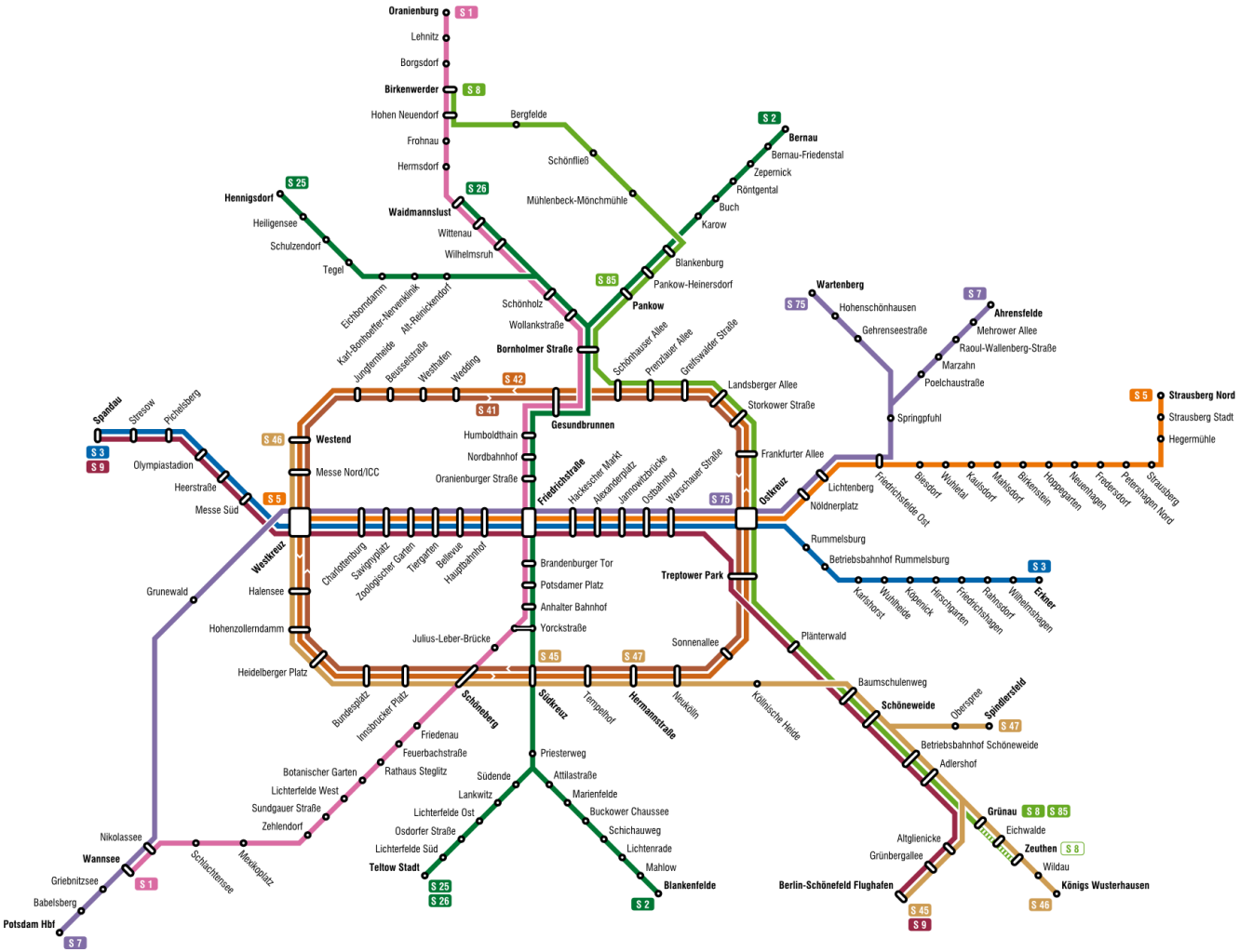
S-Bahn-Challenge

Niels Lindner

Zuse-Institut Berlin

MathInside @ Urania Berlin
23.01.2018

Das Berliner S-Bahn-Netz



Fakten

- 166 Bahnhöfe
- 175 Streckenabschnitte
- 16 Linien
- 327 km Streckenlänge
- $\approx$ 1,2 Mio. Fahrgäste/Tag
- $\approx$ 40 km/h Reisegeschwindigkeit

Daten: S-Bahn Berlin GmbH
Grafik: Arbalete, CC-BY-SA 4.0

S-Bahn-Challenge

Variante 1

Fahre **alle 166 Bahnhöfe** des S-Bahn-Netzes innerhalb kürzester Zeit ab!

Variante 2

Fahre **alle 175 Streckenabschnitte** des S-Bahn-Netzes innerhalb kürzester Zeit ab!

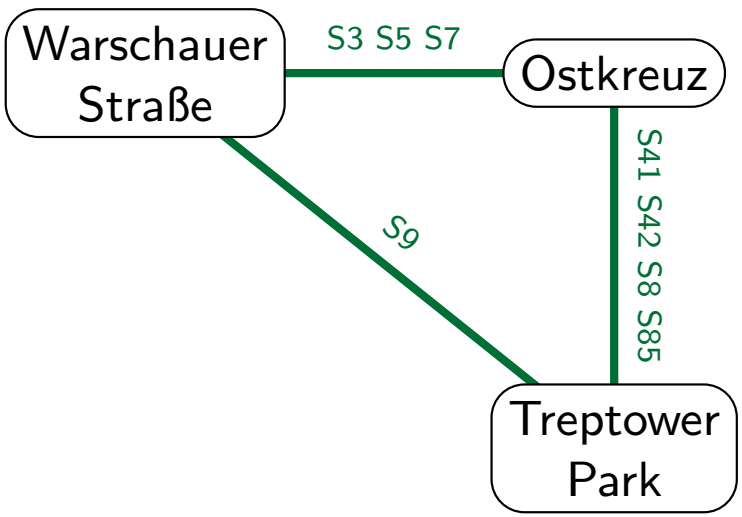
Wie schnell geht das?

Sehr grobe Abschätzung für Variante 2:
327 km Streckenlänge, 40 km/h Reisegeschwindigkeit
$\rightsquigarrow$ mehr als 8 Stunden!

S-Bahn-Challenge: Varianten

Unterschiede

- Werden alle Streckenabschnitte abgefahren, dann werden auch alle Bahnhöfe besucht.
- Variante 1 (alle Bahnhöfe) benötigt nie mehr Zeit als Variante 2 (alle Streckenabschnitte).
- Also geht Variante 1 eventuell schneller als Variante 2.



- Variante 2 braucht alle 3 *Kanten*,
- Variante 1 kommt möglicherweise mit 2 Kanten aus.

S-Bahn-Challenge: Komplexität

Eine Lösung für Variante 1 sieht wie folgt aus:

- Gehe zu Bahnhof 1,
- nimm die kürzeste Route von Bahnhof 1 zu Bahnhof 2,
- nimm die kürzeste Route von Bahnhof 2 zu Bahnhof 3,

  ⋮
- nimm die kürzeste Route von Bahnhof 165 zu Bahnhof 166.

Kombinatorische Explosion

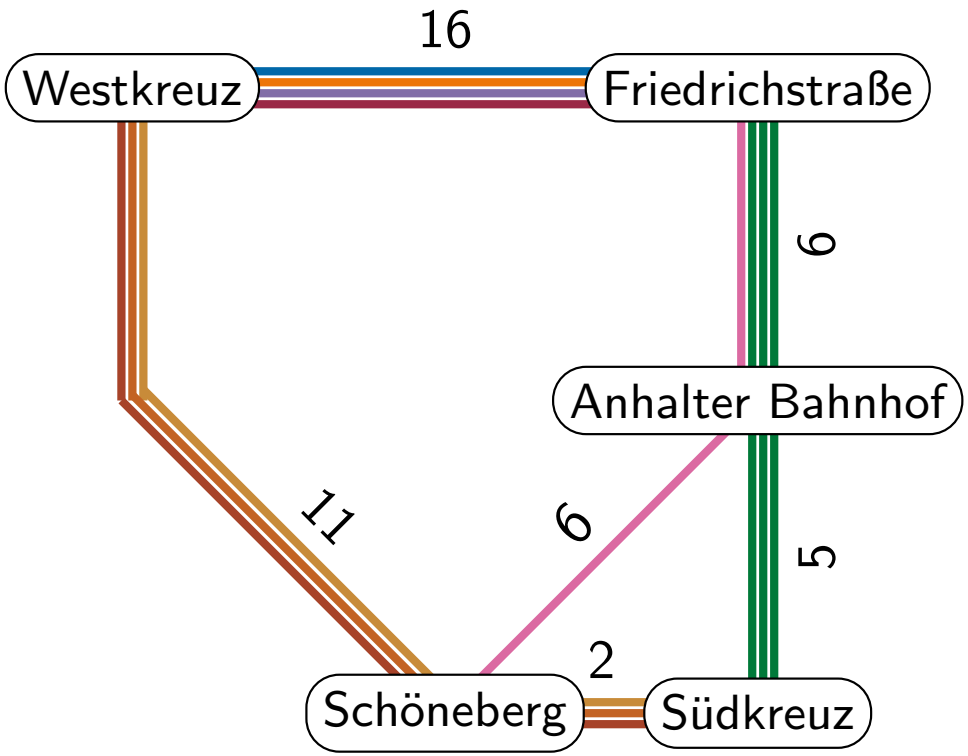
Es gibt $166! \approx 9 \cdot 10^{297}$ Möglichkeiten, die Bahnhöfe anzuordnen.

Es ist also nicht sinnvoll, einfach alle Möglichkeiten auszurechnen und dann die kürzeste zu nehmen.

Routenplanung

Frage

Was ist die schnellste Route von Bahnhof A zu Bahnhof B?



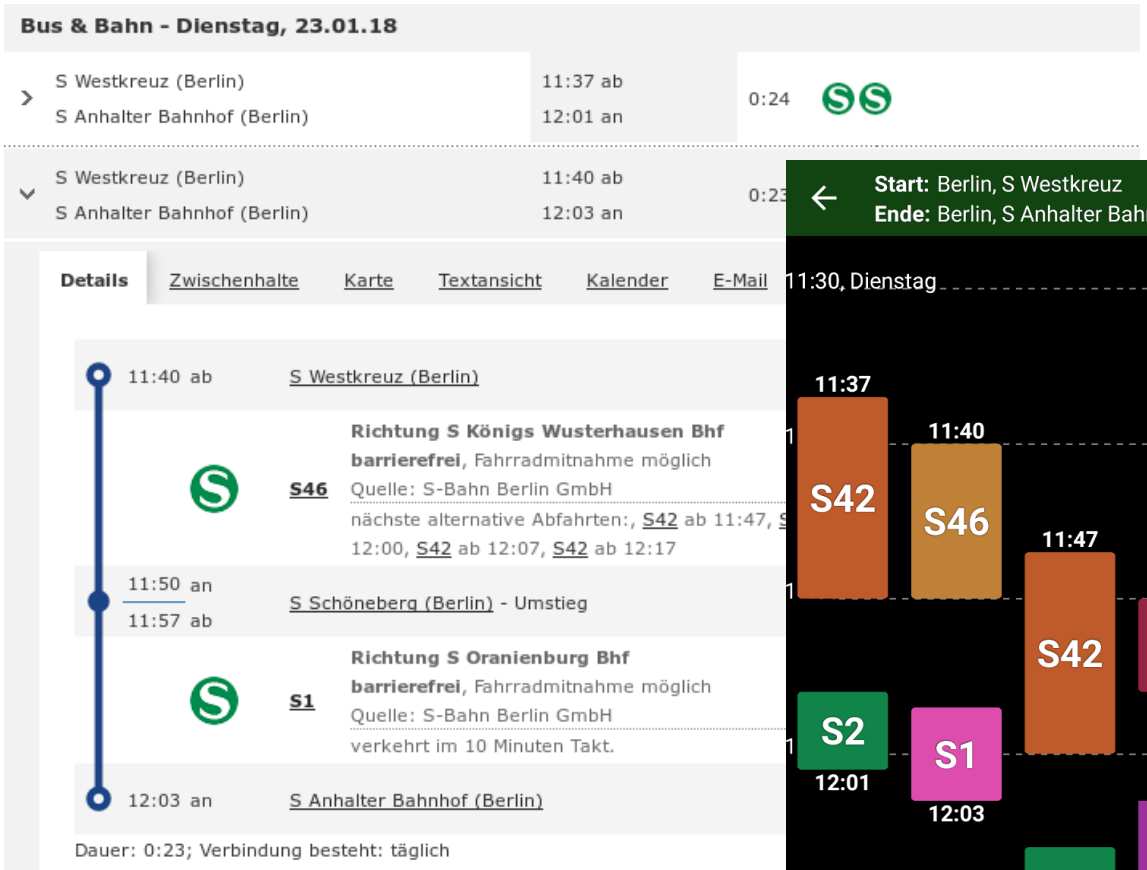
Beispiel

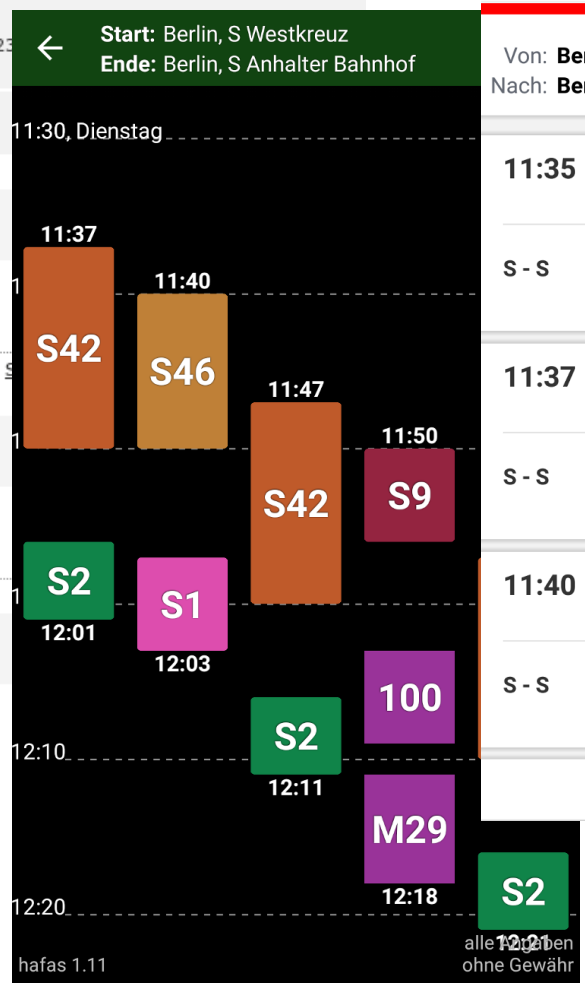
von: Westkreuz
nach: Anhalter Bahnhof

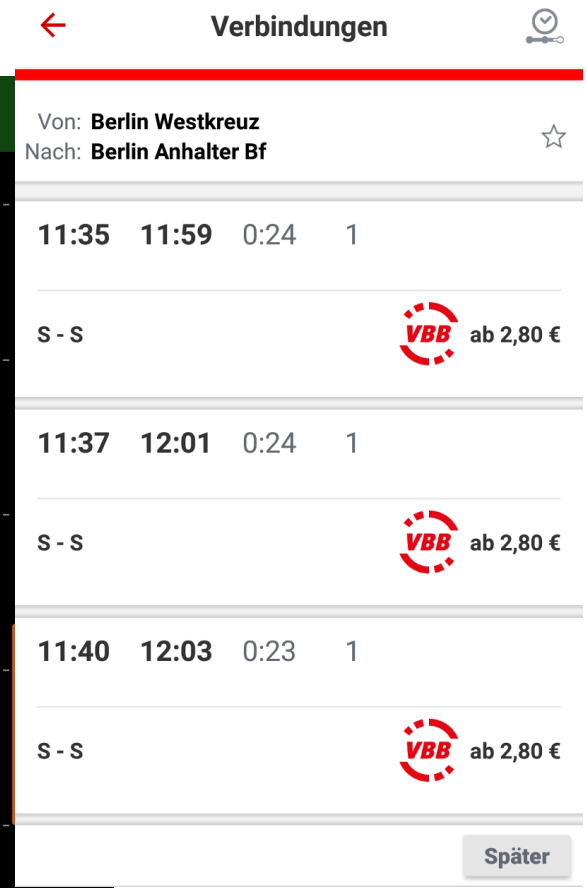
Reine Fahrzeiten

via Schöneberg: 17'
via Südkreuz: 18'
via Friedrichstraße: 24'

Routenplanung: Praxis







S-Bahn-Fahrplanauskunft,
Apps *Öffi* und *DB Navigator*

Routenplanung: Theorie

Faktoren:

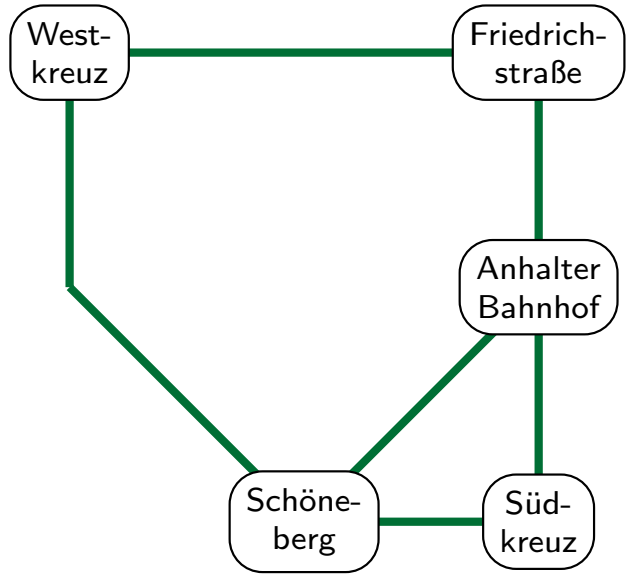
- Fahrzeiten
- Umsteigezeiten
- Wartezeiten
- Uhrzeit/Wochentag
- Bauarbeiten
- Störungen
- Fahrpreise
- Multimodalität
- ...

Mathematik

- **Problem des kürzesten Weges**
- klassisches Problem der Graphentheorie
- viele Lösungsmethoden:
  von einfach (Dijkstra-Algorithmus)
  bis komplex (Transfer Patterns)
- effizient lösbar:
  Berechnung dauert nur wenige Millisekunden

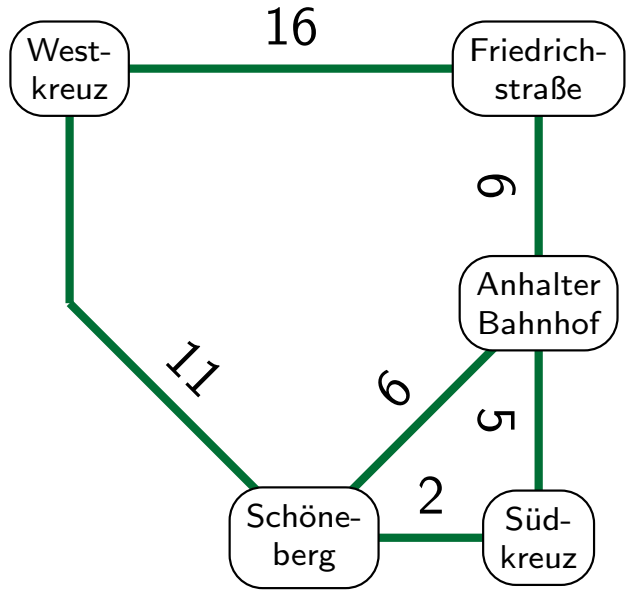
Informelle Definitionen

- Ein **Graph** ist eine Menge von *Knoten* (aka: Bahnhöfe), die durch *Kanten* (aka: Streckenabschnitte) verbunden sind.



