Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

ADM II - Diskrete Optimierung
Sommersemester 15

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
Dr. Axel Werner
Torsten Klug

5. Übungsblatt

Abgabetermin: 27.05.2015 bis 10:15 in MA041

Aufgabe 13. **10 Punkte**

Sei $G = (V, E)$ ein beliebiger ungerichteter Graph. Mit

$$\mathcal{M}(G) = \{M \subseteq E \mid M \text{ Matching}\}$$

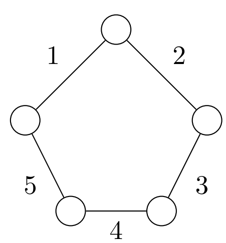
bezeichnen wir das Unabhängigkeitssystem der Matchings in G.

a) Sei G bipartit. Zeigt, dass $\mathcal{M}(G)$ im Allgemeinen kein Matroid ist, aber als Durchschnitt der Unabhängigkeitssysteme zweier Matroide dargestellt werden kann.

b) Sei G ein beliebiger Graph. Zeigt, dass für den Rangquotienten $q(\mathcal{M}(G))$ des Unabhängigkeitssystems $\mathcal{M}(G)$ gilt:

$$q(\mathcal{M}(G)) \geq \frac{1}{2}$$

c) Zeigt, dass $\mathcal{M}(G)$ für den folgenden Graphen G nicht als Durchschnitt von weniger als drei Matroiden dargestellt werden kann.



Hinweis: Zeigt zunächst mit Hilfe des Zirkuitaustauschaxioms, dass die beiden minimal abhängigen Mengen $\{1, 2\}$ und $\{2, 3\}$ nicht beide Zirkuits eines Matroids $(E, \mathcal{I})$ mit $\mathcal{M}(G) \subseteq \mathcal{I}$ sein können.

Aufgabe 14. **10 Punkte**

Sei $\mathcal{B}$ das Basissystem eines Matroids M auf einer Grundmenge E.

a) Zeigt, dass der Greedy-Max-Algorithmus das folgende Bottleneck-Problem für $c \geq 0$ optimal löst:

$$\max_{B \in \mathcal{B}} \min_{i \in B} c(i)$$

b) Zeigt, dass der Greedy-Min-Algorithmus für beliebige Gewichte c das folgende Bottleneck-Problem optimal löst:

$$\min_{B \in \mathcal{B}} \max_{i \in B} c(i)$$

Aufgabe 15. **10 Punkte**

Gegeben seien n Jobs, die jeweils eine Einheit Bearbeitungszeit benötigen. Alle Jobs sind zur Zeit 0 bekannt. Job j hat einen Profit c_j und eine Deadline d_j. Der Profit wird nur verdient, wenn der Job vor der Deadline bearbeitet wurde. Jobs können nicht parallel bearbeitet werden. Das Problem ist eine Reihenfolge der Jobs zu finden, so dass der Profit maximiert wird. Zeigt, dass wenn eine Teilmenge von Jobs fristgerecht bearbeitet werden kann, dann können die Jobs auch in der Reihenfolge ihrer Deadlines rechtzeitig bearbeitet werden. Sei $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ die Menge der Jobs und sei $\mathcal{I} = \{J \subseteq E \mid J \text{ kann rechtzeitig bearbeitet werden}\}$. Zeigt, dass $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid ist und beschreibt wie eine optimale Reihenfolge gefunden werden kann.

Fragen: klug@zib.de