere  $K_0 = \{i_0\}$ ,  $K_1 = W$ ,  $K = F(W)$ .  $\square$

**Folgerung 3.2:** Die Subtour Elimination Constraints sind C1-Kammgleichungen des Typs (UC1).  $\square$

Da es offensichtlich eine sehr große Anzahl von C1-Kämmen gibt, wollen wir zunächst versuchen, solche C1-Kämme auszusondern, die mit Sicherheit keine Facetten definieren. Ist  $ax \leq a_0$  eine gültige Ungleichung,  $a_{ij} \geq 0$ , und gibt es gültige Ungleichungen  $b^i x \leq b_0^i$   $i = 1, \dots, s$  sowie einen Vektor  $\lambda \in \mathbb{R}^{2n}$  mit

$$a \leq \sum_{i=1}^s b^i + \lambda A, \quad a_0 \geq \sum_{i=1}^s b_0^i + \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i, \quad \text{so heißt } ax \leq a_0 \text{ dominiert.}$$

Dominierte Ungleichungen brauchen offensichtlich bei einer nicht-redundanten Beschreibung eines Polytopen nicht berücksichtigt zu werden.

**Satz 3.3** C1-Kämme mit einer geraden Anzahl von Zinken werden dominiert. Der Beweis von Satz 3.3 ist unmittelbar klar aus der Ableitung der Ungleichung (UC1), da für

$$\text{gerades } k \text{ gilt } \frac{k}{2} = \left\langle \frac{k}{2} \right\rangle. \quad \square$$

Von nun an betrachten wir nur noch C1-Kämme mit einer ungeraden Anzahl von Zinken.

**Satz 3.4** Sei  $(K; K_0, K_1, \dots, K_k)$  ein C1-Kamm und gibt es  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  mit  $K_i \cap K_j \neq \emptyset$ , dann wird die zugehörige Kammungleichung dominiert.

**Beweis:** Sei o.B.d.A.  $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$

a)  $K_1 \cap K_2 \cap K_0 = \emptyset$ . Wir definieren folgenden Kamm

$$(K'; K'_0, K'_3, \dots, K'_k) \text{ mit } K'_0 := K_0 \cup K_1 \cup K_2, \quad K'_i := K_i, \quad i = 3, \dots, k.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in K} x_{ij} &\leq \sum_{(i,j) \in K'} x_{ij} \leq |K'_0| + \sum_{i=3}^k (|K'_i| - 1) + \left\langle \frac{k-2}{2} \right\rangle \\ &= |K_0| + |K_1| + |K_2| - |K_0 \cap K_1| - |K_0 \cap K_2| - |K_1 \cap K_2| \\ &+ \sum_{i=3}^k (|K_i| - 1) + \left\langle \frac{k-2}{2} \right\rangle \leq |K_0| + \sum_{i=1}^k (|K_i| - 1) + \left\langle \frac{k}{2} \right\rangle = s(K) \end{aligned}$$

b)  $i_0 \in K_1 \cap K_2 \cap K_0$ , o.B.d.A.  $i_0 \notin K_i, i=3, \dots, k$ .

Wir definieren  $(K'; K'_0, K'_3, \dots, K'_k)$  durch  $K'_0 = K_0 - \{i_0\}, K'_i = K_i, i=3, \dots, k$ .

Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in K} x_{ij} &\leq \sum_{(i,j) \in K'} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in F(K_1 - \{i_0\})} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in F(K_2 - \{i_0\})} x_{ij} \\ &+ \sum_{i=1}^n (x_{ii_0} + x_{i_0i}) \\ &\leq |K_0| - 1 + \sum_{i=3}^k (|K_i| - 1) + \left\langle \frac{k-2}{2} \right\rangle + |K_1| - 2 + |K_2| - 2 + 2 = s(K) \quad \square \end{aligned}$$

### Bemerkung 3.5

a) Aufgrund der Nebenbedingungen (1), (2) sind auch alle C1-Kämme mit

$$\begin{aligned} K_0 = \{i_0\}, |K_i| = 2 \quad i=2, \dots, k \text{ überflüssig, da } \sum_{(i,j) \in K} x_{ij} &\leq \sum_{j=1}^n (x_{i_0j} + x_{j i_0}) \\ &= 2 = s(K) \text{ gilt.} \end{aligned}$$

b) Offensichtlich werden auch alle C1-Kämme mit  $|K_0| \geq 2$  und nur einer Zinke dominiert. (Beweis analog zu 3.4 Teil b))  $\square$

### b) C2-Ungleichungen

Von den C1-Kämmen leiten wir nun eine neue Klasse von Untergraphen von  $G = (V, E)$ , ab, die uns wiederum für das TSP gültige Ungleichungen liefert. Diese neuen Untergraphen gewinnt man dadurch, daß man zu der Menge  $K_0$  eines C1-Kammes eine Quelle und eine Senke in geeigneter Weise hinzufügt.

*Definition:* Sei  $K_0, K_1, \dots, K_k \subset V$ , für  $i=0, \dots, k > 0; p, q \in V - \bigcup_{i=0}^k K_i$  und gelte

$$|K_i| \geq 2, |K_0 \cap K_i| = 1, i=1, \dots, k. \text{ Sei } K_0^2 = K_0 \cup \{p, q\}$$

und  $K^2 = \bigcup_{i=0}^k F(K_i) \cup \{(p,i) | i \in K_0\} \cup \{(j,q) | j \in K_0\} \cup \{(p,q)\}$ . Dann heißt

$(K^2; K_0^2, K_1, \dots, K_k)$  oder kurz  $K^2$  ein C2-Kamm.  $(K; K_0, K_1, \dots, K_k)$  heißt der zu  $K^2$  gehörige C1-Kamm.

*Beispiel:* Es seien  $K_0 = \{1, 2\}, K_1 = \{1, 3\}, K_2 = \{2, 4, 5\}$  und  $p \neq q$  beliebig, aber verschieden von 1, 2, 3, 4, 5. Dann hat der durch  $K^2$  gelieferte Untergraph von  $G$  folgendes Aussehen:

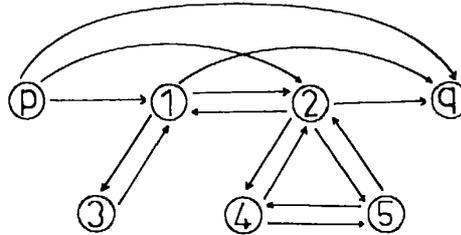


Fig. 2

Für C2-Kämme  $K^2$  gilt folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}
 2 \sum_{(i,j) \in K^2} x_{ij} &= 2 \left( \sum_{(i,j) \in K} x_{ij} + \sum_{i \in K_0} (x_{iq} + x_{pi}) + x_{pq} \right) \\
 &\leq \sum_{i \in K_0} \sum_{j=1}^n (x_{ij} + x_{ji}) + \sum_{h=1}^k \left( \sum_{(i,j) \in F(K_h)} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in F(K_h - K_0)} x_{ij} \right) \\
 &+ \sum_{j=1}^n x_{pj} + \sum_{j=1}^n x_{jp} \leq 2 |K_0| + \sum_{h=1}^k (|K_h| - 1 + |K_h| - 2) + 2 \\
 &= 2 |K_0| + 2 \sum_{h=1}^k (|K_h| - 1) - k + 2
 \end{aligned}$$

Da  $x_{ij}$  ganzzahlig, gilt für jeden C2-Kamm  $K^2$ :

$$(UC2) \quad \sum_{(i,j) \in K^2} x_{ij} \leq |K_0| + \sum_{h=1}^k (|K_h| - 1) - \left\langle \frac{k-2}{2} \right\rangle = s(K) + 1$$

Ungleichungen vom Typ (UC2) werden wir *C2-Kammgleichungen* nennen.

*Bemerkung 3.6:* Offensichtlich lassen sich alle Dominanzüberlegungen für C1-Kämme auf C2-Kämme übertragen.

### c) C3-Ungleichungen

Wir wollen nun mit Hilfe der Ungleichungen (S) und der Gleichungen (1), (2) eine weitere Klasse von Teilgraphen des vollständigen gerichteten Graphen  $G$  bestimmen, die scharfe Ungleichungen für das TSP liefern.

*Definition:* Seien  $i_1, i_2, i_3$  drei beliebige (aber verschiedene) Knoten des vollständigen gerichteten Graphen  $G = (V, E)$  mit  $|V| = n$ . Es seien  $K_1$  und  $K_2$  disjunkte, nicht leere Teilmengen von  $V$  mit  $K_1 \cap \{i_1, i_2, i_3\} = \{i_1\}$  und  $K_2 \cap \{i_1, i_2, i_3\} = \{i_2\}$ . Dann heißt  $K^3 = F(K_1) \cup F(K_2) \cup \{(i_1, j) \mid j \in K_2\} \cup \{(i_2, i_1), (i_3, i_1), (i_3, i_2)\}$  ein *C3-Kamm* von  $G$ .

Beispiel: Sei  $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 2, 3\}$  und  $K_1 = \{1, 4, 5\}, K_2 = \{2, 6, 7, 8\}$ .  
Dann hat der C3-Kamm folgende Form:

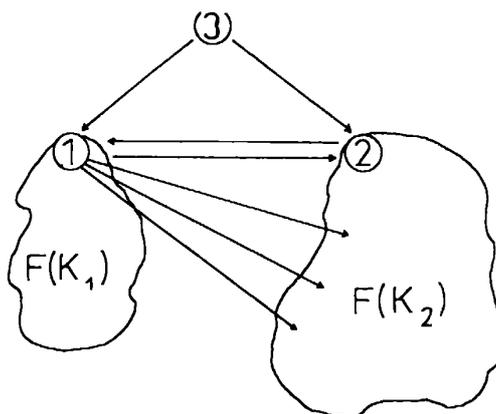


Fig. 3

wobei  $F(K_1)$  und  $F(K_2)$  nur schematisch angegeben sind.

Setzen wir O.B.d.A.  $i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 3$ , dann gilt für jeden C3-Kamm die Ungleichung:

$$\begin{aligned}
 4 \sum_{(i,j) \in K^3} x_{ij} &\leq \left\{ \sum_{j=1}^n x_{1j} + \sum_{j=1}^n x_{j1} + \sum_{j=1}^n x_{2j} + \sum_{j=1}^n x_{j2} + \sum_{j=1}^n x_{3j} \right\} \\
 &+ \sum_{(i,j) \in F(K_1)} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in F(K_2)} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in F(K_1 - \{1\})} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in F(K_2 - \{2\})} x_{ij} \\
 &+ 2 \left( \sum_{j=1}^n x_{1j} + \sum_{j=1}^n x_{j1} + \sum_{j \in K_2} \sum_{i=1}^n x_{ij} + \sum_{(i,j) \in F(K_1 - \{1\})} x_{ij} \right) \\
 &\leq 5 + |K_1| - 1 + |K_2| - 1 + |K_1| - 2 + |K_2| - 2 + 2(2 + |K_2| + |K_1| - 2) \\
 &= 4|K_1| + 4|K_2| - 1
 \end{aligned}$$

Folglich gilt bezüglich des TSP für jeden C3-Kamm die Ungleichung:

$$(UC3) \quad \sum_{(i,j) \in K^3} x_{ij} \leq |K_1| + |K_2| - 1.$$

Ungleichungen des Typs (UC3) werden wir *C3-Kammungleichungen* nennen.

d)  $D_k$ -Ungleichungen

**Definition:** Sei  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq V, 3 \leq k \leq n-1$ ; dann heißt

$$(D_{k-1}) \sum_{j=1}^{k-1} x_{i_j i_{j+1}} + x_{i_k i_1} + 2 \sum_{j=2}^{k-1} x_{i_j i_1} + \sum_{j=3}^{k-1} \sum_{h=2}^{j-1} x_{i_j i_h} \leq k-1$$

eine  $D_{k-1}$ -Ungleichung.