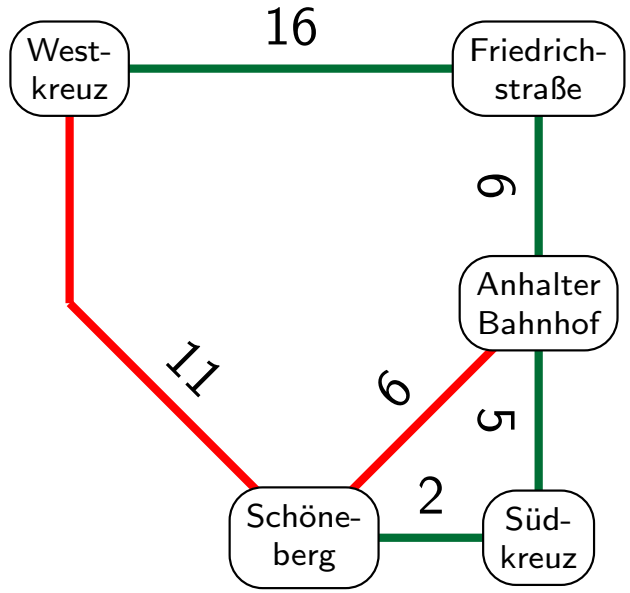
Informelle Definitionen

- Ein **Graph** ist eine Menge von *Knoten* (aka: Bahnhöfe), die durch *Kanten* (aka: Streckenabschnitte) verbunden sind.
- In einem **kantengewichteten Graphen** ist zu jeder Kante eine Zahl - das *Gewicht* - gegeben.



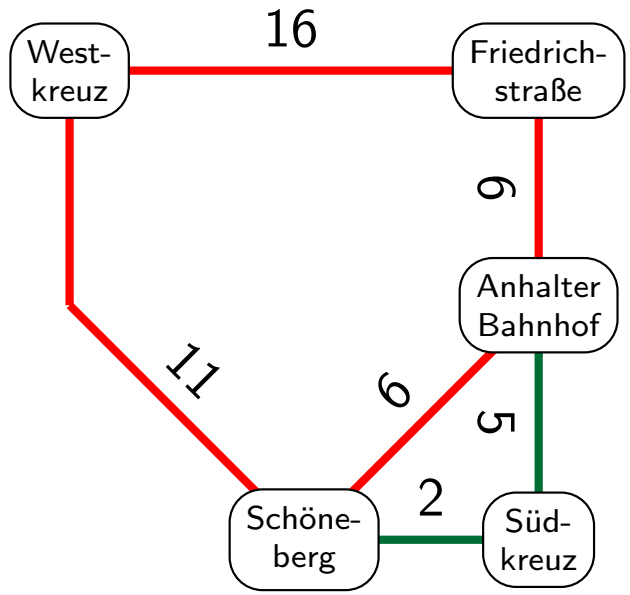
Informelle Definitionen

- Ein **Graph** ist eine Menge von *Knoten* (aka: Bahnhöfe), die durch *Kanten* (aka: Streckenabschnitte) verbunden sind.
- In einem **kantengewichteten Graphen** ist zu jeder Kante eine Zahl - das *Gewicht* - gegeben.
- Ein **Weg** ist eine Folge von miteinander verbundenen Knoten.



Informelle Definitionen

- Ein **Graph** ist eine Menge von *Knoten* (aka: Bahnhöfe), die durch *Kanten* (aka: Streckenabschnitte) verbunden sind.
- In einem **kantengewichteten Graphen** ist zu jeder Kante eine Zahl - das *Gewicht* - gegeben.
- Ein **Weg** ist eine Folge von miteinander verbundenen Knoten.
- Ein **Kreis** ist ein Weg, bei dem Start und Ziel übereinstimmen.



Graphentheoretische Probleme

Problem des kürzesten Weges

Finde in einem kantengewichteten Graphen den bezüglich der Gewichte kürzesten Weg von einem Knoten zu einem anderen.

Problem des Handlungsreisenden (Traveling Salesman Problem)

Finde in einem kantengewichteten Graphen den bezüglich der Gewichte kürzesten Kreis (oder Weg), der **alle Knoten** besucht.
$\rightsquigarrow$ Variante 1 der S-Bahn-Challenge!

Briefträgerproblem (Chinese Postman Problem)

Finde in einem kantengewichteten Graphen den bezüglich der Gewichte kürzesten Kreis (oder Weg), der **alle Kanten** besucht.
$\rightsquigarrow$ Variante 2 der S-Bahn-Challenge!

Handlungsreisender und Briefträger

Variante 1

- Alle Knoten besuchen: Handlungsreisendenproblem
- **kein** effizienter Algorithmus bekannt
- nur „kleine“ Probleme lösbar
- Rekord: 85.900 Knoten (14 Monate auf 128 Rechnern)

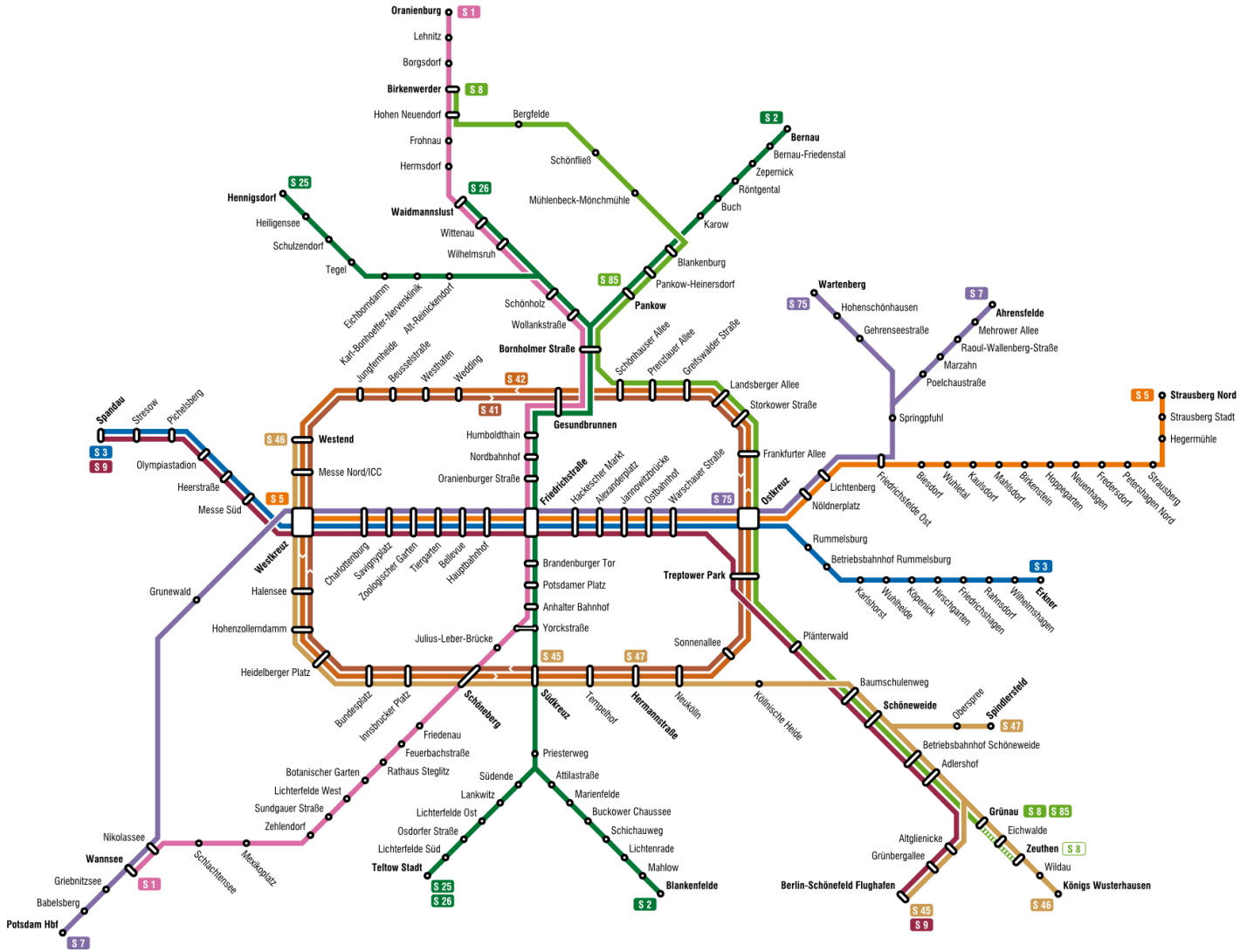
Variante 2

- Alle Kanten besuchen: Briefträgerproblem
- effiziente Algorithmen bekannt
- auch „größere“ Probleme praktisch lösbar

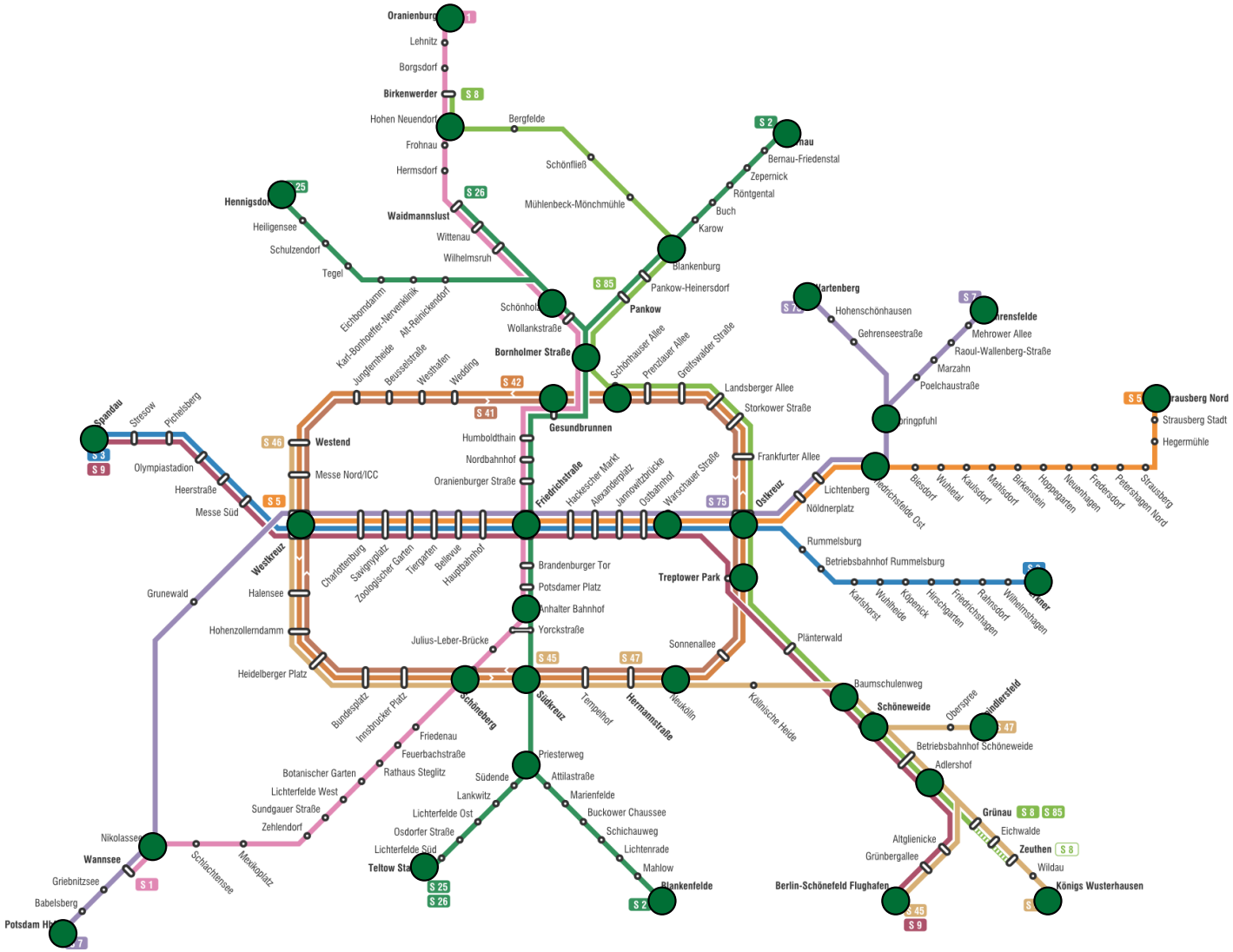
P-vs.-NP-Problem

Gibt es einen effizienten Algorithmus für das Problem des Handlungsreisenden? Eine korrekte Lösung dieses *Millenium-Problems* wäre 1.000.000 US-Dollar wert!

