Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
Dr. Axel Werner
Torsten Klug

10. Übungsblatt

Abgabetermin: 1.07.2015 bis 10:15 in MA041

Hinweis: Es wird nur 11 bewertete Übungsblätter geben. Das 12 Blatt wird einer Sammlung von Aufgabe zur Klausurvorbereitung sein.

Aufgabe 29. **10 Punkte**

In dieser Aufgabe sollt ihr euch eine Heuristik für das Steinbaumproblem ausdenken. Gegeben ist eine Menge von Steinerbaum-Probleminstanzen aus der SteinLib `http://steinlib.zib.de/showset.php?ALUE`.

a) Überlegt euch eine Heuristik, die für die gegebenen Instanzen eine möglichst gute Lösung liefert. Wenn möglich nutzt die besondere Struktur der Instanzen aus.

   1. Gebt eine genaue Beschreibung der Heuristik an.
   2. Zeigt, dass eure Heuristik terminiert und immer eine zulässige Lösung liefert.

Programmieraufgabe. **pflicht**

Implementiert eure Heuristik in einer beliebigen Programmiersprache.

1. **Einlesen der Daten** Die Beschreibung des Eingabeformates ist unter `http://steinlib.zib.de/format.php` zu finden.
2. **Aufruf** Das Programm soll sich in der Kommandozeile mit dem Aufruf

   ```
   steinerHeu <Eingabedatei> <Ausgabedatei>
   ```

   ausführen lassen.
3. **Ausgabeformat** Die Lösung soll in eine Datei mit folgendem Format geschrieben werden:

   ```
   <cost>
   <nr edges>
   <u1> <v1>
   <u2> <v2>
   <u3> <v3>
   ...
   ```

Dabei sind `<cost>` die Kosten der Lösung, `<nr edges>` die Anzahl der Kanten in der Lösung und `<u1> <v1> ...` die Aufzählung der Lösungskanten anhand der Endknoten.

4. Schickt euer Programm bis 5.7.2015 an `klug@zib.de`.

Aufgabe 30. **10 Punkte**

Ein Mehrgüterfluss-Problem.
GEGEBEN sind ein gerichteter Graph $G = (V, A)$ mit Kapazitäten $\kappa_a \in \mathbb{R}_+$ und Kosten $c_a \in \mathbb{R}_+$ für alle Bögen $a \in A$ und eine Menge von Gütern $I = \{1, \dots, n\}$. Für jedes Gut $i \in I$ gibt es eine Quelle $s_i \in V$, eine Senke $t_i \in V$ und einen vorgegebenen Flusswert $d_i \in \mathbb{Z}_+$, der von s_i nach t_i transportiert werden soll.

GESUCHT ist ein ganzzahliger (s_i, t_i)-Fluss mit Wert d_i für jedes Gut $i \in I$, so dass die Summe der Bogenkosten minimal ist und die Kapazität jedes Bogens eingehalten wird.

Betrachtet hierfür die folgende IP-Formulierung des Mehrgüterfluss-Problems

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{a \in A} x_a^i c_a \tag{IP}$$

$$\sum_{a \in \delta^+(s_i)} x_a^i = d_i \qquad \forall i \in I \tag{IP.1}$$

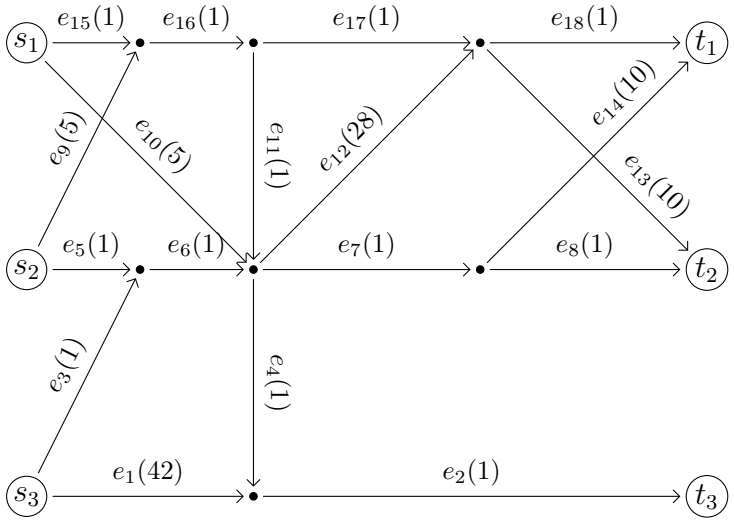
$$\sum_{a \in \delta^-(t_i)} x_a^i = d_i \qquad \forall i \in I \tag{IP.2}$$

$$\sum_{a \in \delta^+(u)} x_a^i - \sum_{a \in \delta^-(u)} x_a^i = 0 \qquad \forall i \; \forall u \in V \setminus \{s_i, t_i\} \tag{IP.3}$$

$$\sum_{i \in I} x_a^i \leq \kappa_a \qquad \forall a \in A \tag{IP.Kapazität}$$

$$x_a^i \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall i \in I \; \forall a \in A$$

Die Variable x_a^i entspricht dem Flusswert von Gut i über die Kante a. Die Gleichung (IP.1) bis (IP.3) sind die Flussgleichungen und (IP.Kapazität) garantiert die Einhaltung der Kapazitäten.



Durch die Benutzung eines Branch & Bound-Verfahrens soll die Optimallösung der IP-Formulierung (IP) für den gegebenen Beispielgraphen und die gegebene Nachfrage gelöst werden. Es gibt 3 Güter für die jeweils ein Flusswert von 1 gefordert ist. Die Kapazität der Bögen sind alle 1 und die Kosten eines Bogens stehen jeweils in Klammern neben dessen Bezeichnung im Beispielgraphen. Für die Berechnung einer unteren Schranke soll die Relaxierung von (IP) genutzt werden, bei der die Kapazitätsungleichungen (IP.Kapazität) vernachlässigt werden. (Die Ganzzahligkeitsbedingung soll erhalten bleiben!)

a) Beschreibt eine geeignete Branchingstrategie für das Problem, d. h. eine geeignete Methode zur Aufteilung eines Teilproblems in weitere Teilprobleme!

b) Führt den Branch & Bound-Algorithmus mit der in a) beschriebenen Branchingstrategie aus! Zeichnet hierzu einen Branch & Bound-Baum, der folgende Informationen enthält:

   - aktueller Lösungswert der Relaxierung (Lösungen gegebenenfalls als Skizze oder Tabelle auf einem separaten Blatt),
   - aktuelle obere und untere Schranken,
   - Reihenfolge der bearbeiteten Branch & Bound-Knoten,
   - Branchingentscheidungen (Was wird wie fixiert oder eingeschränkt?),
   - Warum muss ein Branch & Bound-Knoten gegebenenfalls nicht weiter ausgelotet werden?

Fragen: klug@zib.de