**Beispiel:** Für  $k = 3, 4, 5$  erhalten wir folgende Teilgraphen des vollständigen gerichteten Graphen, deren Kantenmengen  $D_{k-1}$ -Ungleichungen definieren. (Dabei haben wir doppelt (also mit zwei) bewertete Kanten jeweils doppelt gezeichnet):

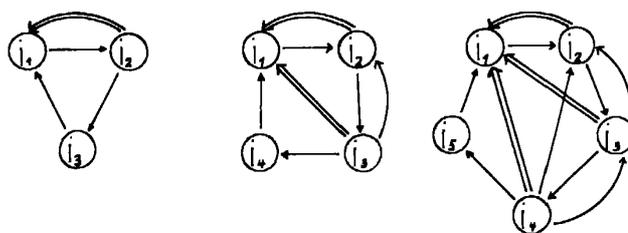


Fig. 4

**Bemerkung 3.7:** Jede  $D_2$ -Ungleichung ist äquivalent zu einer  $C_2$ -Ungleichung mit  $k = 1, |K_0| = 1$  und  $|K_1| = n - 2$  (und umgekehrt).

**Beweis:** Wir können annehmen, daß die  $D_2$ -Ungleichungen die folgende Indizierung aufweist:

$$x_{12} + 2x_{21} + x_{23} + x_{31} \leq 2$$

Wegen  $x_{12} = 1 - \sum_{j=3}^n x_{1j}$  und  $x_{21} = 1 - \sum_{j=3}^n x_{2j}$  erhalten wir

$$x_{21} + x_{23} + x_{31} \leq \sum_{j=3}^n (x_{1j} + x_{2j}),$$

und folglich wegen  $x_{1j} + x_{2j} = 1 - \sum_{k=3}^n x_{kj}$   $x_{21} + x_{23} + x_{31} + \sum_{j=3}^n \sum_{k=3}^n x_{kj} \leq n - 2$ .

Letztere Ungleichung ist aber von der behaupteten Form. Die Umkehrung ist offensichtlich ebenfalls richtig.  $\square$

**Bemerkung 3.8:** Jede  $D_3$ -Ungleichung ist äquivalent zu einer  $C_3$ -Ungleichung mit  $|K_1| = 2$  und  $|K_2| = n - 3$  (und umgekehrt).

**Beweis:** Wir können annehmen, daß die  $D_3$ -Ungleichung die folgende Indizierung aufweist:

$$x_{12} + 2x_{21} + x_{23} + 2x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{41} \leq 3.$$

Wegen  $x_{21} + x_{23} = 1 - \sum_{j=4}^n x_{2j}$  und  $x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1 - \sum_{j=5}^n x_{3j}$

erhalten wir

$$x_{12} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 1 + \sum_{j=4}^n x_{2j} + \sum_{j=5}^n x_{3j}.$$

Da  $x_{2j} + x_{3j} = 1 - x_{1j} - \sum_{k=4}^n x_{kj}$  und  $x_{24} = 1 - x_{14} - x_{34} - \sum_{k=5}^n x_{k4}$ ,

folgt daraus

$$x_{12} + \sum_{k=4}^n x_{1k} + x_{21} + x_{31} + x_{34} + x_{41} + \sum_{k=4}^n \sum_{j=4}^n x_{kj} \leq n - 2.$$

Letztere Ungleichung ist aber von der behaupteten Form. Die Umkehrung folgt ebenso.  $\square$

**Satz 3.9:** Für  $2 \leq k \leq n - 2$  sind  $D_k$ -Ungleichungen gültige Ungleichungen für das TSP.

**Beweis:** Wegen Bemerkung 3.7 und 3.8 gilt die Aussage für  $k = 2$  und  $k = 3$ . Wir zeigen nun: Ist  $3 \leq k \leq n - 2$  und sind die  $D_{k-1}$ -Ungleichungen gültig, so sind auch die  $D_k$ -Ungleichungen gültig für das TSP. O.B.d.A. sei die  $D_k$ -Ungleichung gegeben durch

$$U_k(x) = \sum_{j=1}^k x_{j,j+1} + x_{k+1,1} + 2 \sum_{j=2}^k x_{j1} + \sum_{j=3}^k \sum_{h=2}^{j-1} x_{jh} \leq k$$

Wir nehmen an, daß die  $D_{k-1}$ -Ungleichung

$$U_{k-1}(x) = \sum_{j=1}^{k-1} x_{j,j+1} + x_{k1} + 2 \sum_{j=2}^{k-1} x_{j1} + \sum_{j=3}^{k-1} \sum_{h=2}^{j-1} x_{jh} \leq k - 1$$

gültig ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 2 U_k(x) &\leq \sum_{(i,j) \in F(\{1, 2, \dots, k+1\})} x_{ij} + \sum_{j=1}^{k+1} x_{kj} + \sum_{j=2}^{k+1} x_{j1} + U_{k-1}(x) \\ &\leq k + 1 + 1 + k - 1 = 2k + 1 \end{aligned}$$

Aufgrund der Ganzzahligkeit der  $x_{ij}$  folgt somit  $U_k(x) \leq k$ .  $\square$

f-

Wir geben noch eine weitere Ungleichung für das TSP an, zu deren Ableitung ähnliche kombinatorische Überlegungen geführt haben wie im Falle der  $D_k$ -Ungleichungen. Wie wir im Abschnitt 5 zeigen werden, ist die folgende Ungleichung, die sich auf verschiedene Arten verallgemeinern läßt, eine scharfe Ungleichung für das TSP.

*Definition:* Sei  $\{i_1, i_2, i_3, i_4\} \subseteq V$ ; dann heißt

$$(E_3) \quad 2x_{i_1 i_2} + x_{i_1 i_4} + 2x_{i_2 i_1} + x_{i_2 i_3} + x_{i_3 i_1} + x_{i_4 i_2} \leq 3$$

eine  $E_3$ -Ungleichung.

*Satz 3.10:*  $E_3$ -Ungleichungen sind gültige Ungleichungen für das TSP.

*Beweis:* O.B.d.A. sei  $i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 3, i_4 = 4$ , dann gilt

$$\begin{aligned} 2U(x) &= 2(2x_{12} + x_{14} + 2x_{21} + x_{23} + x_{31} + x_{42}) \\ &\leq \sum_{(i,j) \in F(\{1, 2, 3, 4\})} x_{ij} + (2x_{12} + x_{14} + x_{21} + x_{42}) + \\ &\quad + (x_{12} + 2x_{21} + x_{23} + x_{31}) \leq 3 + 2 + 2 = 7 \end{aligned}$$

Aufgrund der Ganzzahligkeit der  $x_{ij}$  folgt  $U(x) \leq 3$ .  $\square$

#### 4. Die Dimension von $P_T^n$

Für  $n = 1, 2$  ist das TSP offensichtlich uninteressant; es sei also im weiteren  $n \geq 3$ . Bekanntlich hat die Matrix  $A$  des Zuordnungsproblems den Rang  $2n - 1$ . Daraus folgt, daß  $P_A^n$  der Durchschnitt eines affinen Unterraumes der Dimension  $n^2 - 2n + 1$  und des positiven Orthanten ist. Der Vektor  $x$  mit  $x_{ij} = \frac{1}{n}, 1 \leq i, j \leq n$ , ist strikt positiv und in  $P_A^n$  enthalten, daraus ergibt sich unmittelbar  $\dim P_A^n = n^2 - 2n + 1$ . Damit ein Vektor  $x \in \mathbb{R}^{n^2}$  eine Tour eines Handlungsreisenden repräsentiert, muß  $x_{ii} = 0$  für  $i = 1, \dots, n$  gelten, d.h.  $P_T^n \subset P_A^n \cap \{x \in \mathbb{R}^{n^2} \mid x_{ii} = 0, i = 1, \dots, n\}$ . Die Gleichung  $Ax = e$  zusammen mit  $x_{ii} = 0, i = 1, \dots, n$ , liefert uns ein Gleichungssystem  $Mx = b$ . Man sieht sofort, daß der Rang von  $M$  gleich  $3n - 1$  ist, und erhält daraus  $\dim P_T^n \leq \dim \text{Kern } M = n^2 - 3n + 1$ .

*Satz 4.1:*  $\dim P_T^n = n^2 - 3n + 1 = n(n - 3) + 1 =: d_n, n \geq 3$ .

*Beweis:* Sei  $n \geq 7$ . Zu zeigen ist nur noch:  $\dim P_T^n \geq d_n$ . Wenn wir  $d_n + 1$  affin unabhängige Touren angeben können, ist damit die Behauptung des Satzes bewiesen. Der Beweis verläuft wie folgt: Aus der Menge aller Touren wählen wir  $d_n + 1$  Touren aus, stellen diese als Vektoren des  $\mathbb{R}^{n^2}$  dar und fassen sie zu einer  $(d_n + 1, n^2)$ -Matrix  $M_0$

zusammen. Wir zeigen, daß  $M_0$  eine reguläre  $(d_n + 1, d_n + 1)$ -Untermatrix  $N_0$  enthält, woraus folgt, daß der Rang von  $M_0$  gleich  $d_n + 1$  ist, also die ausgewählten Touren linear (damit auch affin) unabhängig sind. Zur Auswahl der Touren geben wir ein Verfahren an, das wir *Ringschiftverfahren* nennen wollen; dabei merken wir uns zu jeder konstruierten Tour auch einen Spaltenindex  $(i, j)$  (wir erinnern daran, daß die Spaltenindizes gerade die Tupel  $(i, j)$   $1 \leq i, j \leq n$  sind), der uns zur Konstruktion der Untermatrix  $N_0$  von  $M_0$  dienen wird.

a) Ringschiftverfahren:

Wir schreiben wie üblich Touren als zyklische Permutationen  $\pi = \langle i_1, i_2, \dots, i_n \rangle$ .