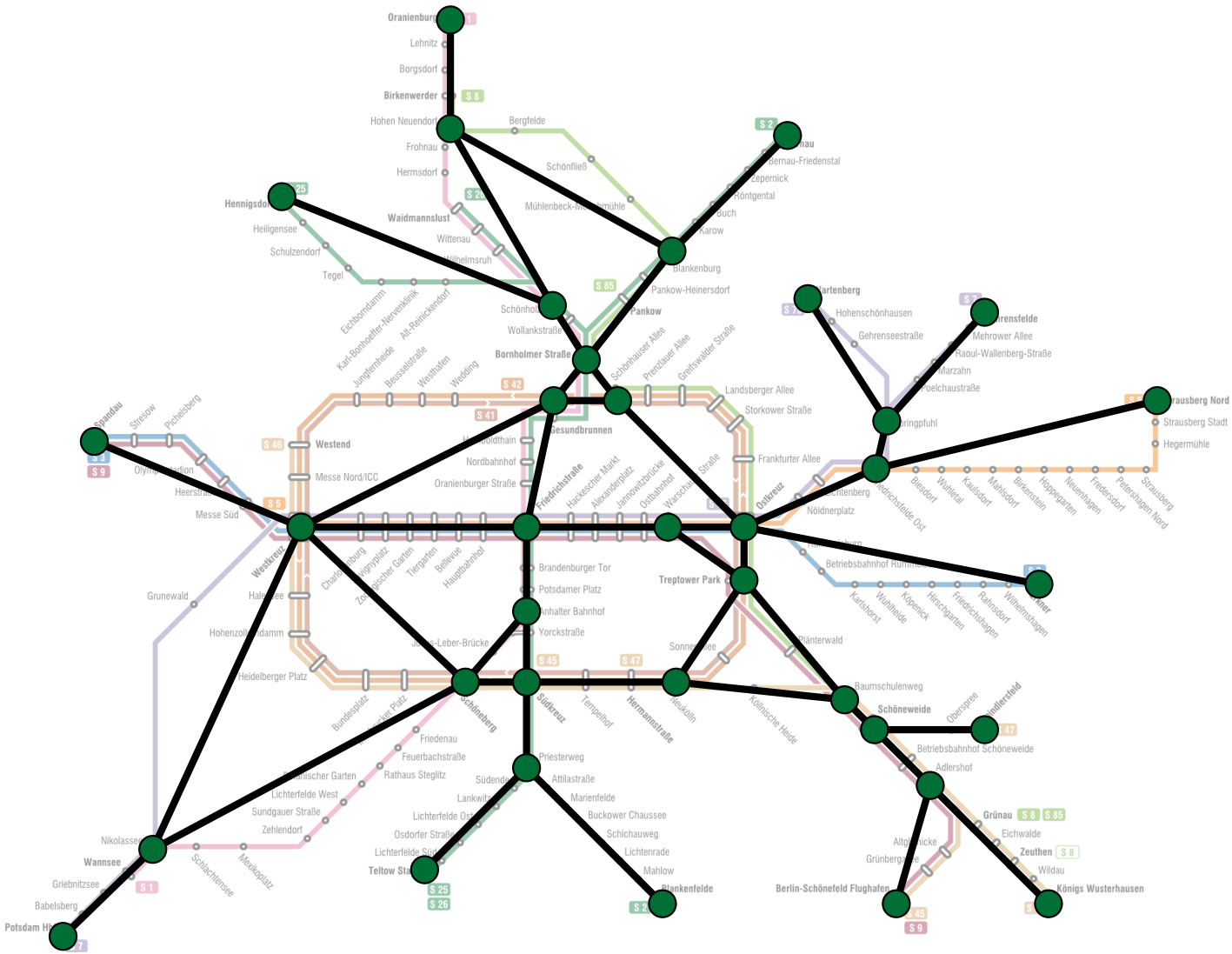
Vereinfachung: Variante 2



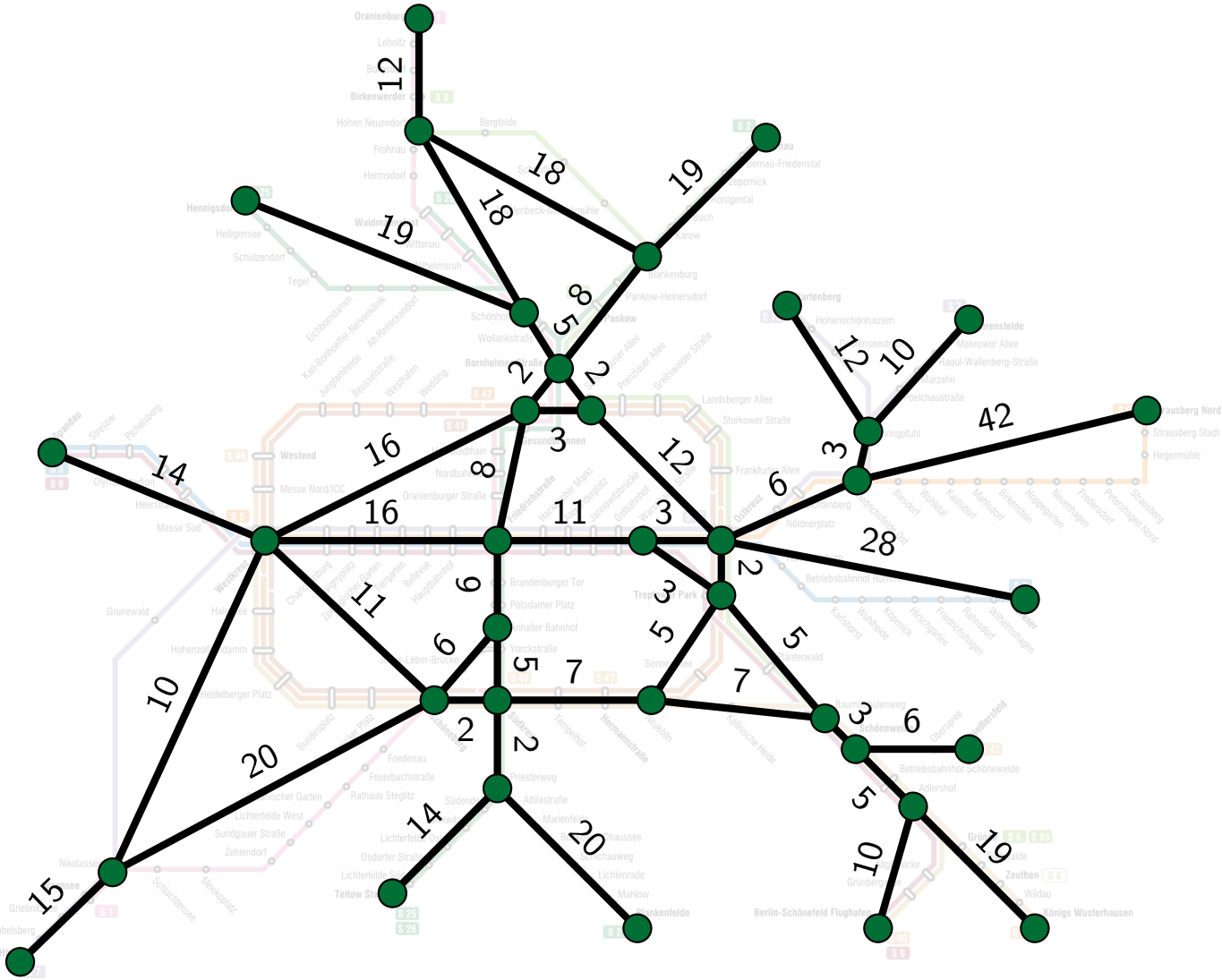
Vereinfachung: Variante 2



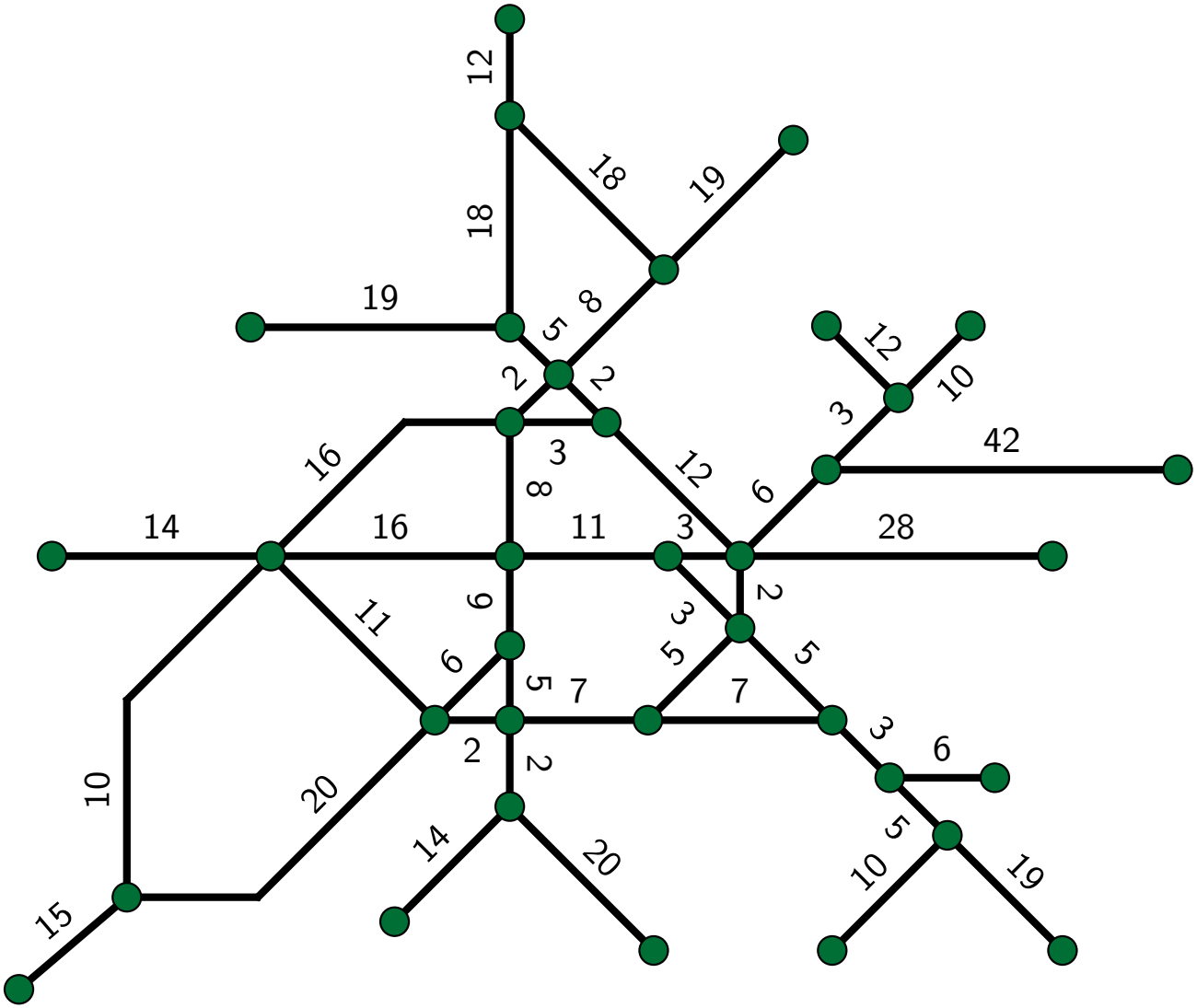
Vereinfachung: Variante 2



Vereinfachung: Variante 2



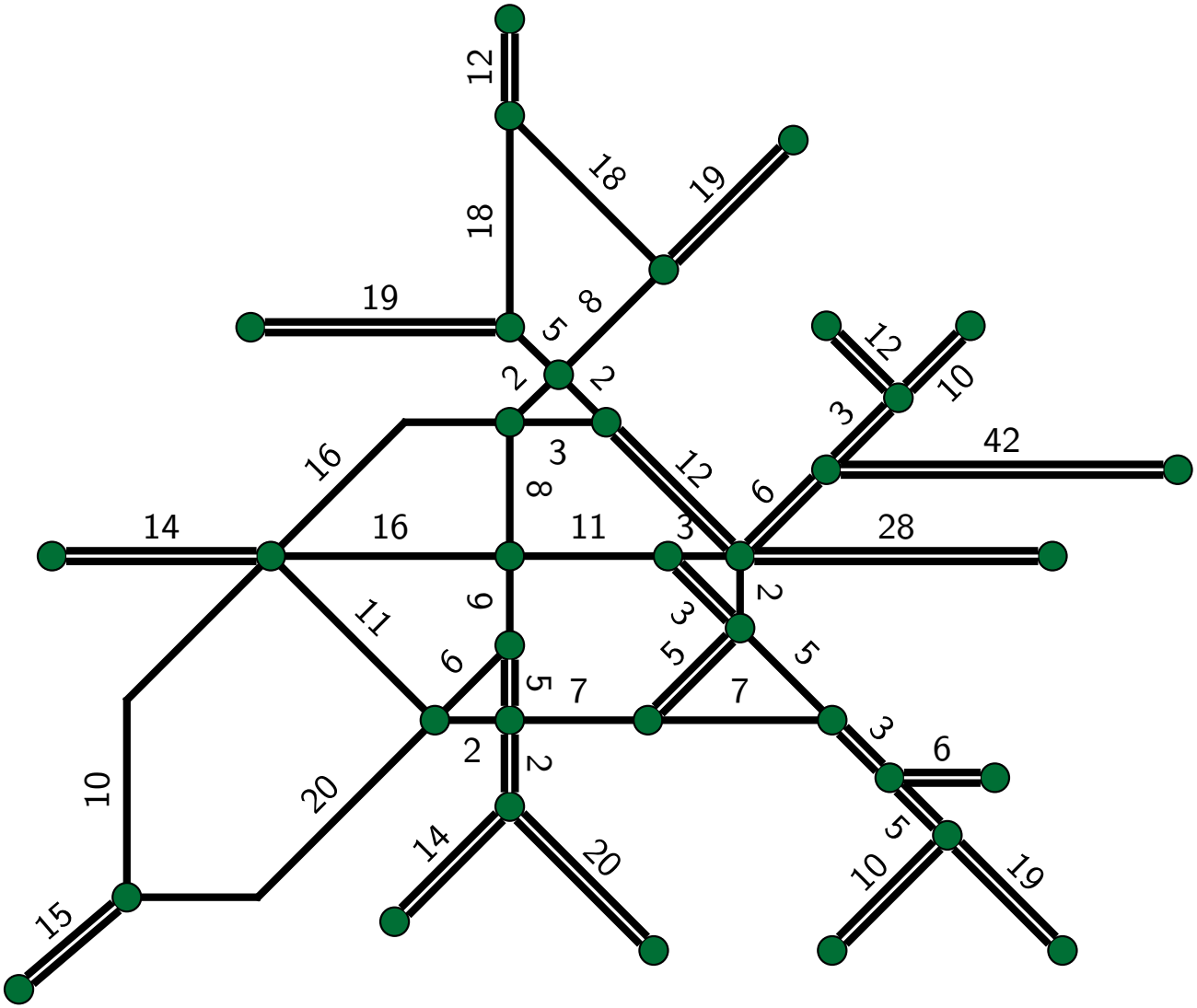
Vereinfachung: Variante 2



Verkleinertes Netz:

- 36 Knoten
- 45 Kanten

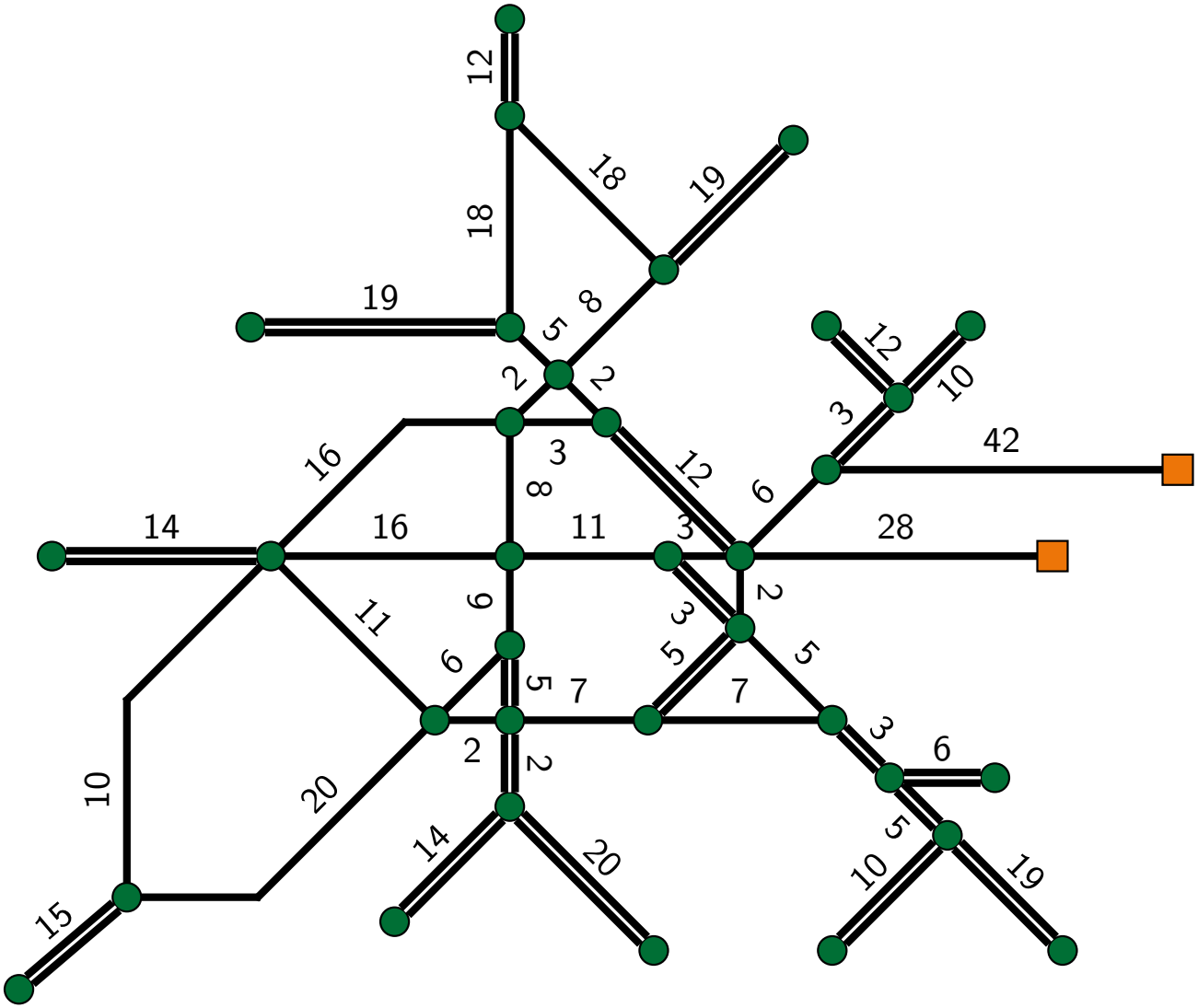
Lösung des Briefträgerproblems (Kreis)



Kürzester Kreis (alle Kanten):

12:34 Stunden (245 ms)

Lösung des Briefträgerproblems (Weg)



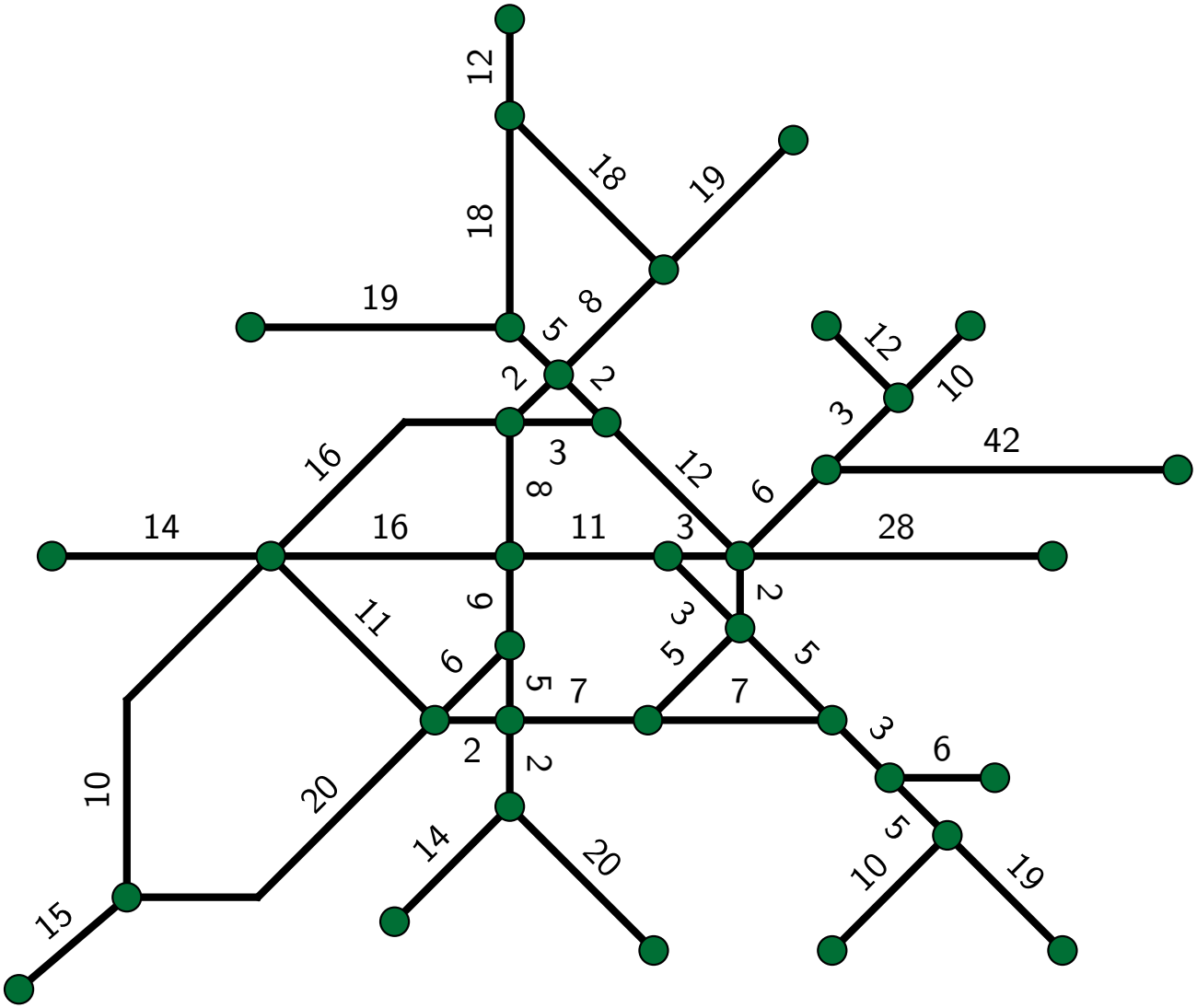
Kürzester Weg (alle Kanten):

11:18 Stunden (250 ms)

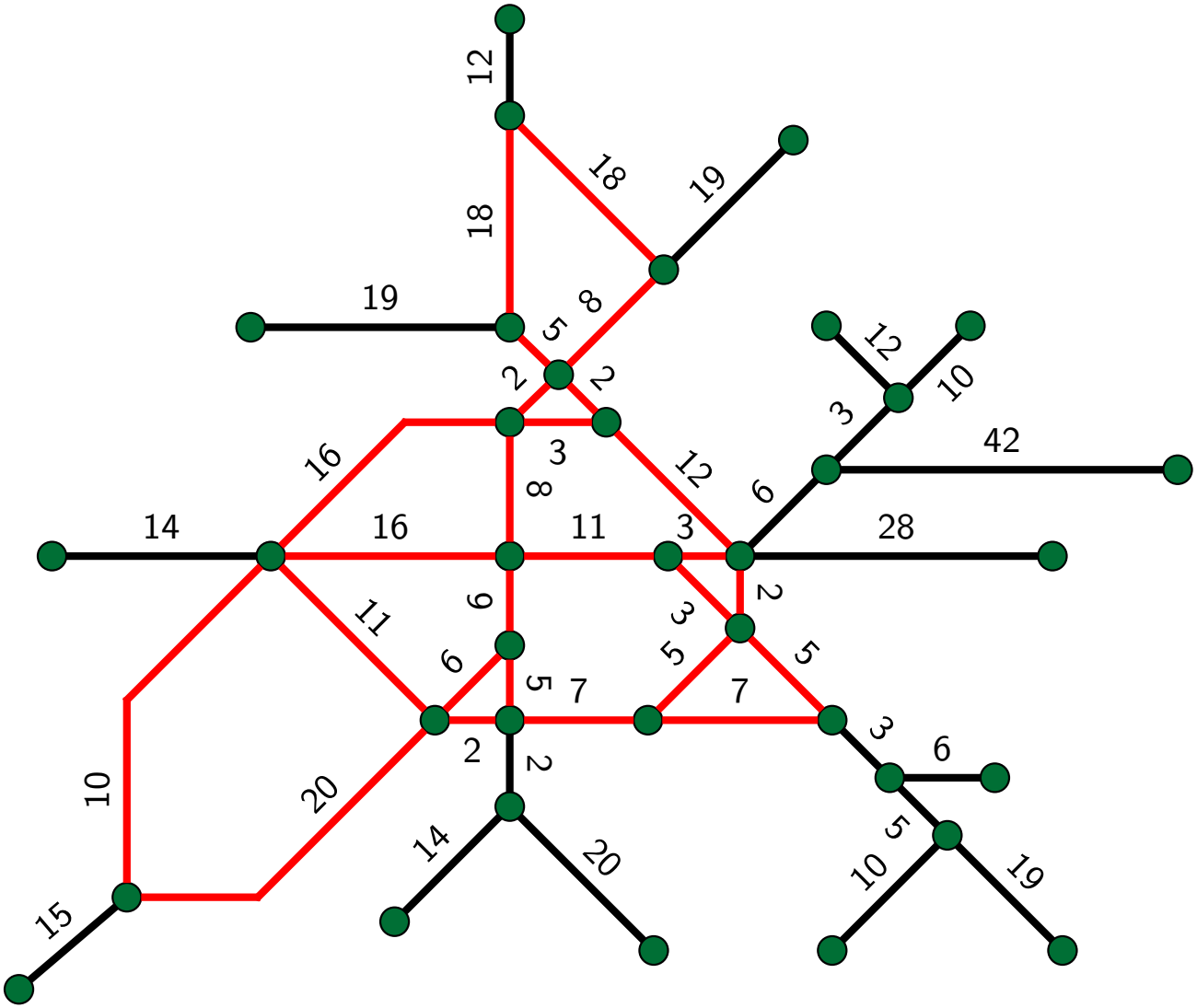
Lösung des Handlungsreisendenproblems

- Für Variante 1 (alle Knoten) kann die Vereinfachung dazu führen, dass Bahnhöfe ausgelassen werden.
- Wird eine Kante nicht besucht, so werden auch die Zwischenhalte nicht angefahren.
- Die Zwischenhalte können also nur auf den Kanten entfernt werden, die in jedem Fall benutzt werden müssen.
  Das sind z. B. die Kanten zu den Streckenenden.

Vereinfachung: Variante 1

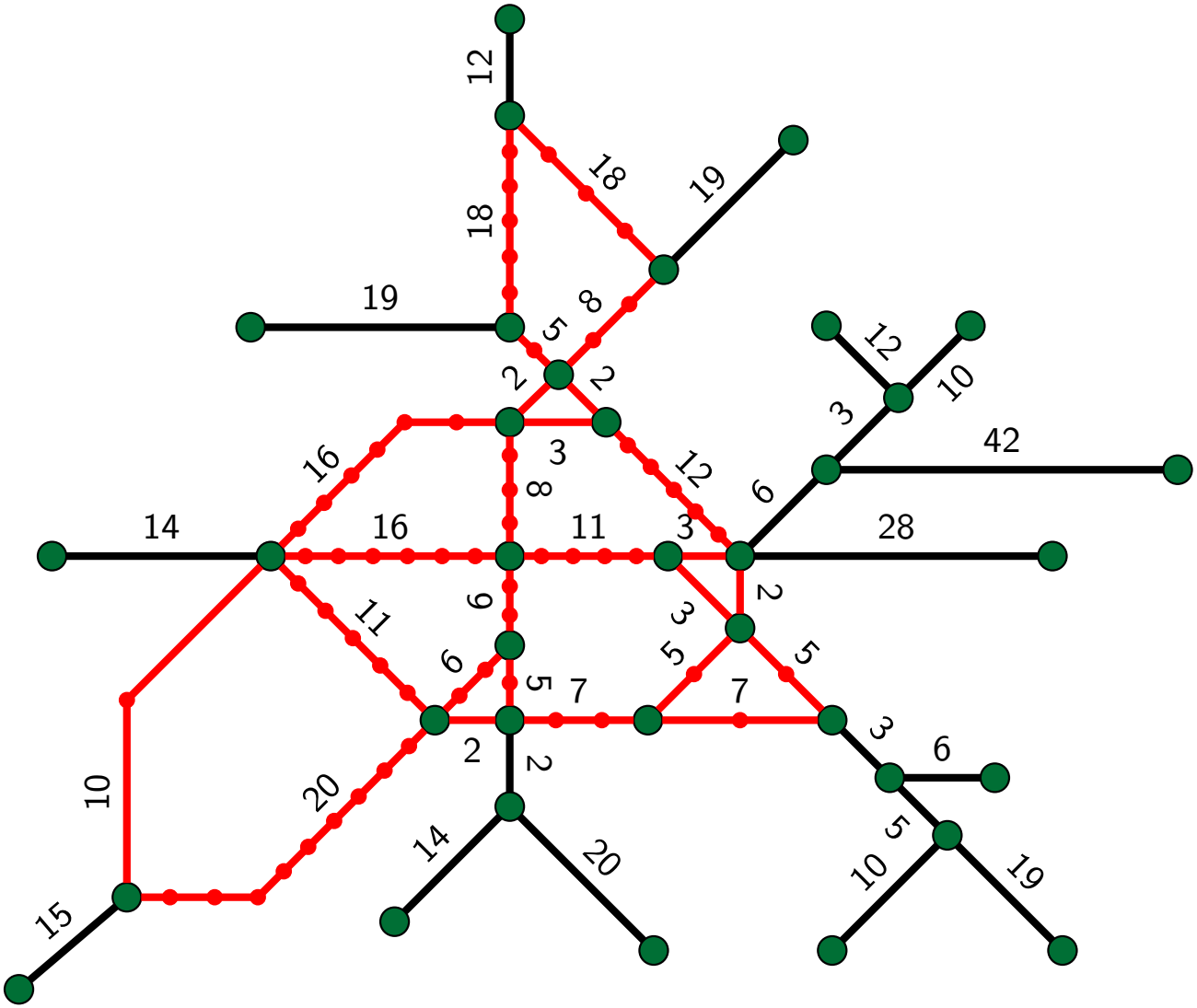


Vereinfachung: Variante 1



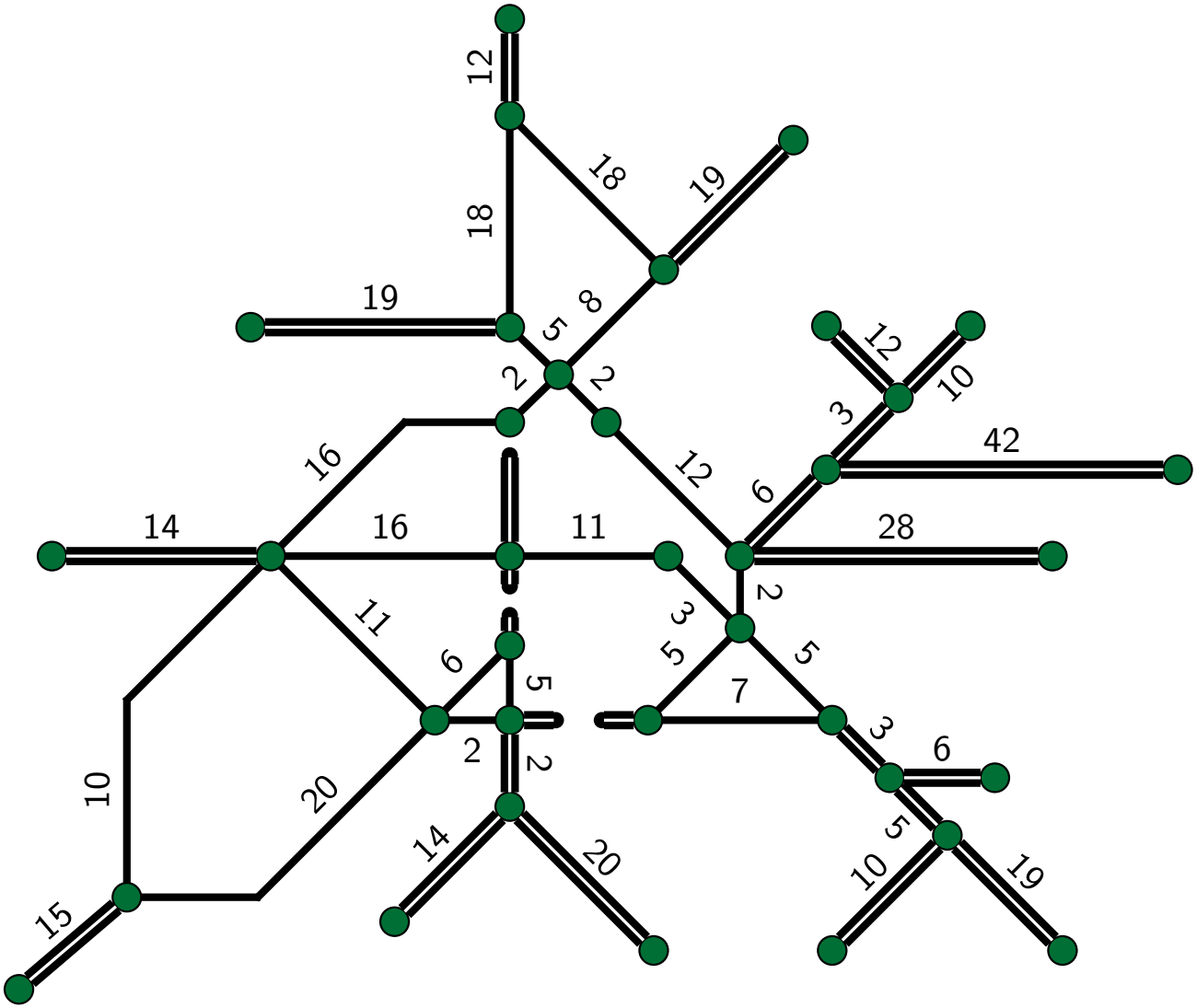
- Bahnhöfe auf roten Kanten beibehalten

Vereinfachung: Variante 1



- Bahnhöfe auf roten Kanten beibehalten
- 96 Knoten
- 105 Kanten

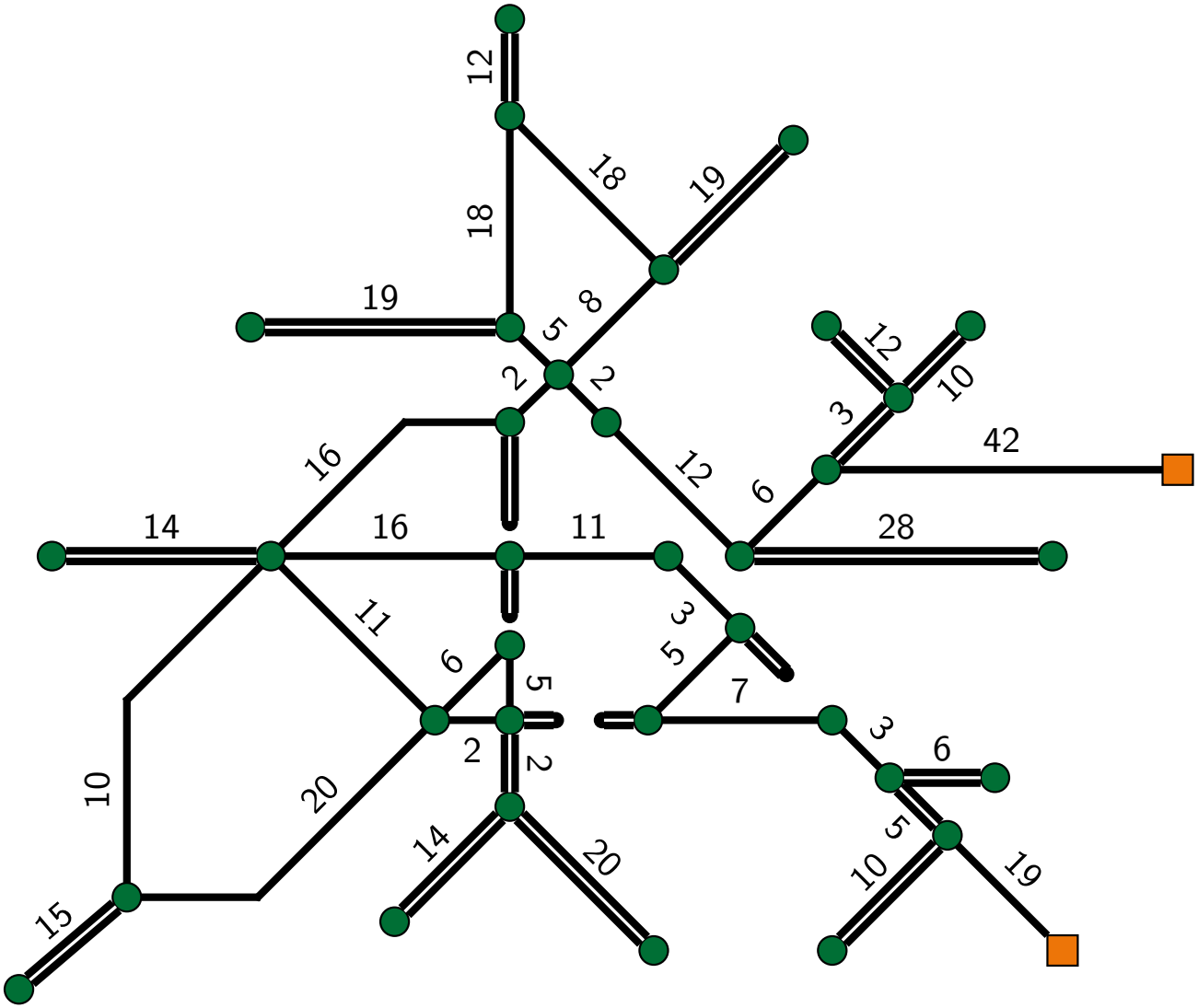
Lösung des Handlungsreisendenproblems (Kreis)



Kürzester Kreis (alle Knoten):

12:08 Stunden (3,4 s)

Lösung des Handlungsreisendenproblems (Weg)



Kürzester Weg (alle Knoten):

10:50 Stunden (1,1 s)

Zusammenfassung

	Variante 1	Variante 2
Ziel	alle Knoten besuchen	alle Kanten besuchen
Netzgröße	166 Knoten 175 Kanten	
nach Reduktion	96 Knoten 105 Kanten	36 Knoten 45 Kanten
Kürzester Kreis	12:08 h	12:34 h
Kürzester Weg	10:50 h	11:18 h
Rechenzeit	$1,1$ s/$3,4$ s	$0,25$ s/$0,25$ s

War das schon alles?

Frage

Sind die bisherigen Lösungsansätze praxistauglich?

Antwort

Eher nicht. Denn es fehlen z. B.:

- Umsteigezeiten:
  Wie lange braucht man von Gleis 1 zu Gleis 2?
- Wartezeiten:
  Wann kommt der nächste Zug? ← Abfahrts-, Ankunfts-, Umsteigezeit
- Fahrzeiten
  Wie lange dauert die Fahrt zwischen A und B? ← Richtung, Linie

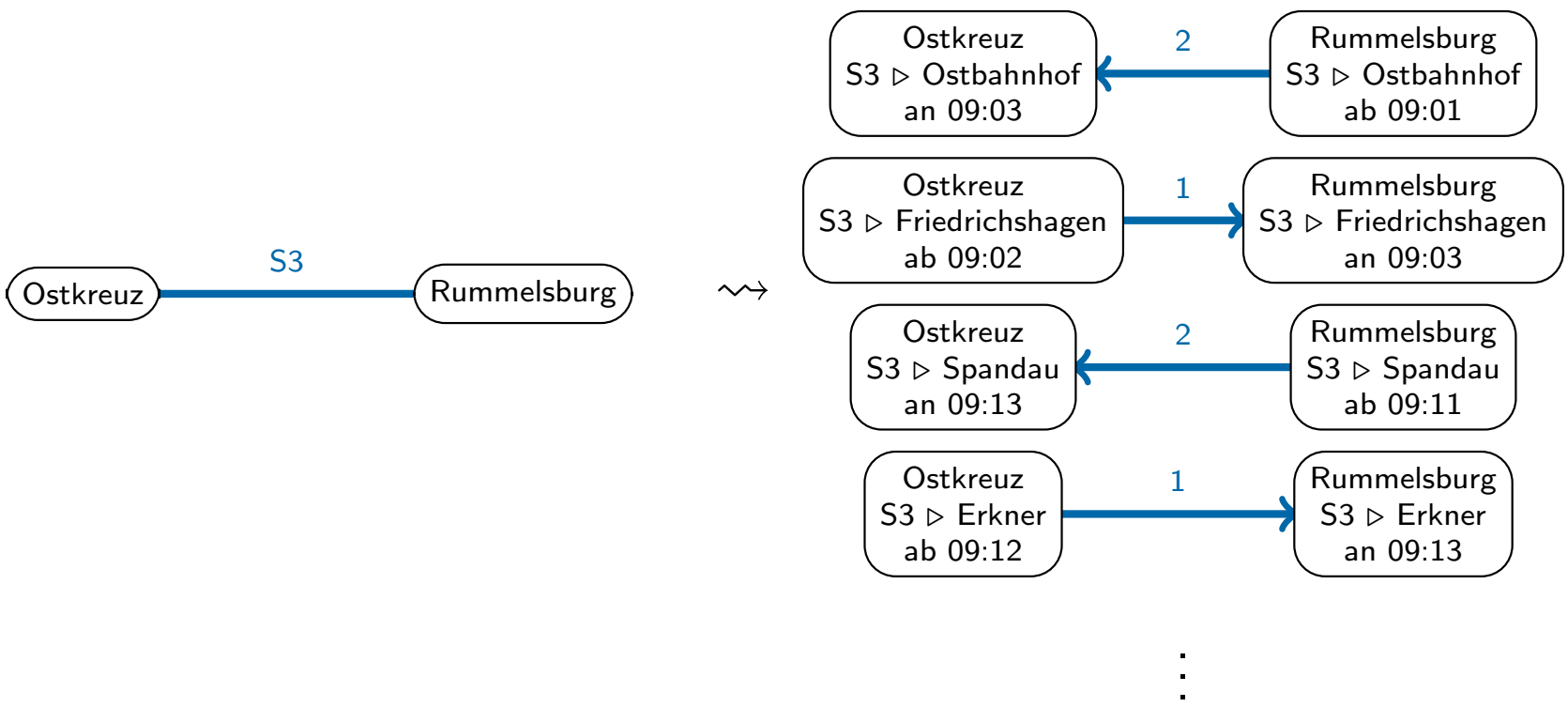
Idee

Erstelle ein **fahrplanbasiertes Modell**!

Zeitexpansion von Graphen

Schritt 1

Jede im Fahrplan hinterlegte Fahrt zwischen zwei benachbarten Bahnhöfen erhält je einen **Abfahrts-** und **Ankunftsknoten**, die durch eine *gerichtete* Kante (*Fahrtkante*) verbunden sind.