*Schritt 1:* Wir beginnen mit einer beliebigen Tour  $\langle i_1, i_2, i_3, \dots, i_n \rangle$  und merken uns den Spaltenindex  $(i_1, i_2)$ . Das Verfahren besteht nun darin, daß das an der Position 1 stehende Element  $i_1$  festgehalten wird und die an den Positionen  $2, \dots, n$  stehenden Elemente zyklisch vertauscht werden, d.h. das Element, das an Position 2 steht, rückt an die Position  $n$ , alle anderen Elemente (außer  $i_1$ ) rücken um eine Position vor. Wir merken uns dabei jeweils die Spaltenindizes  $(i_1, i_j), j = 2, \dots, n$ . Auf diese Weise erhalten wir die folgenden  $n - 1$  Touren bzw. Spalten:

$$\begin{array}{ll} \langle i_1, i_2, i_3, \dots, i_n \rangle & (i_1, i_2) \\ \langle i_1, i_3, i_4, \dots, i_n, i_2 \rangle & (i_1, i_3) \\ \vdots & \vdots \\ \langle i_1, i_n, i_2, i_3, \dots, i_{n-1} \rangle & (i_1, i_n) \end{array}$$

*Schritt 2:* Beginnend mit  $\langle i_1, i_j, i_{j+1}, \dots, i_n, i_2, \dots, i_{j-1} \rangle, j = 2, \dots, n$ , erzeugen wir jeweils  $n - 3$  neue Touren dadurch, daß wir die Elemente an den Positionen 1 und 2 also  $i_1, i_j$  festhalten und die restlichen  $n - 2$  Elemente zyklisch vertauschen. Als Spaltenindex der zu konstruierenden Matrix  $N_0$  merken wir uns jeweils das Paar  $(i_j, i_k)$ ,  $k \in \{2, \dots, n\} - \{j, j + 1\}$ , bzw.  $k \in \{3, \dots, n - 1\}$  für  $j = n$ . Auf diese Weise erhalten wir  $(n - 1) \cdot (n - 3)$  Touren und Spalten der folgenden Form:

$$\begin{array}{ll} \langle i_1, i_j, i_{j+2}, i_{j+3}, \dots, i_n, i_2, \dots, i_{j-1}, i_{j+1} \rangle & (i_j, i_{j+2}) \\ \langle i_1, i_j, i_{j+3}, \dots, i_n, i_2, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, i_{j+2} \rangle & (i_j, i_{j+3}) \\ \vdots & \vdots \\ \langle i_1, i_j, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_n, i_2, \dots, i_{j-2} \rangle & (i_j, i_{j-1}) \end{array}$$

b) Insgesamt haben wir somit  $n - 1 + (n - 1)(n - 3) = d_n + 1$  Touren und Spalten angegeben. Wir listen nun die Touren in der Reihenfolge ihrer Konstruktion untereinander auf und erhalten die Matrix  $M_0$ . Wir streichen alle Spalten  $(i, i), i = 1, \dots, n$ , sowie die Spalten  $(i_j, i_{j+1}), (i_j, i_1), j = 2, \dots, n - 1$ , und Spalten  $(i_n, i_1), (i_n, i_2)$ . Es ver-

bleiben  $d_n + 1$  Spalten. Diese ordnen wir so um, daß der zur  $k$ -ten Tour gehörige Spaltenindex die  $k$ -te Spalte bezeichnet. Wir nehmen nun noch eine Änderung vor und zwar tauschen wir die Tour  $(i_1, i_n, i_3, i_4, \dots, i_{n-1}, i_2)$  gegen die Tour  $(i_1, i_2, i_4, i_5, \dots, i_{n-3}, i_{n-1}, i_{n-2}, i_n, i_3)$  aus. Die zu dieser Tour gehörige Spalte  $(i_n, i_3)$  wird nicht ausgewechselt. Mit  $N_0$  bezeichnen wir die auf diese Weise erhaltene Matrix. Die neue Tour wollen wir Ausnahmetour nennen. Die Ausnahmetour kommt unter den in Schritt 1 und 2 konstruierten Touren offensichtlich nicht vor und existiert erst für  $n \geq 7$ .

c) Die Matrix  $N_0$  hat nach Konstruktion folgendes Aussehen:

- i) Alle Hauptdiagonalelemente sind 1, da zur  $k$ -ten Tour  $\pi$  ( $k$ -te Zeile) der  $k$ -te Spaltenindex  $(i, j)$  gehört und dieser gerade so gewählt wurde, daß  $\pi$ , als Vektor geschrieben, in der Komponente  $(i, j)$  eine 1 enthält.
- ii) Die ersten  $n - 1$  Zeilen, das sind die Touren, die im Schritt 1 konstruiert werden, enthalten jeweils nur ein Einselement (und zwar auf der Hauptdiagonalen von  $N_0$ ). Das liegt daran, daß die Spalten  $(i, j)$ , in denen diese Touren Einselemente enthalten, beim Übergang von  $M_0$  zu  $N_0$  gestrichen wurden.
- iii) Nur die Spalten  $(i_j, i_{j+2}), j = 2, \dots, n - 2,$

$$(i_1, i_j), \quad j = 2, \dots, n,$$

$$(i_{n-1}, i_2), (i_{n-1}, i_{n-2}), (i_n, i_3)$$

enthalten nach Konstruktion mehr als ein Einselement. Alle anderen Spalten enthalten genau eine 1 (auf der Hauptdiagonalen).

d) Wir zeigen nun, daß die Determinante von  $N_0$  von Null verschieden ist. Zunächst können wir aufgrund des Determinantenentwicklungssatzes und der Überlegungen in Teil c) alle Spalten und Zeilen streichen, bis auf die Spalten

$$(i_j, i_{j+2}), j = 2, \dots, n - 2 \text{ sowie } (i_{n-1}, i_2), (i_{n-1}, i_{n-2}), (i_n, i_3)$$

und die dazugehörigen Zeilen. Es bleibt eine  $(n, n)$ -Matrix  $L_0$  übrig, die dieselbe Determinante wie  $N_0$  hat.  $L_0$  sieht nach Konstruktion wie folgt aus:

$$L_0 = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$$

wobei  $P$  die  $(n - 5, n - 5)$ -Bandmatrix mit Einsen auf der Hauptdiagonalen, Einsen auf der unteren Nebendiagonalen und Nullen sonst ist;  $Q$  eine  $(n - 5, 5)$ -Matrix mit einer Eins auf der Position  $(1, 5)$  und Nullen sonst;  $R$  eine  $(5, n - 5)$ -Matrix mit einer Eins auf den Positionen  $(1, n - 5)$  und  $(5, 1)$ , Nullen sonst; und schließlich  $S$  eine  $(5, 5)$ -Matrix der Form

$$S = \begin{pmatrix} 10000 \\ 11000 \\ 01100 \\ 01010 \\ 11011 \end{pmatrix}$$

Da  $|P| = 1$ , folgt für die Determinante von  $L_0$ :

$$|L_0| = \begin{vmatrix} PQ \\ RS \end{vmatrix} = |P| \cdot |S - RP^{-1}Q| = |S - RP^{-1}Q|.$$

Setzen wir  $\delta = (-1)^n$ , so folgt, da die Inverse  $P^{-1}$  explizit berechnet werden kann, daß

$$|S - RP^{-1}Q| = \begin{vmatrix} 1000\delta \\ 11000 \\ 01100 \\ 01010 \\ 11012 \end{vmatrix} = 2 - \delta \geq 1,$$

und damit, daß die wie oben konstruierten Ringschiffs unter Hinzunahme der Ausnahmetour  $d_n + 1$  linear unabhängige Touren liefern. Zum Abschluß des Beweises des Satzes 4.1 fehlt noch die Betrachtung der Fälle  $n = 3, 4, 5, 6$ : Falls  $n = 3$ , gibt es nur zwei Touren. Falls  $n = 4$ , gibt es 6 Touren, diese sind alle voneinander linear unabhängig. Falls  $n = 5$ , konstruieren wir alle Touren wie im obigen Beweis und tauschen die Tour  $\langle i_1, i_5, i_3, i_4, i_2 \rangle$  gegen  $\langle i_1, i_5, i_3, i_2, i_4 \rangle$  aus. Falls  $n = 6$ , wählen wir alle im obigen Beweis konstruierten Ringschiffs und tauschen nicht aus. Die lineare Unabhängigkeit dieser Touren zeigt man durch einfaches Ausrechnen. Damit ist der Satz 4.1 für alle  $n \geq 3$  bewiesen.  $\square$

*Bemerkung 4.2:* Wie es sich im Fall  $n = 4, 6$  bereits andeutet, ist die Hinzunahme der Ausnahmetour für gerades  $n$  nicht nötig. Es ist schon die allein durch Ringschiffs konstruierte Matrix  $N_0$  regulär, was sich auch einfacher als im obigen Beweis zeigen läßt. Im Falle „ $n$  ungerade“ muß diese Austauschprozedur durchgeführt werden, die den Beweis etwas weniger durchsichtig macht, aber dafür in allen Fällen das gewünschte Ergebnis liefert. Der Beweis von Satz 4.1 zeigt, daß man nun mit jeder beliebigen Tour  $\pi$  beginnend mit Hilfe des Ringschiffverfahrens  $d_n + 1$  linear unabhängige Touren konstruieren kann. Im weiteren werden wir dieses Konstruktionsverfahren häufig anwenden und einfach sagen: Wir konstruieren die zu  $\pi$  gehörigen  $d_n + 1$  linear unabhängigen Touren oder die zu  $\pi$  gehörigen  $d_n + 1$  Ringschiffs. Dabei soll natürlich auch die Ausnahmetour eingeschlossen sein. Benötigen wir nur die in Schritt 1 des Ringschiffverfahrens konstruierten Touren, so nennen wir diese  $n - 1$  Touren die zu  $\pi$  gehörenden Ringschiffs des Typs 1.  $\square$

*Bemerkung 4.3:* Aus historischen Gründen und der Vollständigkeit halber sei noch angedeutet, daß die Behauptung des Satzes 4.1 erstmals von Heller [1953] und Kuhn [1955] aufgestellt worden ist.

Bei diesen Veröffentlichungen handelt es sich jedoch um sehr kurze Abstracts, die keinerlei Beweise oder Beweisideen enthalten und von deren Existenz wir erst nach Fertigstellung dieser Arbeit im Verlaufe einer intensiven Literatursuche erfahren haben.  $\square$

## 5. Facetten des Travelling Salesman Polytopen

In diesem Abschnitt geht es darum, Aussagen über die lineare Struktur von  $P_T^n$  zu machen, d.h. Ungleichungen zu finden, die Facetten von  $P_T^n$  definieren. Eine *Facette* eines Polytopen  $P$  ist eine Teilmenge  $F \subset P$  mit folgender Eigenschaft: Es existiert eine gültige Ungleichung  $ax \leq b$  für  $P$  mit  $F = \{x : ax = b\} \cap P$  und  $\dim F = \dim P - 1$ . Häufig werden wir auch eine Ungleichung  $ax \leq b$  mit obiger Eigenschaft Facette nennen.

Die Beweise in diesem Abschnitt sind konstruktiv und verlaufen wie folgt: Gegeben sei eine für das TSP gültige Ungleichung  $ax \leq b$ . Dann ist zu zeigen:

(i)  $P_T^n \cap \{x \mid ax = b\}$  enthält  $d_n$  linear (also affin) unabhängige Touren, und (ii) es gibt eine Tour  $x_0 \in P_T^n$  mit  $ax_0 < b$ .