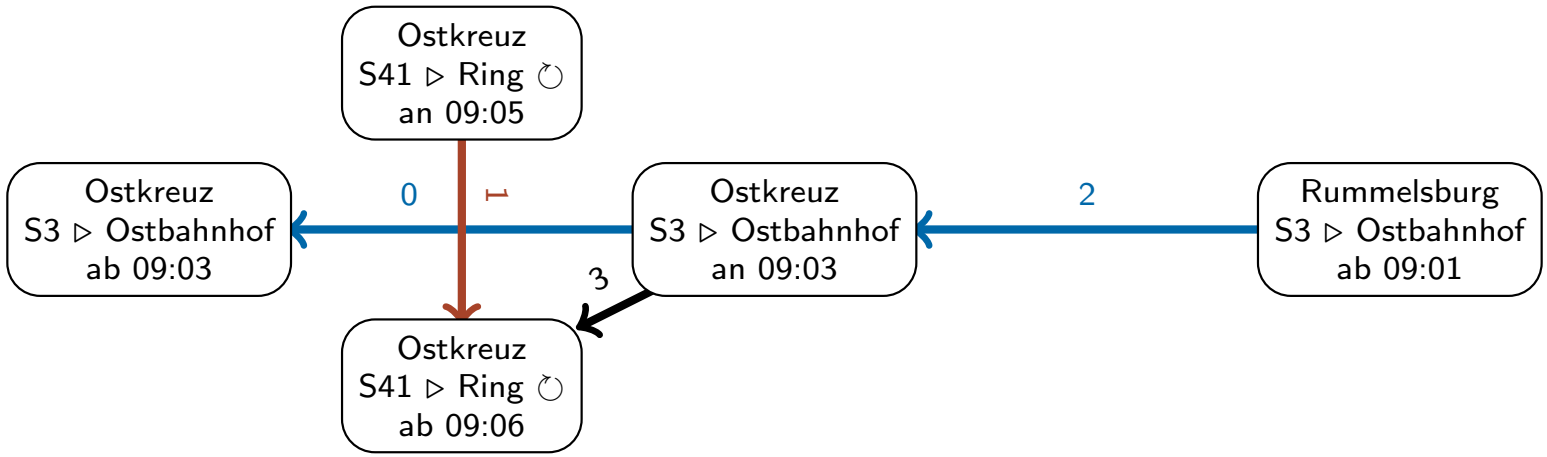


Zeitexpansion von Graphen

Schritt 2

Jeder Ankunftsknoten in einem Bahnhof wird mit jedem Abfahrtsknoten verbunden, sofern:

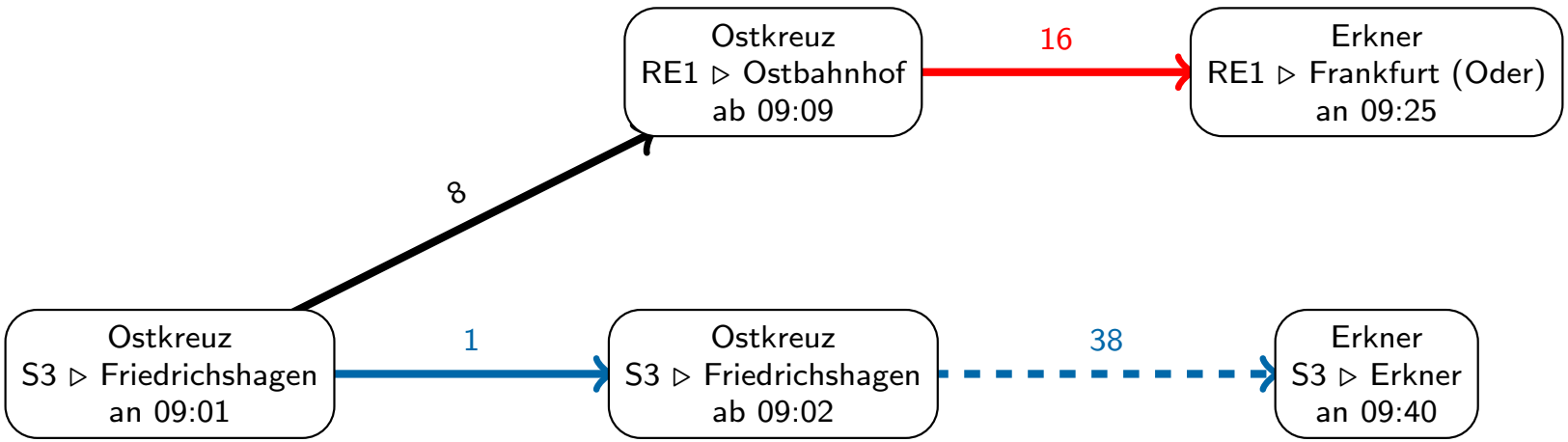
- genug Umsteigezeit vorhanden ist (*Umsteigekante*) oder
- nicht umgestiegen werden muss (*Wartekante*).



Zeitexpansion von Graphen

Schritt 3

Füge Fußwege oder weitere Verkehrsmittel hinzu (*Abkürzungskanten*).



Ergebnis

Das Ergebnis ist ein **zeitexpandierter Graph**.

Probleme in zeitexpandierten Graphen

Problem des kürzesten Weges

Finde in einem zeitexpandierten Graphen den kürzesten Weg von einem Knoten zu einem anderen.
$\rightsquigarrow$ genau das machen Routenplaner für öffentliche Verkehrsmittel!

Verallgemeinertes Problem des Handlungsreisenden

Finde in einem zeitexpandierten Graphen den kürzesten Weg, der aus gegebenen Knotenmengen jeweils mindestens einen Knoten besucht.
$\rightsquigarrow$ S-Bahn-Challenge, Variante 1: Besuche für jeden Bahnhof mindestens einen Abfahrts- oder Ankunftsknoten.

Verallgemeinertes Briefträgerproblem

Finde in einem kantengewichteten Graphen den kürzesten Weg, der aus gegebenen Kantenmengen jeweils mindestens eine Kante besucht.
$\rightsquigarrow$ S-Bahn-Challenge, Variante 2: Besuche für alle Paare benachbarter Bahnhöfe mindestens eine Fahrtkante.

Probleme in zeitexpandierten Graphen

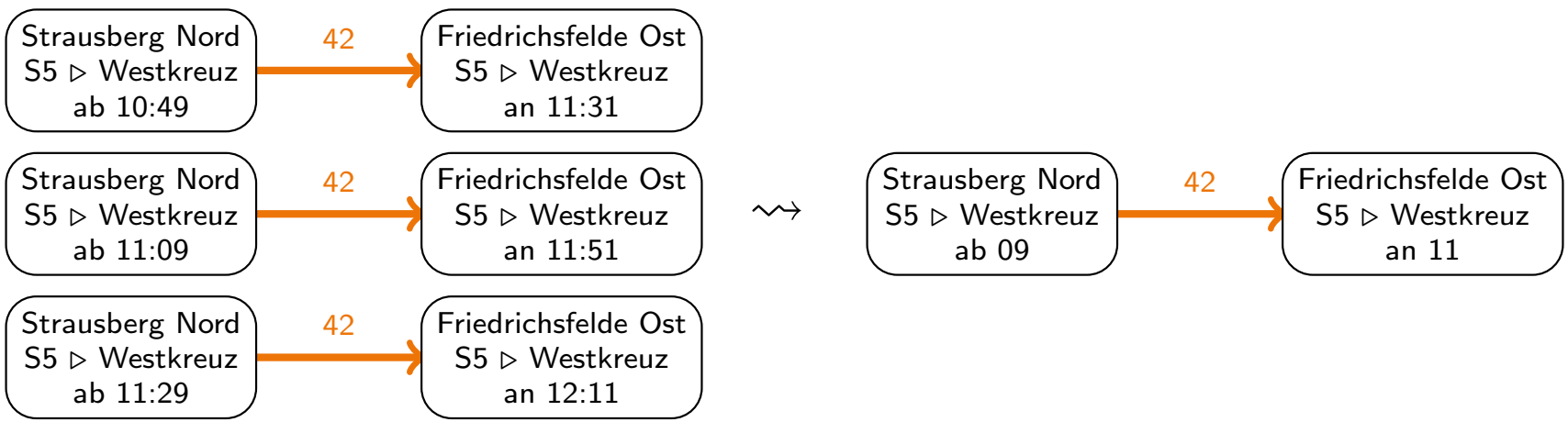
- Bei Variante 2 spielt keine Rolle, ob Umsteige-, Warte- oder Abkürzungskanten auch tatsächlich benutzt werden.
- Wichtig ist nur, dass über jede Kante im ursprünglichen S-Bahn-Netz mindestens einmal gefahren wird - also mindestens eine zugehörige Fahrtkante besucht wird.
- In diesem komplizierteren Modell ist für **keine der beiden Varianten** ein effizienter Algorithmus bekannt ($\rightsquigarrow$ P-vs.-NP-Problem).
- Daher ist ein möglichst „kleiner“ Graph nötig.
- Der S-Bahn-Fahrplan für 24 Stunden produziert etwa 3.000 Knoten - **alleine am Bahnhof Ostkreuz!**
- Reduktionsstrategien?

Periodische Fahrpläne

Idee

Der Fahrplan der S-Bahn ist **periodisch**:
Er wiederholt sich im Wesentlichen alle 20 Minuten.

- Damit kann die Uhrzeit der Abfahrts- und Ankunftsknoten durch eine natürliche Zahl zwischen 0 und 19 ersetzt werden.
- Die Fahr-, Umsteige- und Wartezeiten bleiben gleich.



Periodische Fahrpläne

Ergebnis

- Ostkreuz produziert dann statt 3.000 nur noch 42 Knoten.
- Bei Variante 2 - dem verallgemeinerten Briefträgerproblem - entsteht ein Graph mit insgesamt 530 Knoten und 3.554 Kanten.
- Dabei wurden wieder alle Bahnhöfe, an denen weder eine Strecke endet noch sinnvoll umgestiegen werden kann, aus dem Netz entfernt.
- Dieses Problem kann in ein (normales) Handlungsreisendenproblem mit 530 Knoten umgewandelt werden $\rightsquigarrow$ praktisch lösbar!
- Rechenzeit: 58 s (Optimalitätsbeweis: 317 s)
- Variante 1 erzeugt auch mit Vereinfachungen ein (normales) Handlungsreisendenproblem mit 2.790 Knoten - das ist „zu groß“!
- Nach einer Stunde Rechenzeit dauert die berechnete Route etwa *zwei Stunden länger* als bei Variante 2.

Lösung des verallg. Briefträgerproblems (Weg)

Kürzester Weg (alle Fahrtkanten):

00:00 Stunden

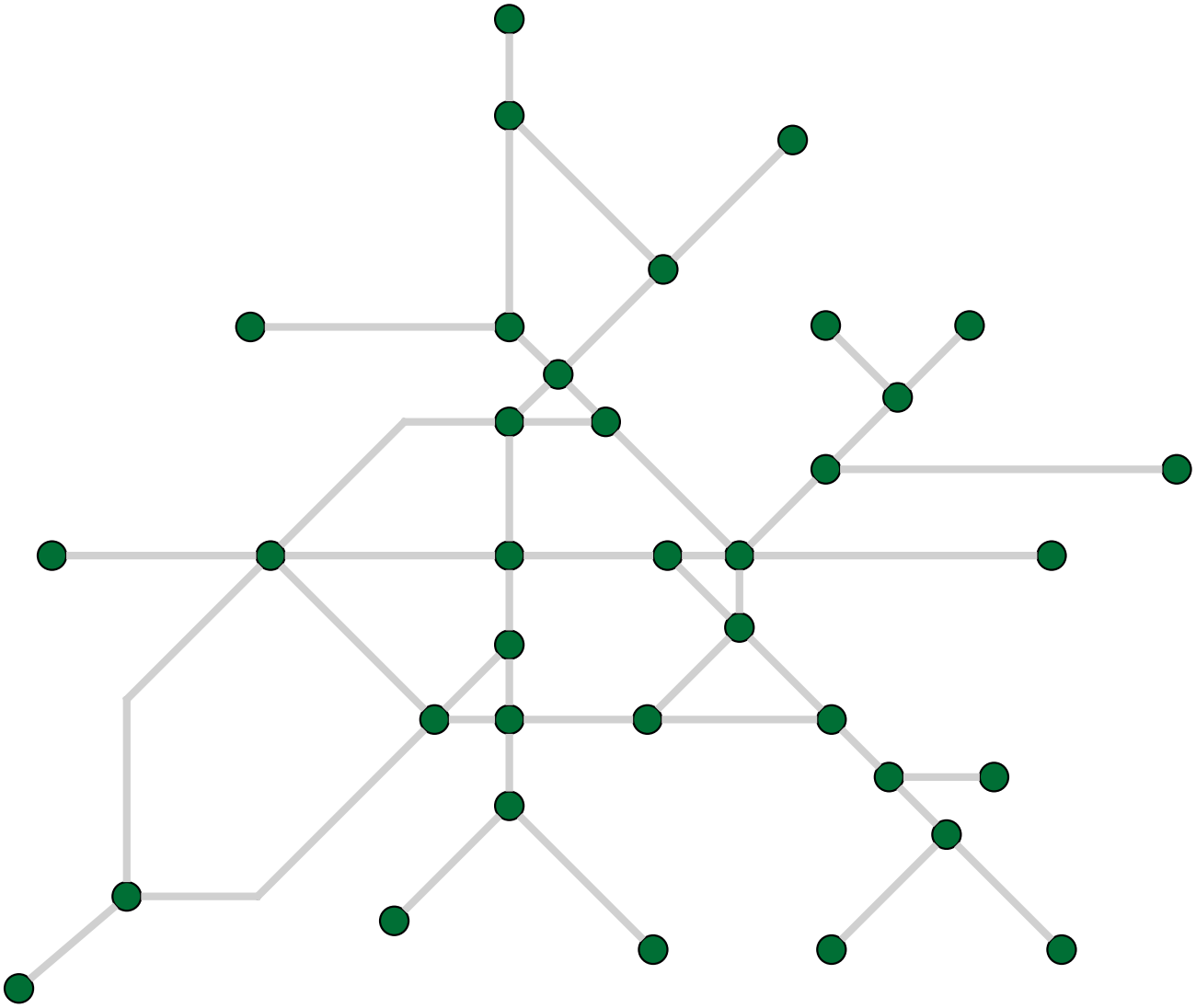
davon reine Fahrzeit:

00:00 Stunden

davon Umsteige- bzw. Wartezeit:

00:00 Stunden

Lösung des verallg. Briefträgerproblems (Weg)



Kürzester Weg (alle Fahrtkanten):

00:00 Stunden

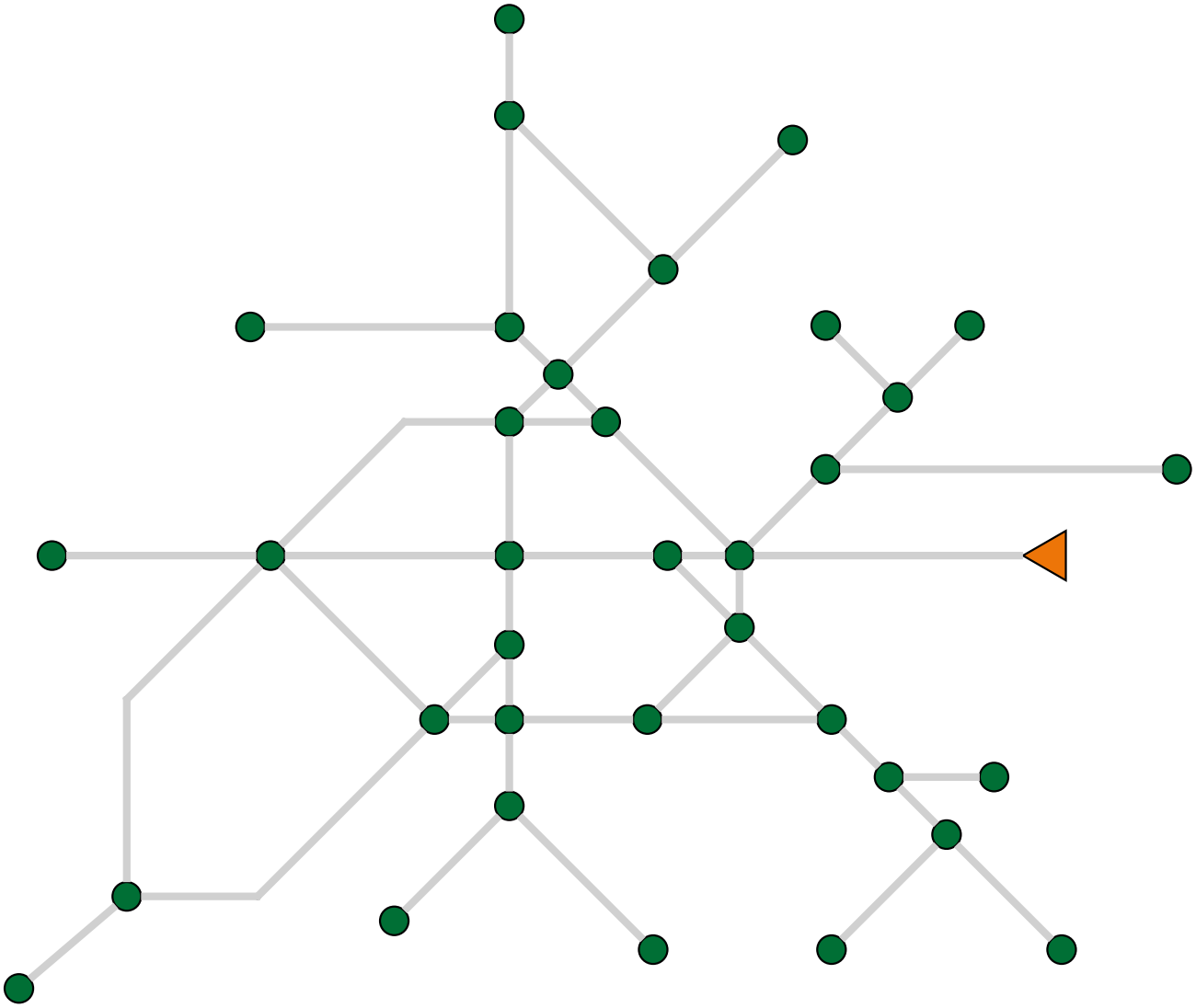
davon reine Fahrzeit:

00:00 Stunden

davon Umsteige- bzw. Wartezeit:

00:00 Stunden

Lösung des verallg. Briefträgerproblems (Weg)



Kürzester Weg (alle Fahrtkanten):

00:00 Stunden

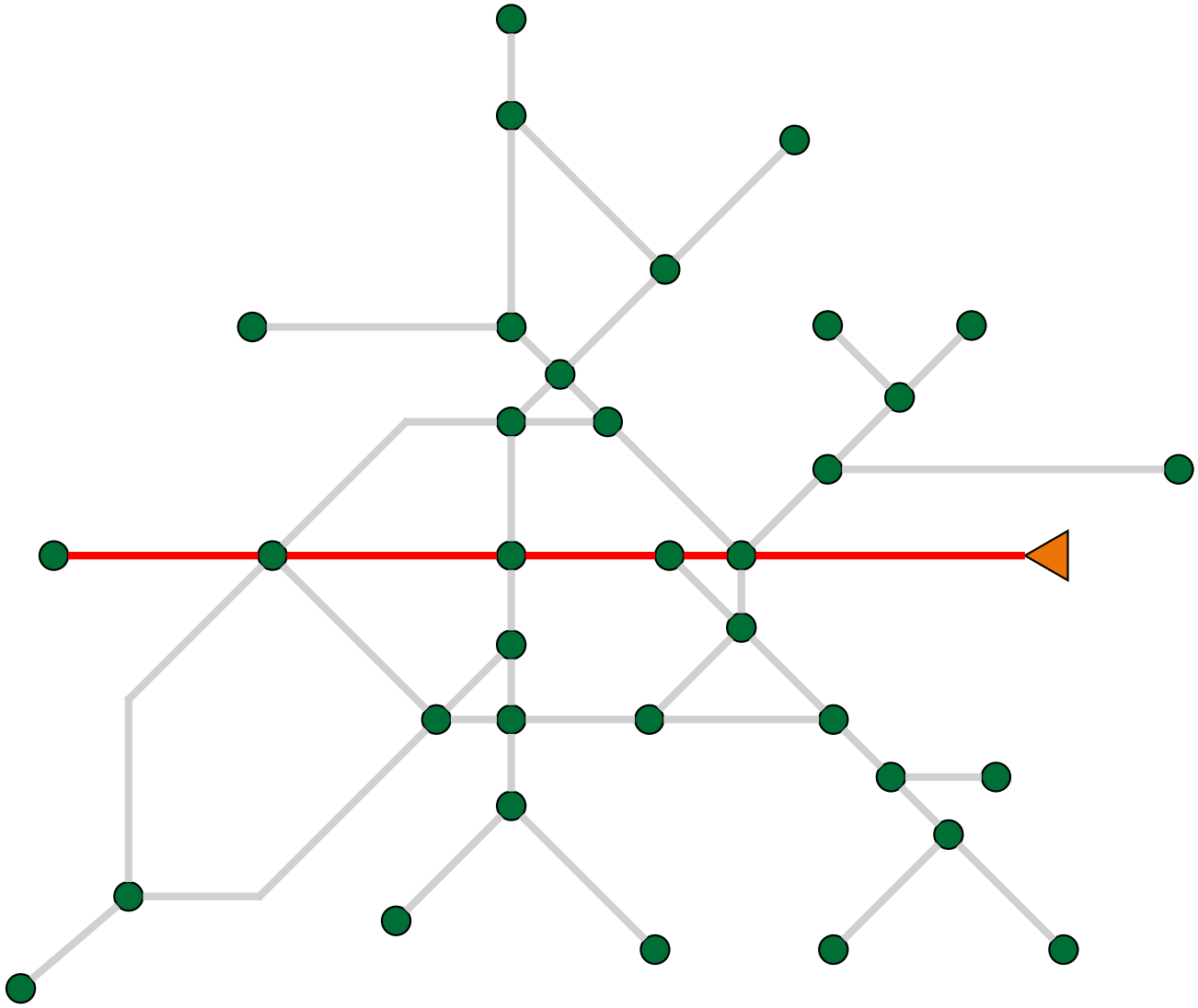
davon reine Fahrzeit:

00:00 Stunden

davon Umsteige- bzw. Wartezeit:

00:00 Stunden

Lösung des verallg. Briefträgerproblems (Weg)



Kürzester Weg (alle Fahrtkanten):

01:14 Stunden

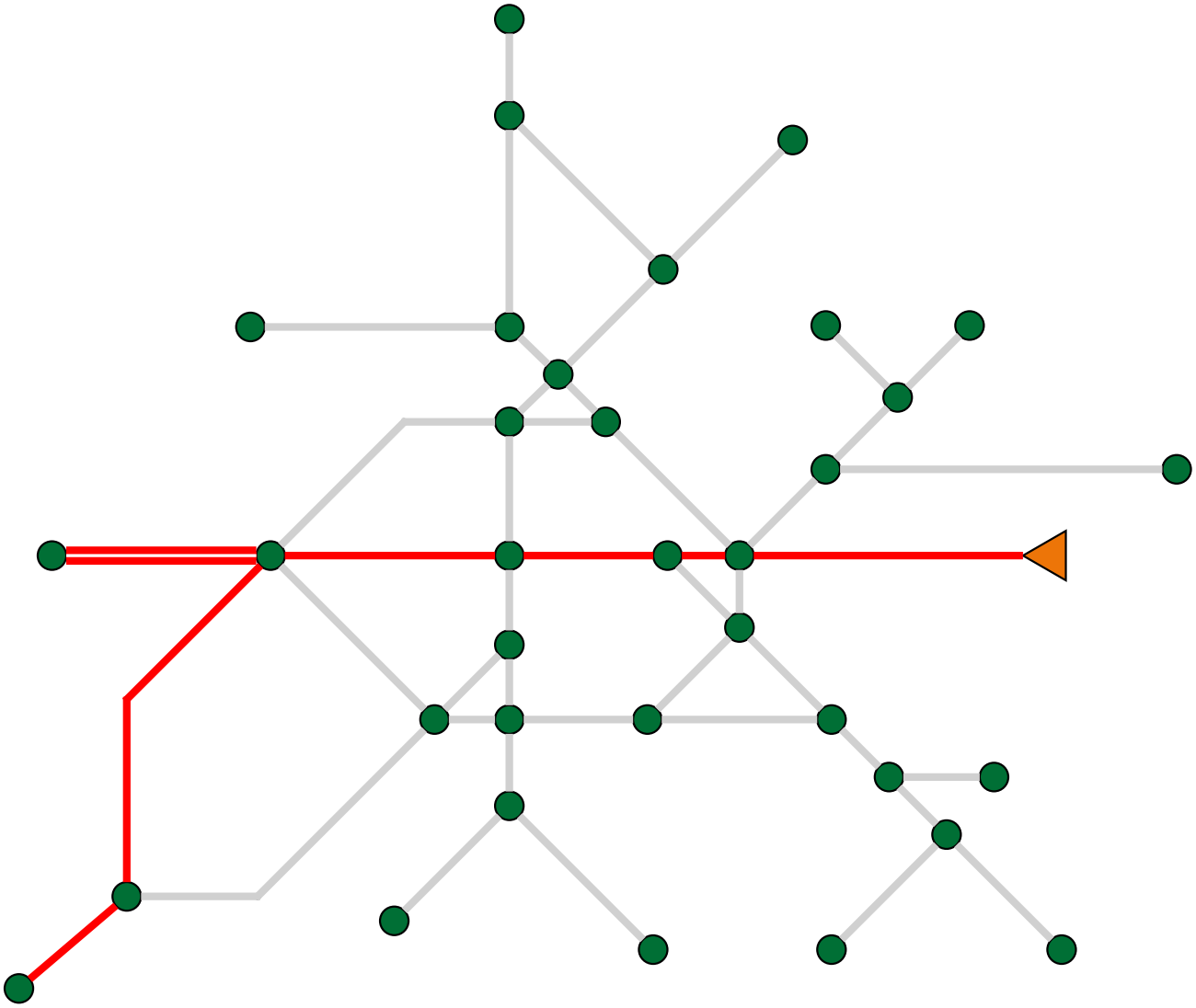
davon reine Fahrzeit:

01:14 Stunden

davon Umsteige- bzw. Wartezeit:

00:00 Stunden

Lösung des verallg. Briefträgerproblems (Weg)



Kürzester Weg (alle Fahrtkanten):

02:10 Stunden

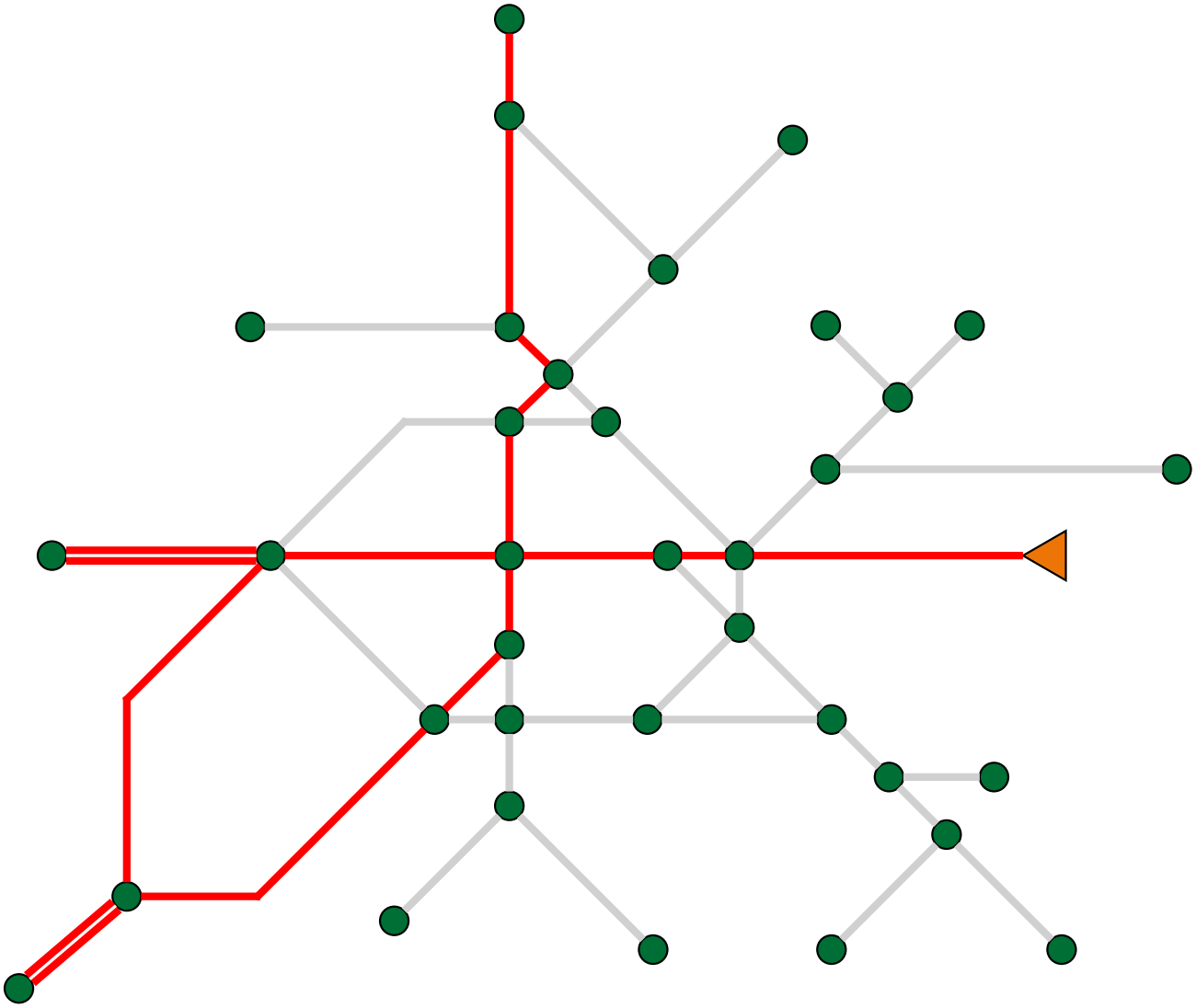
davon reine Fahrzeit:

01:52 Stunden

davon Umsteige- bzw. Wartezeit:

00:18 Stunden

Lösung des verallg. Briefträgerproblems (Weg)



Kürzester Weg (alle Fahrtkanten):

03:50 Stunden

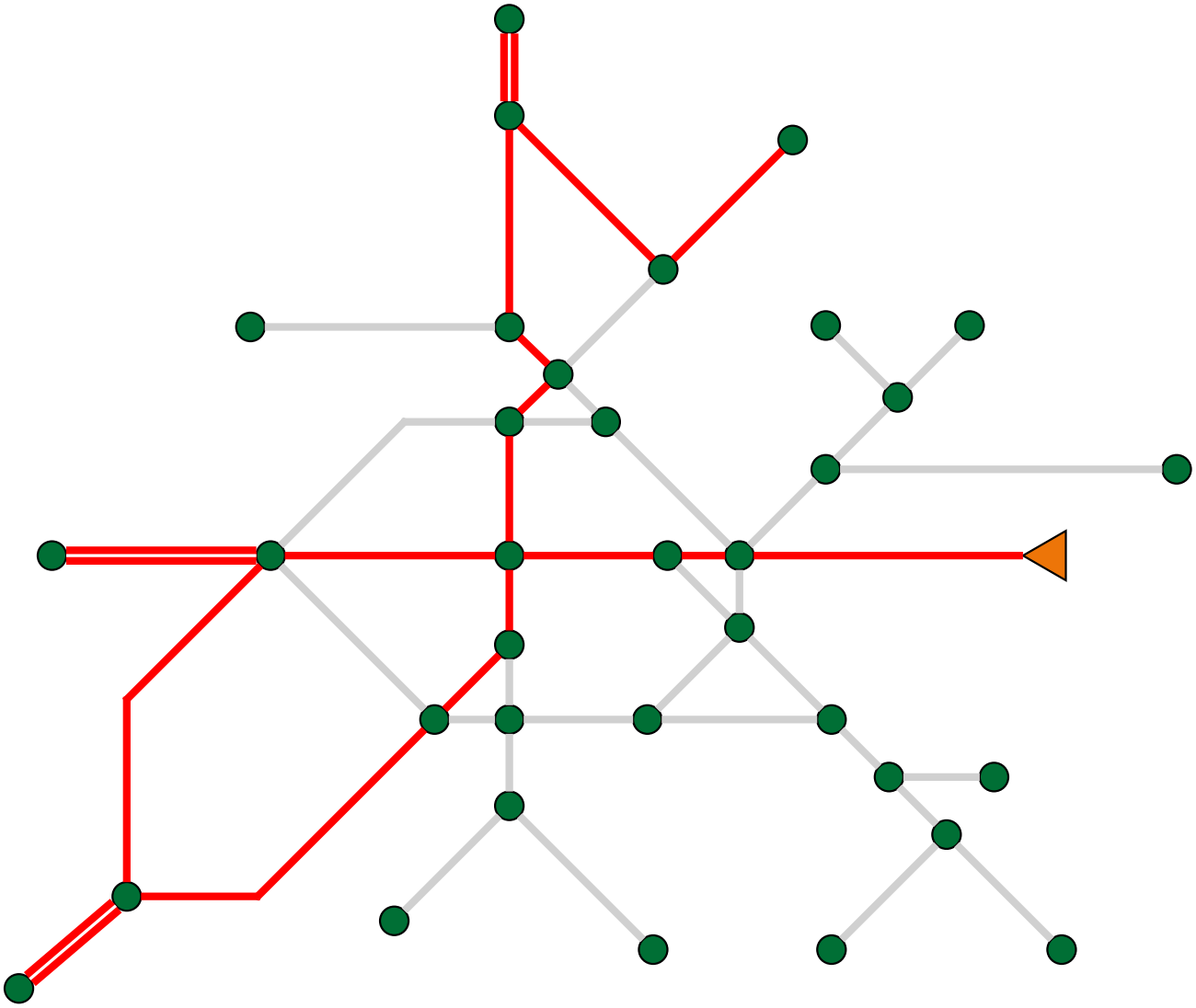
davon reine Fahrzeit:

03:25 Stunden

davon Umsteige- bzw. Wartezeit:

00:25 Stunden

Lösung des verallg. Briefträgerproblems (Weg)



Kürzester Weg (alle Fahrtkanten):

05:10 Stunden

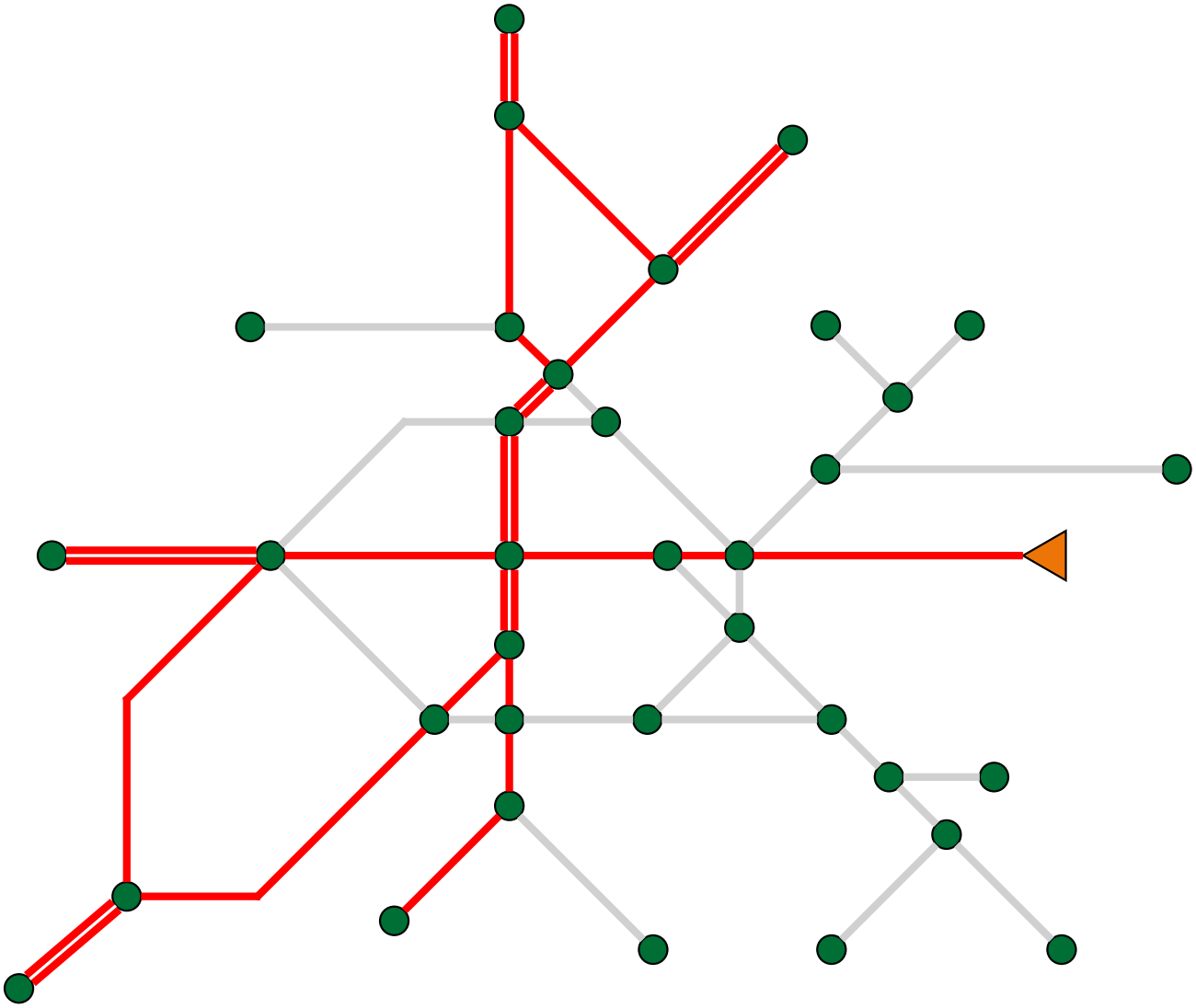
davon reine Fahrzeit:

04:13 Stunden

davon Umsteige- bzw. Wartezeit:

00:57 Stunden

Lösung des verallg. Briefträgerproblems (Weg)



Kürzester Weg (alle Fahrtkanten):