Im weiteren werden wir Ungleichungen immer mit einem Großbuchstaben und einem Index (natürliche Zahl) bezeichnen. Der Großbuchstabe repräsentiert die Klasse, aus der die Ungleichung stammt, der Index  $i$  gibt die rechte Seite der Ungleichung an. Durch dieses Bezeichnungsverfahren ist eine Ungleichung – bis auf Vertauschen der Städte – eindeutig definiert.

### a) Subtour-Elimination Constraints

Zunächst wollen wir die Subtour Elimination Constraints untersuchen; ist

$\emptyset \neq W \subset V$ , so sind diese von der Form

$$(S) \quad \sum_{(i,j) \in F(W)} x_{ij} \leq |W| - 1$$

Wir bezeichnen die Ungleichungen (S), die Kurzzyklen mit  $k + 1$  Städten eliminieren, mit  $S_k$ .

**Satz 5.1:** Ungleichungen des Typs  $S_1$  liefern im  $n$ -Städte Problem,  $n \geq 5$ , Facetten von  $P_T^n$ .

*Beweis:* Wir betrachten o.B.d.A. die Ungleichung  $x_{12} + x_{21} \leq 1$ . Es gibt zwei Typen A und B von Permutationen, für die in dieser Ungleichung Gleichheit gilt: Typ A ist durch  $\langle 1, 2, \alpha \rangle$  und Typ B durch  $\langle 1, \alpha, 2 \rangle$  gegeben, wobei  $\alpha$  eine beliebige Permutation der Zahlen  $3, 4, \dots, n$  ist. Aus Typ A erzeugen wir die zu  $\langle 2, 3, 4, \dots, n \rangle$  gehörigen linear unabhängigen Ringschiffs  $\pi$ . Dann sind auch die Touren  $\langle 1, \pi \rangle$  linear unabhängig. Von diesen Touren gibt es  $(n-1)(n-4) + 2 = n^2 - 5n + 6$ . Wie in Satz 4.1 haben wir uns zu jeder Tour einen Spaltenindex gemerkt, der uns ebenfalls wie in Satz 4.1 zur Konstruktion einer regulären  $(d_n, d_n)$ -Untermatrix der Matrix der Touren verhilfen soll. Wir müssen nun noch weitere  $2n - 5$  Touren und Spalten auswählen. Aus Typ B erzeugen wir zunächst  $n - 3$  Touren der Form  $\langle \pi, n, 2 \rangle$ , indem wir die Ringschiffs des Typs 1 von  $\langle 1, 3, 4, \dots, n-1 \rangle$  bilden und uns die Spaltenindizes  $(1, j)$  für  $j = 3, \dots, n-1$  merken. Ferner erzeugen wir aus Typ B  $n - 4$  Touren, indem wir ausgehend von der Tour  $\langle 1, 4, 5, \dots, n, 3, 2 \rangle$  die Ringschiffs des Typs 1 von  $\langle 1, 4, 5, \dots, n, 3 \rangle$  bilden. Von den zugehörigen Touren merken wir uns die Spaltenindizes  $(j, 2)$  für  $j = 3, 4, \dots, n-2$ . Zu den so ausgewählten  $2n - 7$  fügen wir zwei wei-

tere Touren hinzu, und zwar die Tour  $\langle 1, 3, n, 4, 5, 6, \dots, n-2, n-1, 2 \rangle$  mit Spaltenindex  $(n-1, 2)$ , sowie die Tour  $\langle 1, n, 3, 4, \dots, n-2, n-1, 2 \rangle$  mit Spaltenindex  $(1, n)$ . Damit haben wir insgesamt eine  $(d_n, d_n)$ -Untermatrix der Matrix aller Touren vom Typ A und B gefunden. Sie hat folgendes Aussehen:

$$M = \begin{pmatrix} N_0 & 0 \\ * & N_1 \end{pmatrix},$$

wobei  $N_0$  durch die Ringschiftkonstruktion von Satz 4.1 gewonnen worden, also regulär ist. Keine dieser Ringschiftpermutationen  $\langle 1, 2, \alpha \rangle$  besitzt einen von Null verschiedenen Wert in den Komponenten  $(1, i), i = 3, \dots, n$  und  $(i, 2), i = 3, \dots, n-1$ , also ist der rechte obere Block eine Nullmatrix.  $N_1$  hat nach Konstruktion 1-Elemente auf der Hauptdiagonalen und Nullen oberhalb der Hauptdiagonale. Ferner ist der mit \* bezeichnete Teil der Matrix  $M$  mit Nullen und Einsen besetzt, die uns nicht weiter interessieren. Da  $|M| = |N_0| |N_1| \neq 0$ ; und da ferner für  $\langle 1, 3, 2, 4, 5, \dots, n \rangle$  die Ungleichung  $x_{12} + x_{21} \leq 1$  mit strikter Ungleichheit erfüllt ist, liefern die Ungleichungen  $(S_1)$  Facetten von  $P_7^n$ .  $\square$

**Satz 5.2:**  $S_2$ -Ungleichungen liefern für  $n \geq 5$  Facetten von  $P_7^n$ .

*Beweis:* Wir betrachten o.B.d.A. die Ungleichung  $x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{23} + x_{31} + x_{32} \leq 2$ . Für folgende Typen von Touren gilt in dieser Ungleichung Gleichheit:

$$\begin{aligned} \text{A: } & \langle 1, 2, 3, \alpha \rangle, \quad \text{B: } \langle 1, 3, 2, \alpha \rangle, \quad \text{C: } \langle 1, 2, \alpha, 3 \rangle, \\ \text{D: } & \langle 1, 3, \alpha, 2 \rangle, \quad \text{E: } \langle 1, \alpha, 2, 3 \rangle, \quad \text{F: } \langle 1, \alpha, 3, 2 \rangle, \end{aligned}$$

wobei  $\alpha$  eine beliebige Permutation der Zahlen  $4, 5, \dots, n$  ist. Aus *Typ A* konstruieren wir gemäß dem Ringschiftverfahren des Satzes 4.1 alle linear unabhängigen Ringschifts zu  $\langle 3, 4, 5, \dots, n \rangle$  und erhalten so  $(n-2)(n-5) + 2 = n^2 - 7n + 12$  Touren des Typs  $\langle 1, 2, 3, n \rangle$ . Aus *Typ B* konstruieren wir  $n-3$  Touren, indem wir ausgehend von der Tour  $\langle 1, 3, 2, 4, 5, \dots, n \rangle$  die Ringschifts des Typs 1 zu  $\langle 2, 4, 5, \dots, n \rangle$  bilden und uns die Spaltenindizes  $(2, j)$  für  $j = 4, \dots, n$  merken. Aus *Typ C* konstruieren wir entsprechend  $n-3$  Touren ausgehend von  $\langle 1, 2, 5, 6, \dots, n, 4, 3 \rangle$  durch die Ringschifts des Typs 1 zu  $\langle 2, 5, 6, \dots, n, 4 \rangle$  und merken uns die Spaltenindizes  $(j, 3)$  für  $j = 4, \dots, n$ . Dasselbe Verfahren wird auf die Touren vom Typ D und E angewandt: Aus dem *Typ D* erhält man ausgehend von der Tour  $\langle 1, 3, 5, 6, \dots, n, 4, 2 \rangle$  mittels der Ringschifts des Typs 1 zu  $\langle 3, 5, 6, \dots, n, 4 \rangle$   $n-3$  Touren und die Spaltenindizes  $(j, 2)$  für  $j = 4, \dots, n$ ; sowie aus dem *Typ E* ausgehend von der Tour  $\langle 1, 4, 5, 6, \dots, n, 2, 3 \rangle$  mittels der Ringschifts des Typs 1 zu  $\langle 1, 4, 5, 6, \dots, n \rangle$  ebenfalls  $n-3$  Touren und die Spaltenindizes  $(1, j)$  für  $j = 4, \dots, n$ . Damit haben wir insgesamt  $d_n - 1$  Touren aus den fünf ersten Typen von Touren, die die obige  $S_2$ -Ungleichung mit Gleichheit erfüllen. Wählen wir aus dem *Typ F* die Tour

l-  
ex  
n

$(1, 4, 5, 6, \dots, n, 3, 2)$  und den Spaltenindex  $(3, 2)$ , so erhalten wir eine  $(d_n, d_n)$ -Matrix  $M$  der folgenden Struktur:

$$M = \begin{pmatrix} N_0 & 0 \\ * & N_1 \end{pmatrix}$$

wobei  $N_0$  die Ringschiftmatrix aus Satz 4.1, also regulär ist. Keine der Permutationen von Typ A hat in den unter B, ..., F ausgewählten Komponenten einen von Null verschiedenen Wert. Also ist der rechte obere Block eine Nullmatrix.

gu-  
ie-  
lso  
uf  
be-  
er-  
er-  
i-

Die Matrix  $N_1$  hat folgendes Aussehen:

ie-

e-  
g-  
ren  
nd  
lden  
wir

	24	25	...	2n	43	53	...	n3	42	52	...	n2	14	15	...	1n	32
13245 ... n	1																1
13256 ... n5		1															1
.			.														.
.				.													.
132n56 ... n-1					1												1
1256 ... n43		1				1											
1267 ... n453			1				1										
.				.				.									
1245 ... n-1n3	1								1								
1356 ... n42										1							
1367 ... n452											1						
.												.					
.													.				
1345 ... n-1n2														1			
1456 ... n23														1	1		
156 ... n423									1							1	
.										.							.
.											.						.
1n45 ... n-123													1				1
1456 ... n32									1					1			1

Durch Entwickeln nach Zeilen und Spalten folgt, daß

$$|N_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

und somit, daß

$$|M| = |N_0| |N_1| \neq 0.$$

wir  
Jn-

Schließlich gilt für die Tour  $\langle 1, 4, 3, 5, 2, 6, 7, \dots, n \rangle$  in der obigen  $S_2$ -Ungleichung strikte Ungleichung.  $\square$

*Vermutung 1:* Alle Subtour Elimination Constraints liefern Facetten von  $P_T^n$  für  $n \geq 5$ .

#### b) C2-Kämme

Wir zeigen nun, daß ein Teil der C2-Kämme Facetten liefert.

*Definition:* Ein C2-Kamm  $(K^2; K_0^2, K_1, \dots, K_k)$  heißt *Traube*, falls  $k = 1$  und  $|K_0| = 1$ .

Wir bezeichnen Traubenungleichungen mit  $T_i$ , wobei der Index  $i$  wiederum die Größe der rechten Seite angibt. Z.B. ist  $T_2$  die Ungleichung

$$x_{i_1 i_2} + x_{i_1 i_3} + x_{i_2 i_3} + x_{i_2 i_4} + x_{i_4 i_2} \leq 2.$$

*Satz 5.3:* Im  $n$ -Städte Problem,  $n \geq 4$ , liefern  $T_{n-2}$ -Traubenungleichungen Facetten von  $P_T^n$ .