06:26 Stunden

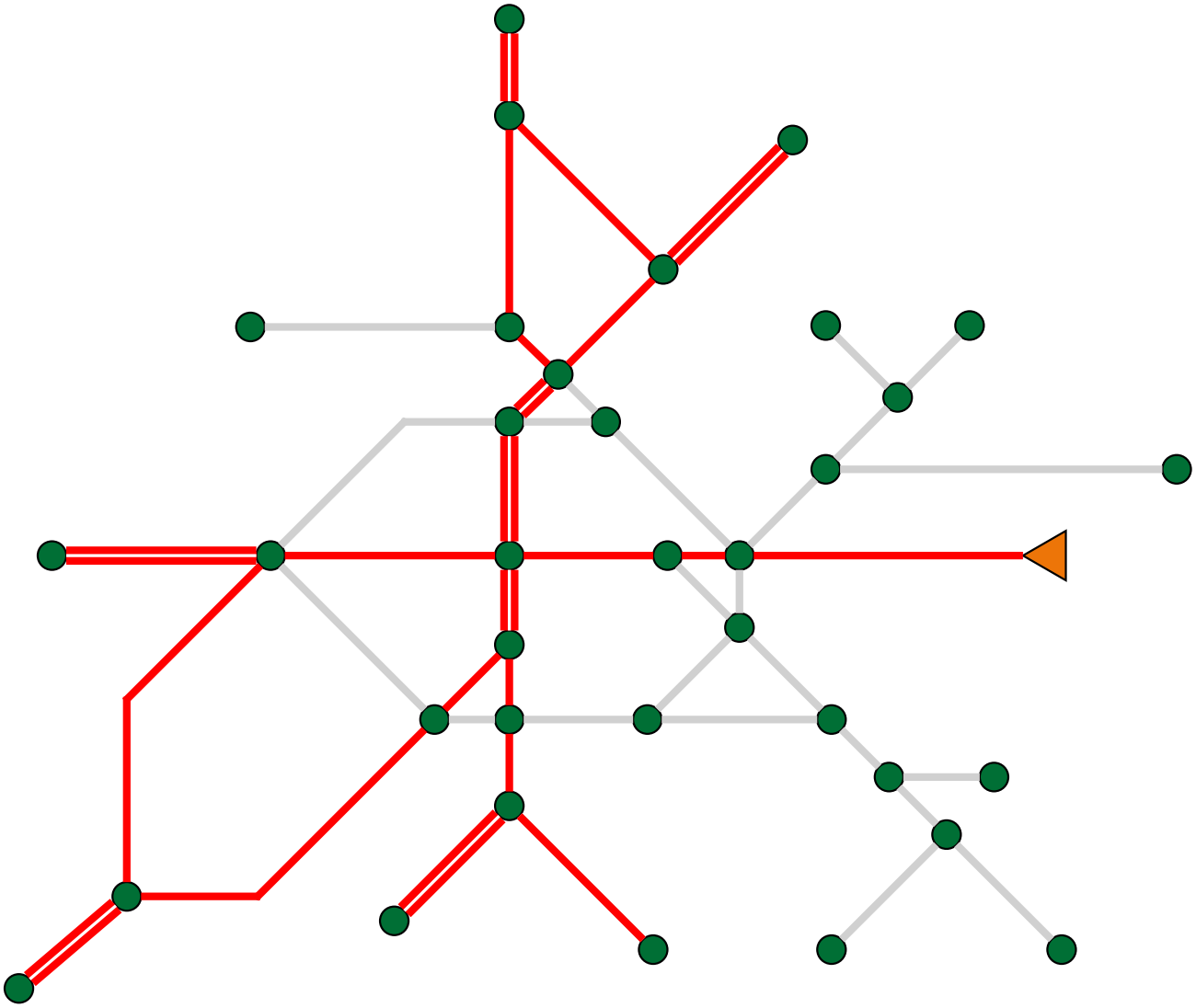
davon reine Fahrzeit:

05:16 Stunden

davon Umsteige- bzw. Wartezeit:

01:10 Stunden

Lösung des verallg. Briefträgerproblems (Weg)



Kürzester Weg (alle Fahrtkanten):

07:06 Stunden

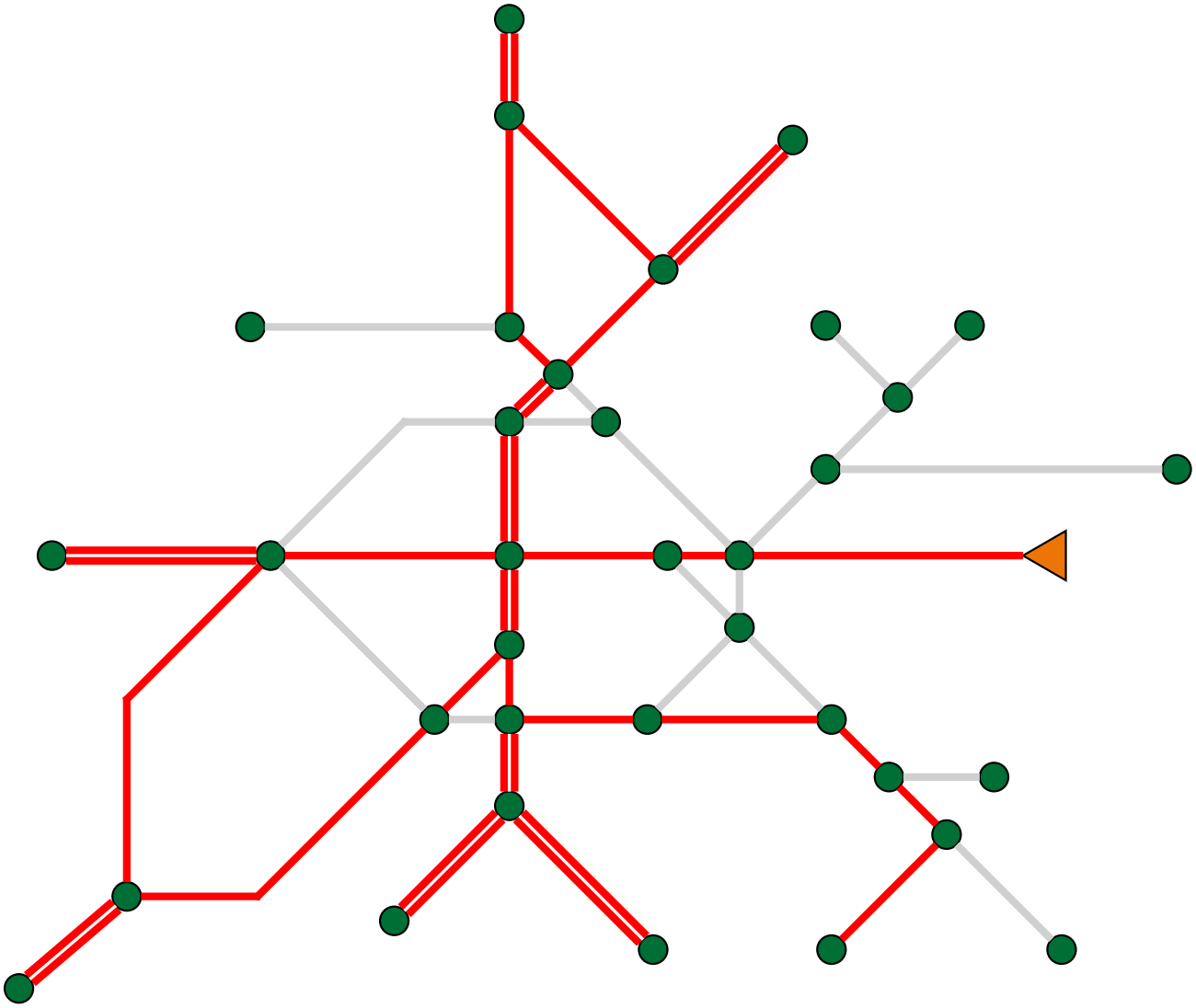
davon reine Fahrzeit:

05:49 Stunden

davon Umsteige- bzw. Wartezeit:

01:17 Stunden

Lösung des verallg. Briefträgerproblems (Weg)



Kürzester Weg (alle Fahrtkanten):

08:13 Stunden

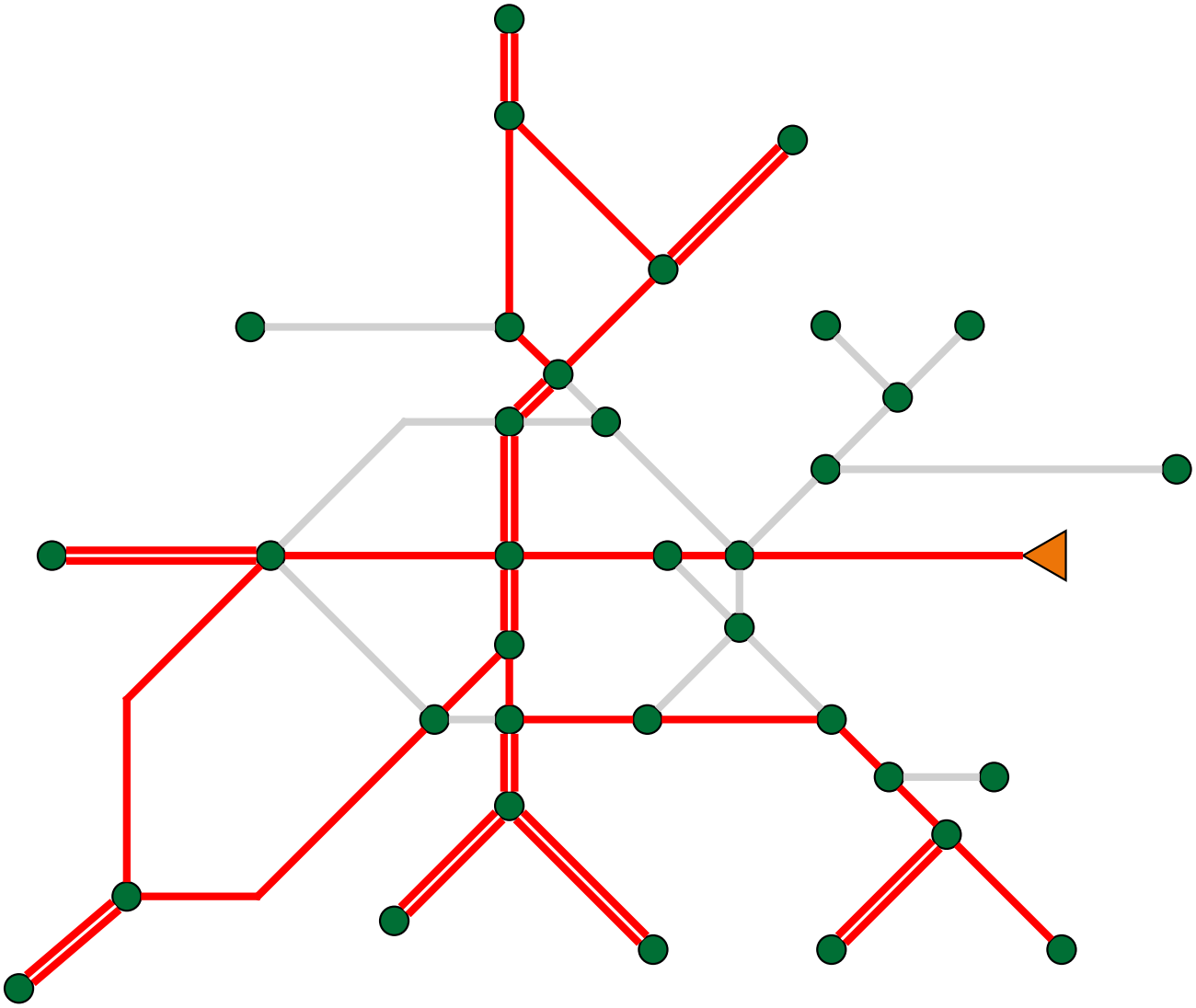
davon reine Fahrzeit:

06:41 Stunden

davon Umsteige- bzw. Wartezeit:

01:32 Stunden

Lösung des verallg. Briefträgerproblems (Weg)



Kürzester Weg (alle Fahrtkanten):

08:51 Stunden

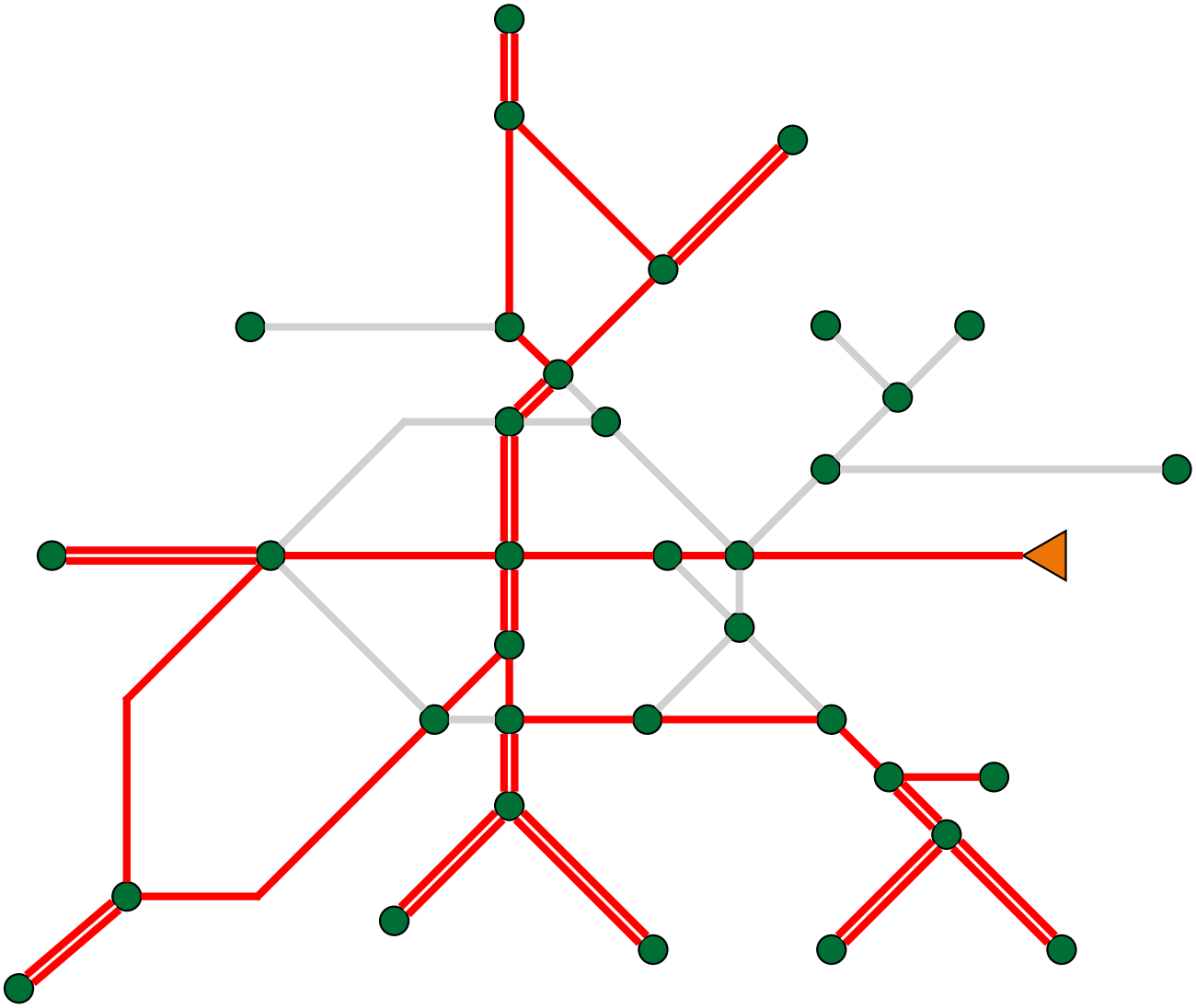
davon reine Fahrzeit:

07:11 Stunden

davon Umsteige- bzw. Wartezeit:

01:40 Stunden

Lösung des verallg. Briefträgerproblems (Weg)



Kürzester Weg (alle Fahrtkanten):

09:37 Stunden

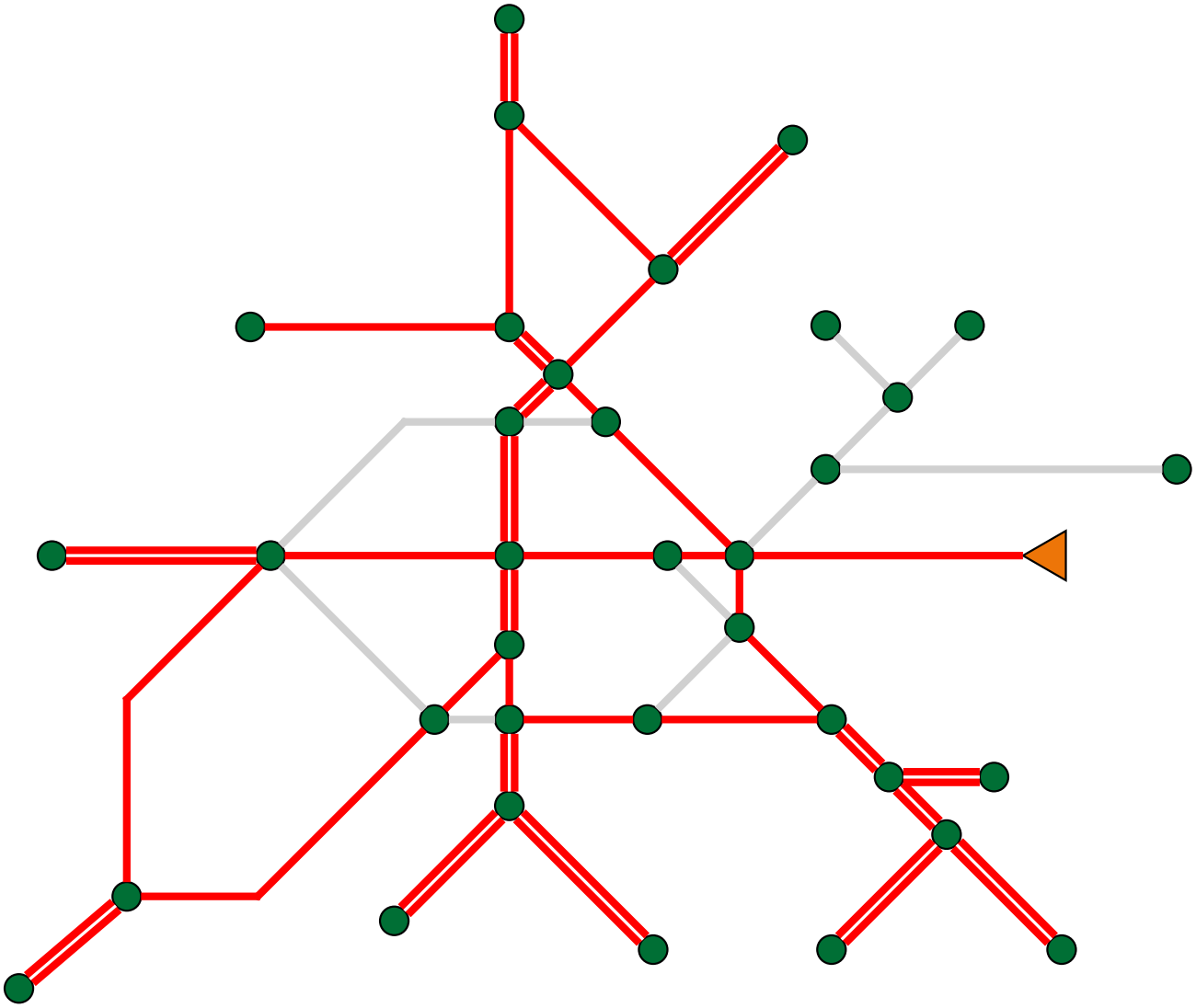
davon reine Fahrzeit:

07:41 Stunden

davon Umsteige- bzw. Wartezeit:

01:56 Stunden

Lösung des verallg. Briefträgerproblems (Weg)



Kürzester Weg (alle Fahrtkanten):