*Beweis:* Wir wählen o.B.d.A. die folgende  $T_{n-2}$ -Ungleichung:

$$x_{12} + x_{13} + x_{32} + \sum_{(i,j) \in F(V - \{1,2\})} x_{ij} \leq n - 2.$$

Diese Ungleichung wird von  $\langle 1, 4, 2, 3, 5, 6, \dots, n \rangle$  mit strikter Ungleichheit und von folgenden Typen von Touren mit Gleichheit erfüllt:

$$A: \langle 1, 2, \alpha \rangle, \quad B: \langle 1, 3, 2, \beta \rangle, \quad C: \langle 1, 3, \beta, 2 \rangle, \quad D: \langle 1, \beta, 3, 2 \rangle,$$

wobei  $\alpha$  eine beliebige Permutation der Zahlen  $3, 4, \dots, n$  und  $\beta$  eine beliebige Permutation der Zahlen  $4, 5, \dots, n$  ist.

Aus *Typ A* konstruieren wir wie üblich alle linear unabhängigen Ringschiffs zu  $\langle 2, 3, 4, \dots, n \rangle$ , die  $(n-1)(n-4) + 2 = n^2 - 5n + 6$  linear unabhängige Touren  $\langle 1, 2, \pi \rangle$  ergeben. Ebenso merken wir uns die vom Ringschiffverfahren mitgelieferten Spaltenindizes. Vom *Typ B* wählen wir nur eine Tour und eine Spalte, nämlich die Tour  $\langle 1, 3, 2, 4, 5, \dots, n \rangle$  und die Spalte  $(1, 3)$ . Vom *Typ C* konstruieren wir ausgehend von der Tour  $\langle 1, 3, 5, 6, \dots, n, 4, 2 \rangle$   $n-3$  Touren mittels der Ringschiffs des Typs 1 zu  $\langle 3, 5, 6, \dots, n, 4 \rangle$  und merken uns die Spaltenindizes  $(j, 2)$  für  $j = 4, 5, \dots, n$ . Ebenso verfahren wir mit den Touren vom *Typ D*: Ausgehend von  $\langle 1, 4, 5, \dots, n, 3, 2 \rangle$  erzeugen wir  $n-3$  Touren mittels der Ringschiffs des Typs 1 zu  $\langle 1, 4, 5, \dots, n \rangle$  und merken uns die Spaltenindizes  $(1, j)$  für  $j = 4, 5, \dots, n$ . Somit haben wir  $n^2 - 5n + 6 + 2n - 6 + 1 = d_n$  Touren und Spalten ausgewählt. Keine der Touren vom Typ A enthält in einer der unter B, C und D ausgewählten Spalte ein von Null verschiedenes Element. Es ergibt sich folgende Matrix.

$$M = \begin{pmatrix} N_0 & 0 \\ * & N_1 \end{pmatrix}$$

$N_0$  ist wiederum regulär,  $N_1$  enthält 1-Elemente auf der Hauptdiagonalen und Nullen oberhalb der Hauptdiagonalen, daraus folgt  $|N_0| \neq 0, |N_1| \neq 0$  also  $|M| = |N_0| |N_1| \neq 0$ .  $\square$

*Beispiel:* Es sei  $n = 5$  und die folgende  $T_{n-2}$ -Ungleichung gegeben:

$$x_{12} + x_{13} + x_{32} + x_{34} + x_{35} + x_{43} + x_{45} + x_{53} + x_{54} \leq 3.$$

Dann werden durch das Konstruktionsverfahren des Beweises des Satzes 5.6 folgende Touren und die folgende Matrix  $M$  geliefert:

- Typ A:  $\langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle (2, 3)$     Typ B:  $\langle 1, 3, 2, 4, 5 \rangle (1, 3)$   
 $\langle 1, 2, 4, 5, 3 \rangle (2, 4)$   
 $\langle 1, 2, 5, 3, 4 \rangle (2, 5)$     Typ C:  $\langle 1, 3, 5, 4, 2 \rangle (4, 2)$   
 $\langle 1, 2, 3, 5, 4 \rangle (3, 5)$      $\langle 1, 3, 4, 5, 2 \rangle (5, 2)$   
 $\langle 1, 2, 4, 3, 5 \rangle (4, 3)$     Typ D:  $\langle 1, 4, 5, 3, 2 \rangle (1, 4)$   
 $\langle 1, 2, 5, 4, 3 \rangle (5, 4)$      $\langle 1, 5, 4, 3, 2 \rangle (1, 5)$

$$M = \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ 1 & & 1 & 1 & \\ & 1 & & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 \end{array} & \\ \hline \begin{array}{ccccc} & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \\ & & & 1 & 1 & & 1 \end{array} & \\ \hline \end{array}$$

*Bemerkung 5.4:* Aufgrund der in Bemerkung 3.7 gezeigten Äquivalenz von  $T_{n-2}$ -Ungleichung und  $D_2$ -Ungleichung folgt, daß jede  $D_2$ -Ungleichung eine Facette definiert. Wir bemerken, daß  $D_2$ -Ungleichungen wesentlich weniger von Null verschiedene Koeffizienten aufweisen als die äquivalenten  $T_{n-2}$ -Ungleichungen.  $\square$

*Satz 5.5:*  $T_2$ -Ungleichungen liefern für  $n \geq 6$  Facetten von  $P_T^n$ .

**Beweis:** O.B.d.A. zeigen wir die Behauptung für die Ungleichung:

$x_{12} + x_{13} + x_{23} + x_{24} + x_{42} \leq 2$ .  $\langle 1, 4, 3, 2, 5, \dots, n \rangle$  erfüllt diese Ungleichung mit Ungleichheit und folgende Typen von Touren erfüllen diese mit Gleichheit:

$$\begin{aligned} \text{A: } & \langle 1, 2, 3, \alpha \rangle, & \text{B: } & \langle 1, \beta_1, 4, 2, 3, \beta_2 \rangle, & \text{C: } & \langle 1, 3, \beta_1, 2, 4, \beta_2 \rangle, \\ \text{D: } & \langle 1, 3, \beta_1, 4, 2, \beta_2 \rangle, & \text{E: } & \langle 1, 2, 4, \delta \rangle, \end{aligned}$$

wobei  $\alpha$  eine beliebige Permutation der Zahlen  $4, 5, \dots, n$  ist,  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  eine beliebige Permutation der Zahlen  $5, 6, \dots, n$  ist; und  $\delta$  eine beliebige Permutation von  $3, 5, 6, \dots, n$  ist. Aus den Touren des Typs A konstruieren wir alle Ringschiffs zu  $\langle 3, 4, 5, \dots, n \rangle$  gemäß Satz 4.1 und erhalten  $(n-2)(n-5) + 2 = n^2 - 7n + 12$  linear unabhängige Touren der Art  $\langle 1, 2, 3, \alpha \rangle$ . Aus den übrigen Typen konstruieren wir  $n-2$  Touren im Falle des Typs B, und jeweils  $n-3$  Touren in den übrigen Fällen, die wir der Einfachheit halber auflisten. Dabei geben wir wieder zu jeder Tour den zu merkenden Spaltenindex an:

B: a)	$\langle 1, 4, 2, 3, 5, 6, \dots, n \rangle$	Spalte (1, 4)
b)	$\langle 1, 5, 4, 2, 3, 6, 7, \dots, n \rangle$	Spalte (1, 5)
	$\langle 1, 6, 4, 2, 3, 7, \dots, n, 5 \rangle$	Spalte (1, 6)
	$\langle 1, 7, 4, 2, 3, 8, \dots, n, 5, 6 \rangle$	Spalte (1, 7)
	$\vdots$	$\vdots$
	$\langle 1, n, 4, 2, 3, 5, 6, \dots, n-1 \rangle$	Spalte (1, n)
c)	$\langle 1, 5, 6, \dots, n, 4, 2, 3 \rangle$	Spalte (3, 1)
C: a)	$\langle 1, 3, 5, 6, \dots, n, 4, 2 \rangle$	Spalte (2, 1)
b)	$\langle 1, 3, 4, 2, 5, 6, \dots, n \rangle$	Spalte (2, 5)
	$\langle 1, 3, 4, 2, 6, 7, \dots, n, 5 \rangle$	Spalte (2, 6)
	$\vdots$	$\vdots$
	$\langle 1, 3, 4, 2, n, 5, 6, \dots, n-1 \rangle$	Spalte (2, n)
D: a)	$\langle 1, 3, 2, 4, 5, 6, \dots, n \rangle$	Spalte (3, 2)
b)	$\langle 1, 3, 6, 7, \dots, n, 5, 2, 4 \rangle$	Spalte (5, 2)
	$\langle 1, 3, 7, 8, \dots, n, 5, 6, 2, 4 \rangle$	Spalte (6, 2)
	$\vdots$	$\vdots$
	$\langle 1, 3, 5, 6, \dots, n, 2, 4 \rangle$	Spalte (n, 2)
E: a)	$\langle 1, 2, 4, 3, 5, 6, \dots, n \rangle$	Spalte (4, 3)
b)	$\langle 1, 2, 4, 6, 7, \dots, n, 5, 3 \rangle$	Spalte (5, 3)
	$\langle 1, 2, 4, 7, 8, \dots, n, 5, 6, 3 \rangle$	Spalte (6, 3)
	$\vdots$	$\vdots$
	$\langle 1, 2, 4, 5, 6, 7, \dots, n, 3 \rangle$	Spalte (n, 3)

Damit haben wir  $n^2 - 7n + 12 + n - 2 + 3(n - 3) = d_n$  Touren gefunden.

$M = \begin{pmatrix} N_0 & N' \\ * & N_1 \end{pmatrix}$  sei die Matrix, die durch diese Touren und die obige Spaltenauswahl definiert ist.  $N_0$  ist bekanntlich regulär. Zu jeder unter A - E: konstruierten Tour haben wir gerade eine solche Spalte  $(i, j)$  ausgewählt, die durch die bisher bestimmten Touren nur mit Nullelementen belegt ist. Folglich ist  $N'$  eine Nullmatrix. Nach Konstruktion ist ferner  $N_1$  eine untere Dreiecksmatrix mit 1-Elementen auf der Hauptdiagonalen, also  $|N_1| = 1$ . Damit haben wir  $|M| = |N_0||N_1| \neq 0$ .  $\square$

*Beispiel:* Für  $n = 6$  erhalten wir aus dem Konstruktionsverfahren des Satzes 5.5 folgende Touren und die folgende Matrix  $M$ :

	34	35	36	46	54	65	14	15	16	31	21	25	26	32	52	62	43	53	63
123456	1																		
123564		1																	
123645			1																
123465	1			1		1													
123546		1		1	1														
123654			1	1	1														
142356		1					1												
154236			1					1											
164235		1							1										
156423										1									
135642		1									1								
134256	1											1							
134265	1					1							1						
132456														1					
136524			1			1									1				
135624		1														1			
124356		1															1		
124653						1												1	
124563																			1

*Vermutung 2:* Alle  $T_i$ -Ungleichungen liefern für  $n \geq n_i$  ( $n_i$  ist zu bestimmen) Facetten von  $P_T^n$ .

c) *C3-Kämme und  $D_k$ -Ungleichungen*

Wir zeigen nun, daß C3-Kämme mit  $|K_1| = 2$  und  $|K_2| = n - 3$  Facetten des Travelling Salesman Polytopen liefern. Nach Bemerkung 3.8 sind diese C3-Kämme äquivalent zu  $D_3$ -Ungleichungen. Die Behauptung folgt somit aus dem folgenden Satz:

*Satz 5.6:*  $D_3$ -Ungleichungen liefern Facetten von  $P_T^n$  für  $n \geq 5$ .

*Beweis:* O.B.d.A. zeigen wir die Behauptung für die Ungleichung:

$$x_{12} + 2x_{21} + x_{23} + 2x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{41} \leq 3.$$

Folgende Typen von Touren erfüllen diese Ungleichung mit Gleichheit:

$$\begin{aligned} \text{A: } & \langle 1, \alpha, 2, 3 \rangle, & \text{B: } & \langle 1, \alpha, 3, 2 \rangle, & \text{C: } & \langle 1, 2, \alpha, 3 \rangle, & \text{D: } & \langle 1, \beta_1, 3, 4, \beta_2, 2 \rangle, \\ \text{E: } & \langle 1, \beta, 2, 3, 4 \rangle, & \text{F: } & \langle 1, 2, 3, \beta \rangle, & \text{G: } & \langle 1, 2, 3, \beta, 4 \rangle, & \text{H: } & \langle 1, 2, \beta, 3, 4 \rangle, \end{aligned}$$

wobei  $\alpha$  eine beliebige Permutation der Zahlen  $4, 5, \dots, n$  und  $\beta$  eine beliebige Permutation der Zahlen  $5, 6, \dots, n$  ist. Für  $\langle 1, 4, 3, 5, 6, \dots, n, 2 \rangle$  gilt in obiger Ungleichung strikte Ungleichheit.

Aus den Touren des Typs A erzeugen wir alle linear unabhängigen Ringschiffs zu  $\langle 1, 4, 5, \dots, n \rangle$ ; dann sind auch die Touren  $\langle 1, \pi, 2, 3 \rangle$  linear unabhängig; wie üblich merken wir uns die zur Konstruktion der Matrix notwendigen Spalten. Auf diese Weise erhalten wir  $(n-2)(n-5) + 2 = n^2 - 7n + 12$  Touren und Spaltenindizes. Folgende Spalten enthalten in den bisher konstruierten Touren nur Nullelemente:  $(1, 2)$ ;  $(2, i)$  für  $i = 1, 4, 5, \dots, n$ ;  $(3, i)$  für  $i = 2, 4, 5, \dots, n$ ;  $(i, 1)$  für  $i = 2, 4, 5, \dots, n$ , und  $(i, 3)$  für  $i = 1, 4, 5, \dots, n$ . Die restlichen Touren werden nun so ausgewählt, daß eines der obigen Tupel vorkommt, alle anderen Tupel möglichst schon einmal benutzt wurden. Dazu konstruieren wir für den Typ B ausgehend von der Tour  $\langle 1, 5, 6, \dots, n, 4, 3, 2 \rangle$   $n-3$  Touren des Ringschiffstyps 1 zu  $\langle 1, 5, 6, \dots, n, 4 \rangle$  und merken uns die Spaltenindizes  $(j, 3)$  für  $j = 4, \dots, n$ . Wir verfahren ebenso beim Typ C, indem wir von der Tour  $\langle 1, 2, 4, 5, \dots, n, 3 \rangle$  ausgehen und die Ringschiffs des Typs 1 zu  $\langle 2, 4, 5, \dots, n \rangle$  bilden. Als Spaltenindizes behalten wir  $(2, j)$  für  $j = 4, 5, \dots, n$ . Vom Typ D wählen wir die Tour  $\langle 1, 5, 6, \dots, n, 3, 4, 2 \rangle$  mit Spaltenindex  $(3, 4)$  sowie die Tour  $\langle 1, 3, 4, 5, \dots, n, 2 \rangle$  mit Spaltenindex  $(1, 3)$ . Vom Typ E nehmen wir die Tour  $\langle 1, 5, 6, \dots, n, 2, 3, 4 \rangle$  und den Spaltenindex  $(4, 1)$ . Die restlichen  $2n-8$  erforderlichen Touren erzeugen wir aus Typ F und G wie oben: Ausgehend von der Tour  $\langle 1, 2, 3, 4, 6, 7, \dots, n, 5 \rangle$  vom Typ F konstruieren wir  $n-4$  Touren mittels der Ringschiffs des Typs 1 zu  $\langle 4, 6, 7, \dots, n, 5 \rangle$  und merken uns die Spaltenindizes  $(j, 1)$  für  $j = 5, \dots, n$ . Vom Typ G konstruieren wir  $n-4$  Touren ausgehend von  $\langle 1, 2, 3, 5, 6, \dots, n, 4 \rangle$  mittels Schritt 1 des Ringschiffverfahrens zu  $\langle 3, 5, 6, \dots, n \rangle$  und merken uns die Spaltenindizes  $(3, j)$  für  $j = 5, 6, \dots, n$ . Damit haben wir  $n^2 - 7n + 12 + 2(n-3) + 2 + 1 = d_n$  Touren gefunden und uns  $d_n$  Spaltenindizes aus der Matrix der Touren gemerkt. Auf diese Weise erhalten wir eine  $(d_n, d_n)$ -Matrix

$$M = \begin{pmatrix} N_0 & 0 \\ * & N_1 \end{pmatrix}$$

wobei  $N_0$  die gemäß des Ringschiffverfahrens gewonnene reguläre Matrix ist und  $N_1$  eine untere Dreiecksmatrix mit 1-Elementen auf der Hauptdiagonalen ist. Da nach Konstruktion die rechte obere Blockmatrix eine Nullmatrix ist, folgt  $|M| = |N_0| |N_1| \neq 0$ .  $\square$

*Vermutung 3:* Alle  $D_k$ -Ungleichungen,  $2 \leq k \leq n-2$ , liefern Facetten von  $P_T^n$ .

*Satz 5.7:*  $E_3$ -Ungleichungen liefern Facetten von  $P_T^n$  für  $n \geq 5$ .

**Beweis:** Wir zeigen die Behauptung für die Ungleichung:

$$2x_{12} + x_{14} + 2x_{21} + x_{23} + x_{31} + x_{42} \leq 3$$

$\langle 1, 3, 2, 4, 5, \dots, n \rangle$  erfüllt diese Ungleichung mit strikter Ungleichheit, und folgende Typen von Touren erfüllen sie mit Gleichheit:

$$\begin{array}{lll} \text{A: } \langle 1, 2, 3, \alpha \rangle & \text{B: } \langle 1, 2, \alpha, 3 \rangle & \text{C: } \langle 1, 4, \beta, 2 \rangle \\ \text{D: } \langle 1, \beta, 4, 2 \rangle & \text{E: } \langle 1, 4, 2, 3, \gamma \rangle & \text{F: } \langle 1, 4, 2, \gamma, 3 \rangle \\ \text{G: } \langle 1, 4, \gamma, 2, 3 \rangle & \text{H: } \langle 1, \gamma, 4, 2, 3 \rangle, \end{array}$$

wobei  $\alpha$  beliebige Permutation von  $4, 5, \dots, n$ ,  $\beta$  eine beliebige Permutation von  $3, 5, 6, \dots, n$  und  $\gamma$  eine beliebige Permutation von  $5, 6, \dots, n$  ist. Aus den Touren des Typs A erzeugen wir beginnend mit  $\langle 1, 2, 3, 4, \dots, n \rangle$  die  $(n-5) \cdot (n-2) + 2 = n^2 - 7n + 12$  linear unabhängigen Ringschiffs zu  $\langle 3, 4, \dots, n \rangle$ . Wie üblich merken wir uns zu jeder Tour einen Spaltenindex. Folgende Spalten enthalten in den bisher konstruierten Touren nur Nullelemente  $(3, 1)$ ;  $(1, i)$  für  $i = 3, \dots, n$ ;  $(i, 2)$  für  $i = 3, \dots, n$ ;  $(2, i)$  für  $i = 1, 4, 5, \dots, n$  und  $(i, 3)$  für  $i = 1, 4, 5, \dots, n$ . Aus den restlichen Touren B – H: wählen wir nun solche aus, die eine dieser Spalten enthalten und eine untere Dreiecksmatrix ergeben.

B:	$\langle 1, 2, 4, \dots, n, 3 \rangle$	Spalte (2, 4)
	$\langle 1, 2, 5, \dots, 4, n, 3 \rangle$	Spalte (2, 5)
	$\vdots$	$\vdots$
	$\langle 1, 2, n-1, 4, 5, \dots, n-2, n, 3 \rangle$	Spalte (2, $n-1$ )
E:	$\langle 1, 4, 2, 3, 5, 6, \dots, n \rangle$	Spalte (4, 2)
G:	$\langle 1, 4, 6, 7, \dots, n, 5, 2, 3 \rangle$	Spalte (5, 2)
	$\langle 1, 4, 7, \dots, n, 5, 6, 2, 3 \rangle$	Spalte (6, 2)
	$\vdots$	$\vdots$
	$\langle 1, 4, 5, 6, \dots, n, 2, 3 \rangle$	Spalte ( $n$ , 2)
H:	$\langle 1, 5, 6, \dots, n, 4, 2, 3 \rangle$	Spalte (1, 5)
	$\langle 1, 6, 7, \dots, n, 5, 4, 2, 3 \rangle$	Spalte (1, 6)
	$\vdots$	$\vdots$
	$\langle 1, n, 5, 6, \dots, n-1, 4, 2, 3 \rangle$	Spalte (1, $n$ )
C:	$\langle 1, 4, n, 3, 5, 6, \dots, n-1, 2 \rangle$	Spalte (2, 1)
	$\langle 1, 4, 3, n, 5, 6, \dots, n-1, 2 \rangle$	Spalte (4, 3)
	$\langle 1, 4, 3, 5, 6, \dots, n-1, n, 2 \rangle$	Spalte ( $n$ , 2)
B:	$\langle 1, 2, n, 5, 6, \dots, n-1, 4, 3 \rangle$	Spalte (2, $n$ )
F:	$\langle 1, 4, 2, n, 6, 7, \dots, n-1, 5, 3 \rangle$	Spalte (5, 3)
	$\langle 1, 4, 2, n, 7, \dots, n-1, 5, 6, 3 \rangle$	Spalte (6, 3)
	$\vdots$	$\vdots$
	$\langle 1, 4, 2, n, 5, 6, \dots, n-1, 3 \rangle$	Spalte ( $n-1$ , 3)
D:	$\langle 1, 3, 5, 6, \dots, n, 4, 2 \rangle$	Spalte (1, 3)

Listen wir die Touren und Spalten in der Reihenfolge der Konstruktion auf, so erhalten wir eine Matrix

$$M = \begin{pmatrix} N_0 & 0 \\ * & N_1 \end{pmatrix},$$

wobei  $N_0$  die aus dem Ringschiffverfahren resultierende Matrix und  $N_1$  eine untere Dreiecksmatrix mit 1-Elementen auf der Hauptdiagonalen ist. Also ist  $|M| = |N_0||N_1| \neq 0$ .  $\square$

## 6. Lineare Charakterisierungen des Travelling-Salesman-Polytopen

Da  $\dim P_T^n = (n-1)^2 - n$  ist, ist  $P_T^n$  in einem echten affinen Teilraum von  $\mathbb{R}^{n^2}$  enthalten. Das bedeutet, daß es überabzählbar viele Möglichkeiten gibt, eine Facette von  $P_T^n$  durch eine Linearform auf  $\mathbb{R}^{n^2}$  darzustellen (siehe z.B. 3.7, 3.8 für äquivalente Darstellungen). Sei  $R_F = \{(a, a_0) \in \mathbb{R}^{n^2+1} \mid a x \leq a_0\}$  ist Stützebene von  $P_T^n$ ,  $F = P_T^n \cap \{x \in \mathbb{R}^{n^2} \mid ax = a_0\}$  die Menge aller Darstellungen einer Facette  $F$  durch Linearformen auf  $\mathbb{R}^{n^2}$ , dann erleichtert die Kenntnis von „Normalformen“ unter den Darstellungen von  $F$  das Auffinden von Ungleichungen, die alle *verschiedene* Facetten von  $P_T^n$  liefern. Man überlegt sich leicht, daß man sich zunächst auf Linearformen mit nicht-negativen Koeffizienten beschränken kann. Ist  $A_F$  die Menge nicht-negativer Darstellungen von  $F$ , so kann man sich auf Linearformen aus  $A_F$  mit *minimalem Träger* beschränken; das sind solche Linearformen, deren Anzahl positiver Koeffizienten minimal ist. Ungeklärt ist noch, ob diese Einschränkung eine endliche Anzahl von Darstellungen liefert oder sogar eindeutig ist. (Diese Frage soll in einem weiteren Aufsatz behandelt werden). Die vorangegangenen Überlegungen haben uns dazu geführt, die  $T_2$ -,  $D_2$ -,  $D_3$ - und  $E_3$ -Ungleichungen abzuleiten.

Im folgenden zeigen wir, daß für hinreichend großes  $n \in \mathbb{N}$  die in Abschnitt 5 gefundenen Ungleichungen verschiedene Facetten von  $P_T^n$  definieren. Aus den Beweisen von Satz 5.1, 5.2, 5.3, 5.5, 5.6, 5.7 kann man die Anzahl der Touren errechnen, die diese Ungleichungen mit Gleichheit erfüllen (siehe 7.1, 7.2, 7.4, 7.5, 7.8, 7.10). Daraus ergibt sich, daß auf den  $S_1$ -,  $S_2$ -,  $T_2$ -,  $D_2$ -,  $D_3$ -Facetten verschieden viele Touren liegen, d.h. diese Klassen von Ungleichungen liefern voneinander verschiedene Klassen von Facetten. Die  $D_3$ - und  $E_3$ -Ungleichungen werden zwar von der gleichen Anzahl von Touren mit Gleichheit erfüllt, aber aus der kombinatorischen Struktur dieser Touren ersieht man, daß auch diese Klassen von Facetten voneinander verschieden sind. Wir müssen nun noch zeigen, daß verschiedene Ungleichungen innerhalb einer Klasse jeweils voneinander verschiedene Facetten des  $P_T^n$  liefern. Für die  $S_1$ - und  $S_2$ -Ungleichungen ist das unmittelbar klar. Dieser Nachweis wird für die übrigen Klassen von Ungleichungen wie folgt erbracht: Wir geben einen Punkt  $x \in P_T^n$  an, der alle Ungleichungen des Typs  $T_2$  (bzw.  $D_2$ , bzw.  $E_3$ ) erfüllt bis auf eine, dann bedeutet das, daß die von dieser Ungleichung definierte Facette von allen anderen verschieden ist. Weiter folgt daraus, daß die partielle lineare Charakterisierung von  $P_T^n$ , die man unter Benutzung der neuen Ungleichungen erhält, in der Tat wesentlich *schärfer* ist als diejenige, die durch  $P_T^n$  gegeben ist. Da die jeweilige Nachprüfung der Subtour Elimination

Bedingungen (S) zwar langwierig, jedoch nicht kompliziert ist, werden wir hier nur einen Hinweis geben, wie dies im einzelnen erfolgt: Jeder der angegebenen Punkte  $x$  ist so gewählt, daß alle Koordinaten in einer gewissen Teilmenge  $V^1 \times V^1 \subset E$ ,  $V^1 \subset V$ , konstant sind ( $E$  ist die Indexmenge der Koordinaten von  $x$ ). Um nachzuprüfen, daß eine  $S_k$ -Ungleichung

$$\sum_{(i,j) \in W \times W} x_{ij} \leq |W| - 1$$

mit  $k = |W| - 1$  erfüllt ist, zerlegt man

$W \times W = W^1 \times W^1 \cup W^1 \times W^2 \cup W^2 \times W^1 \cup W^2 \times W^2$ , wobei  $W^1 = W \cap V^1$  und  $W^2 = W - W^1$ . Ist dann  $x_{ij} = \alpha \forall i \neq j, (i, j) \in W^1 \times W^1$ , so ist die obige Ungleichung erfüllt, falls

$$|W^1|(|W^1| - 1)\alpha + \sum_{i \in W^1} \sum_{j \in W^2} x_{ij} + \sum_{i \in W^2} \sum_{j \in W^1} x_{ij} + \sum_{i \in W^2} \sum_{j \in W^2} x_{ij} \leq |W| - 1$$

gilt. Mit diesem Hinweis können dann die  $S_k$ -Ungleichungen im Einzelfall überprüft werden. Ebenso prüft man in den folgenden Sätzen leicht nach, daß – bis auf eine – alle weiteren Ungleichungen des betrachteten Typs erfüllt sind. Daß die Zuordnungsrestriktionen (1); (2) erfüllt sind, ist unmittelbar aus der Konstruktion der angegebenen Punkte einsichtig.

**Satz 6.1:** Für  $n \geq 6$  liefern die  $T_2$ -Ungleichungen voneinander verschiedene Facetten des  $P_T^n$ .

**Beweis:** Man wähle den Punkt  $x$  wie folgt:

$$x_{i_1 i_2} = x_{i_1 i_3} = x_{i_2 i_3} = x_{i_2 i_4} = x_{i_4 i_2} = \frac{1}{2} \quad (6.1.1)$$

$$x_{k i_1} = x_{i_3 k} = \frac{1}{n-4} \quad \forall k \in V^1 \quad (6.1.2)$$

$$x_{i_4 k} = x_{k i_4} = \frac{1}{2(n-4)} \quad \forall k \in V^1 \quad (6.1.3)$$

$$x_{ij} = \frac{2n-11}{2(n-5)(n-4)} \quad \forall i \neq j, (i, j) \in V^1 \times V^1 \quad (6.1.4)$$

$$x_{ij} = 0 \quad \text{sonst} \quad (6.1.5)$$

wobei  $V^1 = V - \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ .  $\square$

**Satz 6.2:** Für  $n \geq 5$  liefern die  $D_2$ -Ungleichungen voneinander verschiedene Facetten des  $P_T^n$ .

*Beweis:* Man wähle den Punkt  $x$  wie folgt:

$$x_{i_1 i_2} = x_{i_2 i_1} = x_{i_2 i_3} = x_{i_3 i_2} = \frac{1}{2} \quad (6.2.1)$$

$$x_{i_1 k} = x_{k i_2} = x_{i_2 k} = x_{k i_3} = \frac{1}{2(n-3)} \quad \forall k \in V^1 \quad (6.2.2)$$

$$x_{ij} = \frac{1}{n-3} \quad \forall i \neq j, (i, j) \in V^1 \times V^1 \quad (6.2.3)$$

$$x_{ij} = 0, \text{ sonst}$$

wobei  $V^1 = V - \{i_1, i_2, i_3\}$ .  $\square$

**Satz 6.3:** Für  $n \geq 6$  liefern die  $D_3$ -Ungleichungen voneinander verschiedene Facetten des  $P_T^n$ .

*Beweis:* Man wähle den Punkt  $x$  wie folgt:

$$x_{i_1 i_2} = x_{i_2 i_1} = x_{i_2 i_3} = x_{i_3 i_2} = x_{i_3 i_4} = x_{i_4 i_3} = \frac{1}{2}; x_{i_3 i_1} = 0. \quad (6.3.1)$$

$$x_{i_1 k} = x_{i_4 k} = x_{k i_2} = x_{k i_3} = \frac{1}{2(n-4)} \quad \forall k \in V^1 \quad (6.3.2)$$

$$x_{ij} = \frac{1}{n-4} \quad \forall i \neq j, (i, j) \in V^1 \times V^1 \quad (6.3.3)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ sonst} \quad (6.3.4)$$

wobei  $V^1 = V - \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ .  $\square$

**Satz 6.4:** Für  $n \geq 6$  liefern die  $E_3$ -Ungleichungen voneinander verschiedene Facetten von  $P_T^n$ .

*Beweis:* Wähle  $x \in P_S^n$  wie folgt:

$$x_{i_1 i_4} = x_{i_1 i_2} = x_{i_2 i_1} = x_{i_2 i_3} = x_{i_3 i_2} = \frac{1}{2}, x_{i_4 i_2} = 0 \quad (6.4.1)$$

$$x_{i_3 k} = x_{k i_2} = x_{k i_3} = x_{k i_4} = \frac{1}{2(n-4)}, x_{i_4 k} = \frac{1}{n-4} \quad \forall k \in V^1 \quad (6.4.2)$$

$$x_{ij} = \frac{2(n-4)-3}{2(n-4)(n-5)} \quad \forall (i, j) \in V^1 \times V^1, i \neq j \quad (6.4.3)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ sonst}$$

wobei  $V^1 = V - \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ .  $\square$

Wie wir in Abschnitt 3 gezeigt haben, sind die  $T_2$ -Ungleichungen, bzw. die  $D_2$ -Ungleichungen, spezielle  $C_2$ -Ungleichungen und die  $D_3$ -Ungleichungen spezielle  $C_3$ -Ungleichungen. Definieren wir  $P_C^n$  wie folgt:

$$P_C^n = \{x \in P_S^n \mid x \text{ erfüllt } (UC1), (UC2), (UC3) \text{ und } (E_3)\}$$

dann folgt aus den vorangehenden Sätzen der folgende

**Satz 6.5:** Mit den obigen Bezeichnungen gilt:

$$P_T^n \subseteq P_C^n \subseteq P_S^n \subseteq P_A^n. \text{ Für hinreichend großes } n \text{ ist ferner } P_C^n \text{ echt verschieden}$$

von  $P_S^n$ .  $\square$

Eine Verschärfung des Satzes 6.5 formulieren wir als

**Vermutung 4:** Jede *nicht-ganzzahlige* Ecke von  $P_S^n$  ist unzulässig für  $P_C^n$ .

## 7. Zusammenfassung

In Abschnitt 5 konnten wir eine Anzahl von Ungleichungstypen bestimmen, die nicht nur gültig für das TSP sind, sondern nach Abschnitt 6 sogar verschiedene Facetten von  $P_T^n$  liefern. Wir geben nun einen systematischen Überblick über die bekannten Facetten, die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Ungleichungstypen und die im Vorhergehenden geäußerten Vermutungen. Es sei  $Anz_1$  die Anzahl der verschiedenen  $X_i$ -Ungleichungen(-Facetten)  $Anz_2$  die Anzahl der auf einer  $X_i$ -Facette liegenden Touren.

### 7.1 $S_1$ -Ungleichungen, $n \geq 5$ :

$$x_{i_1 i_2} + x_{i_2 i_1} \leq 1$$

$$Anz_1 = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$Anz_2 = 2(n-2)!$$

### 7.2 $S_2$ -Ungleichungen, $n \geq 5$ :

$$x_{i_1 i_2} + x_{i_1 i_3} + x_{i_2 i_1} + x_{i_2 i_3} + x_{i_3 i_1} + x_{i_3 i_2} \leq 2$$

$$Anz_1 = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$Anz_2 = 6(n-3)!$$

7.3 *Vermutung 1:* Alle  $S_k$ -Ungleichungen liefern für  $n \geq 5$  Facetten von  $P_T^n$ :

$$\sum_{(i,j) \in F(W)} x_{ij} \leq |W| - 1, \quad W \subset V, \quad 2 \leq |W| \leq n-2$$

$$\text{Anz}_1 = \binom{n}{|W|}$$

$$\text{Anz}_2 = (|W|)! (n - |W|)!$$

7.4  $T_2$ -Traubenungleichungen liefern Facetten des  $P_T^n$  für  $n \geq 6$ :

$$x_{i_1, i_2} + x_{i_1, i_3} + x_{i_2, i_3} + x_{i_2, i_4} + x_{i_4, i_1} \leq 2$$

$$\text{Anz}_1 = 4! \binom{n}{4} = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

$$\text{Anz}_2 = 5(n-3)!$$

7.5  $T_{n-2}$ -Traubenungleichungen liefern Facetten für  $n \geq 4$ :

$$x_{i_1, i_2} + x_{i_1, i_3} + x_{i_3, i_1} + \sum_{(i,j) \in F(V - \{i_1, i_2\})} x_{ij} \leq n-2$$

$$\text{Anz}_1 = 6 \binom{n}{3} = n(n-1)(n-2)$$

$$\text{Anz}_2 = (n-2)! + 3(n-3)!$$

7.6 *Vermutung 2:* Alle  $T_i$ -Ungleichungen liefern Facetten für  $i \leq n-2, n \geq n_i$ :

$$x_{i_1, i_2} + x_{i_1, i_3} + x_{i_3, i_2} + \sum_{(i,j) \in F(W)} x_{ij} \leq |W|, \quad W \subseteq V - \{i_1, i_2\}$$

$$\text{Anz}_1 = 6 \binom{n}{3} \binom{n-1}{|W|-1}$$

7.7  $D_2$ -Ungleichungen liefern, da äquivalent zu  $T_{n-2}$ -Ungleichungen, dieselben Facetten wie diese.

7.8  $D_3$ -Ungleichungen liefern Facetten für  $n \geq 5$ :

$$x_{i_1, i_2} + 2x_{i_2, i_1} + x_{i_2, i_3} + 2x_{i_3, i_1} + x_{i_3, i_2} + x_{i_3, i_4} + x_{i_4, i_1} \leq 3$$

$$\text{Anz}_1 = \binom{n}{4} 4! = n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$\text{Anz}_2 = 4((n-3)! + (n-4)!)$$

7.9 *Vermutung 3:* Alle  $D_k$ -Ungleichungen liefern für  $2 \leq k \leq n-2$  Facetten von  $P_T^n$ .

$$\text{Anz}_1 = |W|! \binom{n}{|W|}! \quad \text{für } W \subseteq V, \quad |W| = k+1$$

7.10  $E_3$ -Ungleichungen liefern Facetten von  $P_T^n$  für  $n \geq 6$ .

$$\text{Anz}_1 = 12 \binom{n}{4}$$

$$\text{Anz}_2 = 4((n-3)! + (n-4)!)$$

7.11 *Vermutung 4:* Die Kammungleichungen (UC1), (UC2) und (UC3) schneiden alle nicht-ganzzahligen Ecken von  $P_S^n$  ab.

7.12 Durch „Komplementierung“ mittels der Gleichungen (1), (2), erhält man verschiedene, aber äquivalente Darstellungen von Facetten des  $P_T^n$  durch verschiedene Ungleichungen, z.B.  $D_3$ -Ungleichungen und spezielle  $C_3$ -Kämme, etc. Was ist die zweckmäßigste solcher Darstellungen? Gibt es eine *eindeutige* derartige Darstellung, ist etwa diejenige mit *minimalem Träger* (= minimaler Anzahl von Null verschiedenen Koeffizienten in der Ungleichung) eindeutig?

7.13 Sicherlich ist die in dieser Arbeit gegebene lineare Darstellung von  $P_T^n$  nicht vollständig. Gibt es ein Verfahren,  $P_T^n$  auf einfache Weise und vollständig durch ein lineares Gleichungs- und Ungleichungssystem, das darüber hinaus nichtredundant ist, zu charakterisieren?

Der zweite Autor möchte an dieser Stelle Professor Egon Balas von der Carnegie-Mellon University herzlich danken für zahlreiche Anregungen und Diskussionen zu dem Thema dieser Arbeit. Insbesondere sind einige spezielle Formen der  $C_2$ -Ungleichungen des Abschnitts 3b sowie die Formulierung des Satzes 4.1 gemeinsam mit Professor Balas [1973] erarbeitet worden.

Einige der obigen Vermutungen sind seit Fertigstellung dieser Arbeit beantwortet, desgleichen weitere Resultate über die Struktur von  $P_T^n$  erzielt worden, siehe *Grötschel* [1977].

et-

#### Literatur

- Balas, E.*: Facets of the Knapsack Polytope, *Mathematical Programming* 8, 1975, 146–164.  
*Balas, E.*, und *M.W. Padberg*: On the Set Covering Problem, *Operations Research* 20, 1972, 1152–1161.  
 – : On the Set Covering Problem II. An Algorithm for Set Partitioning, *Operations Research* 23, 1975, 74–90.  
 – : On the facial Structure of the Travelling Salesman Polytope, unveröffentlichtes Manuskript, Carnegie-Mellon-University, Pittsburgh, USA, April 1973.  
*Bellmore, M.*, und *G.L. Nemhauser*: The Traveling Salesman Problem: A Survey, *Operations Research* 16, 1968, 538–558.  
*Chvátal, V.*: Edmonds Polytopes and a Hierarchy of Combinatorial Problems, *Discrete Mathematics* 4, 1973, 305–337.  
 – : Edmonds Polytopes and Weakly Hamiltonian Graphs, *Mathematical Programming* 5, 1973, 29–40.

$P_T^n$ .

- Dantzig, G., R. Fulkerson und S. Johnson: Solution of a Large-Scale Traveling-Salesman Problem, *Operations Research* 2, 1954, 393–410.
- Edmonds, J.: Paths, Trees, and Flowers, *Canadian Journal of Mathematics*, Vol. XVII, 1965, 449–467.
- Garfinkel, R., und G.L. Nemhauser: *Integer Programming*, New York–London–Sydney–Toronto 1972.
- Glover, F.: Unit-Coefficient Inequalities for Zero-One Programming, University of Colorado, Management Sciences Report Series, No. 73–7, July 1973.
- Grötschel, M.: Beiträge zur polyedrischen Beschreibung kombinatorischer Optimierungsprobleme, Dissertation, Bonn 1977.
- Hammer, P.L., E.L. Johnson und U.N. Peled: Regular 0–1 Programs, *Cahiers Du Centre D'Etudes De Recherche Opérationnelle* 16, 1974, 267–276.
- : Facets of Regular 0–1 Polytopes, *Mathematical Programming* 8, 1975, 179–206.
- Helbig Hansen, K., und J. Krarup: Improvements of the Held-Karp Algorithm for the Symmetric Traveling Salesman Problem, *Mathematical Programming* 7, 1974, 87–96.
- Held, M., und R.M. Karp: The Traveling-Salesman Problem and Minimum Spanning Trees, Part I, *Operations Research* 18, 1970, 1138–1162.
- : The Traveling-Salesman Problem and Minimum Spanning Trees, Part II, *Mathematical Programming* 1, 1971, 6–25.
- Heller, I.: On the problem of shortest paths between points. I; On the problem of shortest paths between points. II, *Bulletin of AMS* 59, 1953, 551–552. (abstract).
- Hong, S.: A Linear Programming Approach for the Travelling-Salesman Problem, Ph.D. Thesis, The Johns Hopkins University, Baltimore, Md., 1971, unpublished.
- Karg, L.L., und G.L. Thompson: A Heuristic Approach to Solving Travelling Salesman Problem, *Management Science* 10, 1964, 225–248.
- Karp, M.M.: Reducibility among combinatorial problems, aus: *Miller, Thatcher* (ed.): *Complexity of Computer Computations*, New York–London 1972.
- Korte, B.: Über eine Klasse kombinatorischer Extremalprobleme, in *Festschrift für E. Peschl*, Schriften der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Bonn 1972.
- Kuhn, A.W.: On certain convex polyhedra, *Bulletin of AMS* 61, 1955, 557–558 (abstract).
- Menger, K.: Botenproblem, in *K. Menger* (ed.): *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* (Wien 1930), Heft 2, 11–12. Leipzig 1932.
- Müller-Merbach, H.: *Optimale Reihenfolgen*, Berlin–Heidelberg–New York 1970.
- Padberg, M.W.: *Essays in Integer Programming*, Ph.D. Thesis, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh 1971, (unpublished).
- : On the Facial Structure of Set Packing Polyhedra, *Mathematical Programming* 5, 1973, 119–215.
- : A Note on Zero-One Programming, *Operations Research* 23, 1975, 833–837.
- Padberg, M.W., und R.M. Rao: The Travelling Salesman Problem and a Class of Polyhedra of Diameter two, *Mathematical Programming* 7, 1974, 32–45.
- Steckhan, H., und R. Thome: Vereinfachung der Eastmanschen Branch-Bound-Lösung für symmetrische Travelling Salesman-Probleme. *Krelle* (ed.), *Operations Research Verfahren XIV*, 1972, 360–389.
- Wolsey, L.A.: Faces for Linear Inequalities in 0–1 Variables, *Mathematical Programming* 8, 165–178.