10:42 Stunden

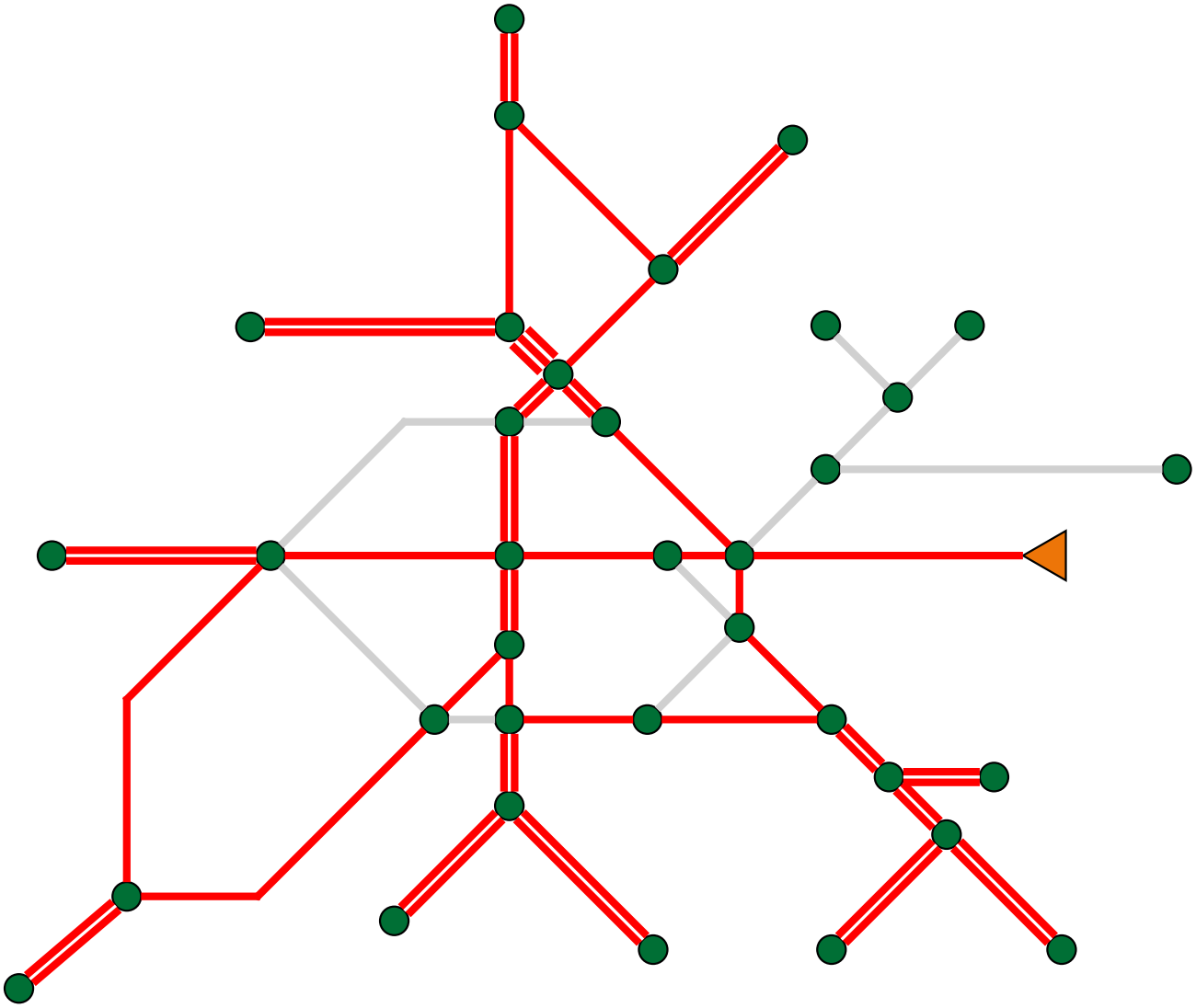
davon reine Fahrzeit:

08:36 Stunden

davon Umsteige- bzw. Wartezeit:

02:06 Stunden

Lösung des verallg. Briefträgerproblems (Weg)



Kürzester Weg (alle Fahrtkanten):

11:10 Stunden

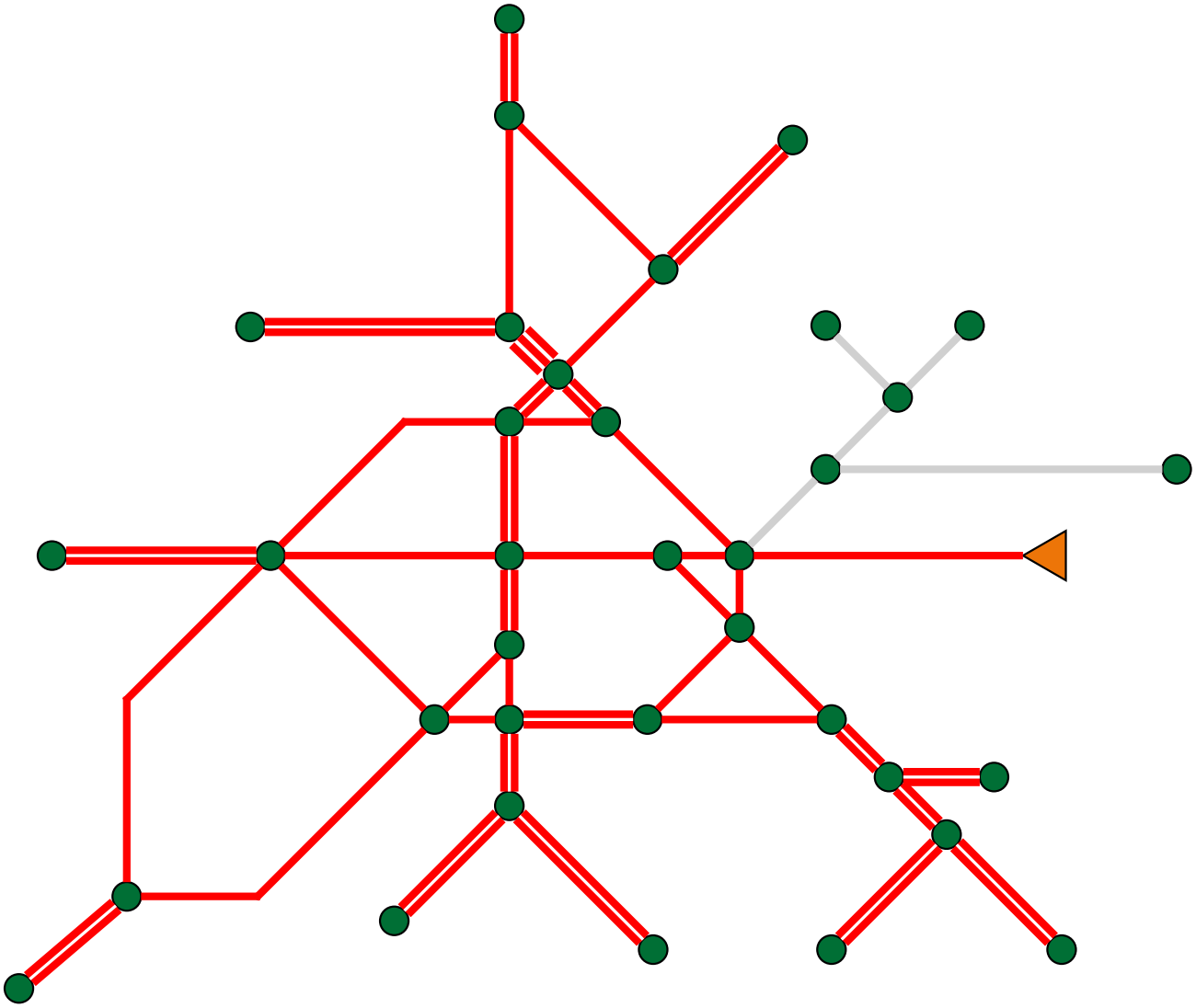
davon reine Fahrzeit:

09:01 Stunden

davon Umsteige- bzw. Wartezeit:

02:09 Stunden

Lösung des verallg. Briefträgerproblems (Weg)



Kürzester Weg (alle Fahrtkanten):

12:03 Stunden

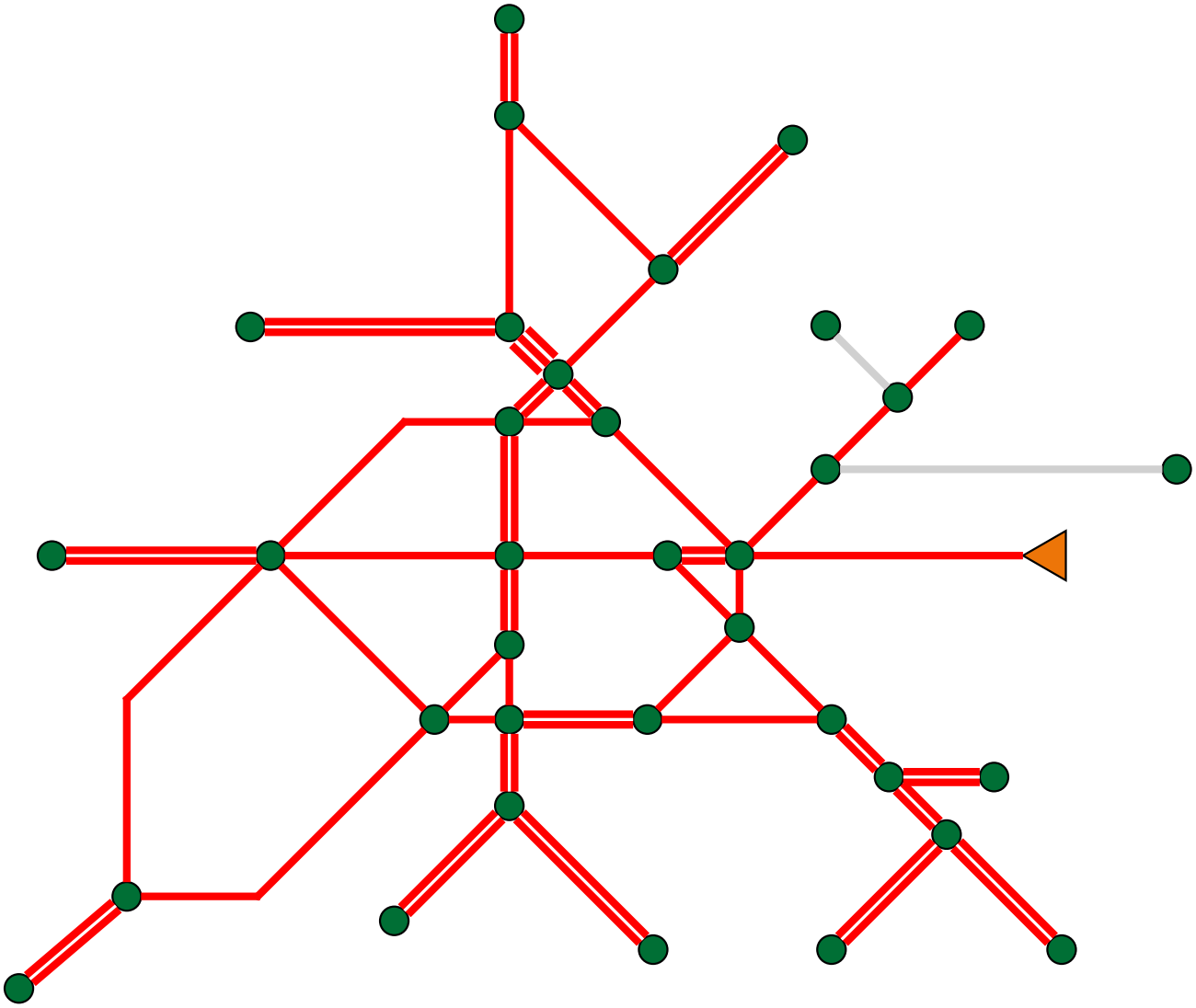
davon reine Fahrzeit:

09:49 Stunden

davon Umsteige- bzw. Wartezeit:

02:14 Stunden

Lösung des verallg. Briefträgerproblems (Weg)



Kürzester Weg (alle Fahrtkanten):

12:29 Stunden

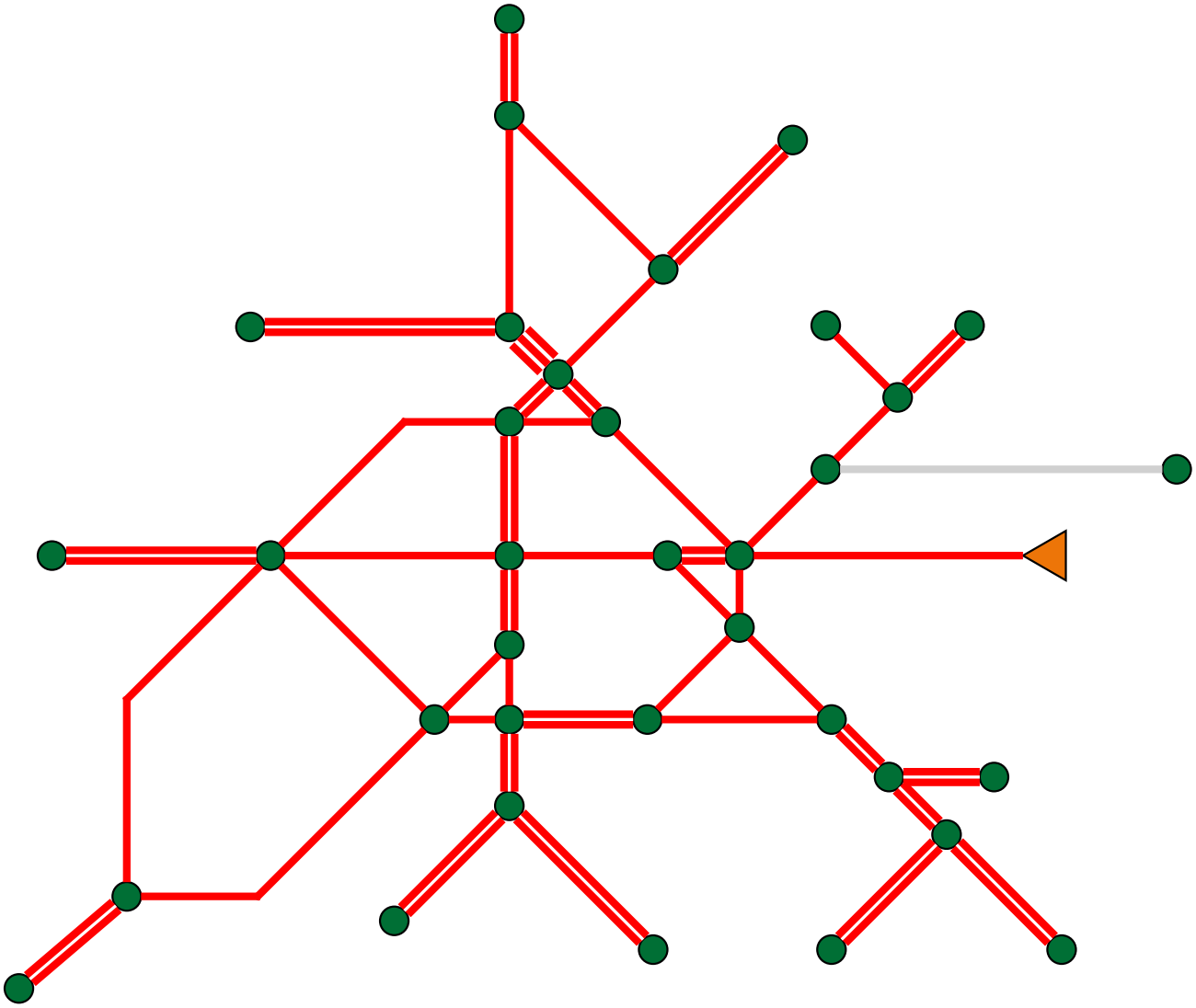
davon reine Fahrzeit:

10:11 Stunden

davon Umsteige- bzw. Wartezeit:

02:18 Stunden

Lösung des verallg. Briefträgerproblems (Weg)



Kürzester Weg (alle Fahrtkanten):

12:54 Stunden

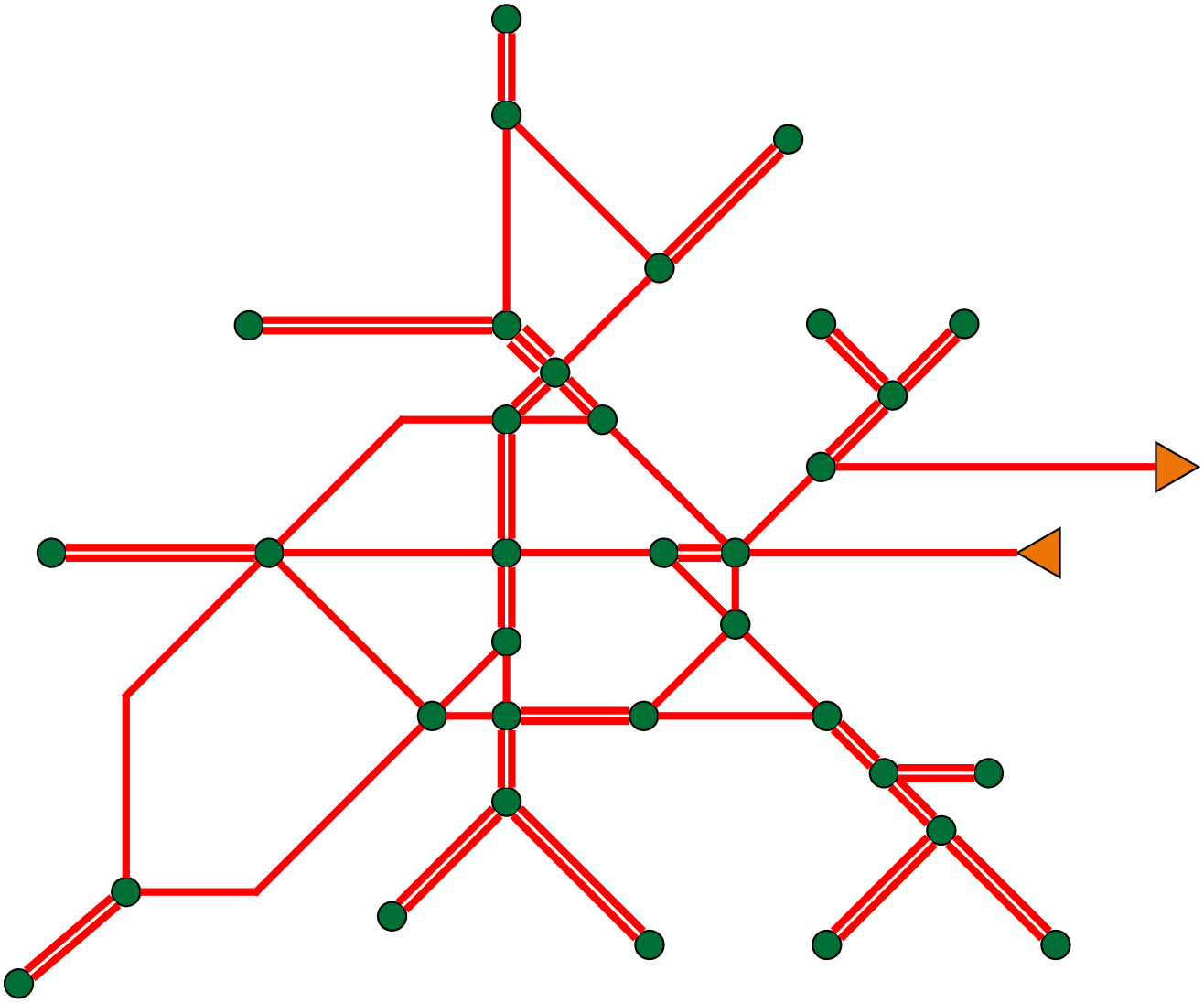
davon reine Fahrzeit:

10:30 Stunden

davon Umsteige- bzw. Wartezeit:

02:24 Stunden

Lösung des verallg. Briefträgerproblems (Weg)



Kürzester Weg (alle Fahrtkanten):

13:59 Stunden

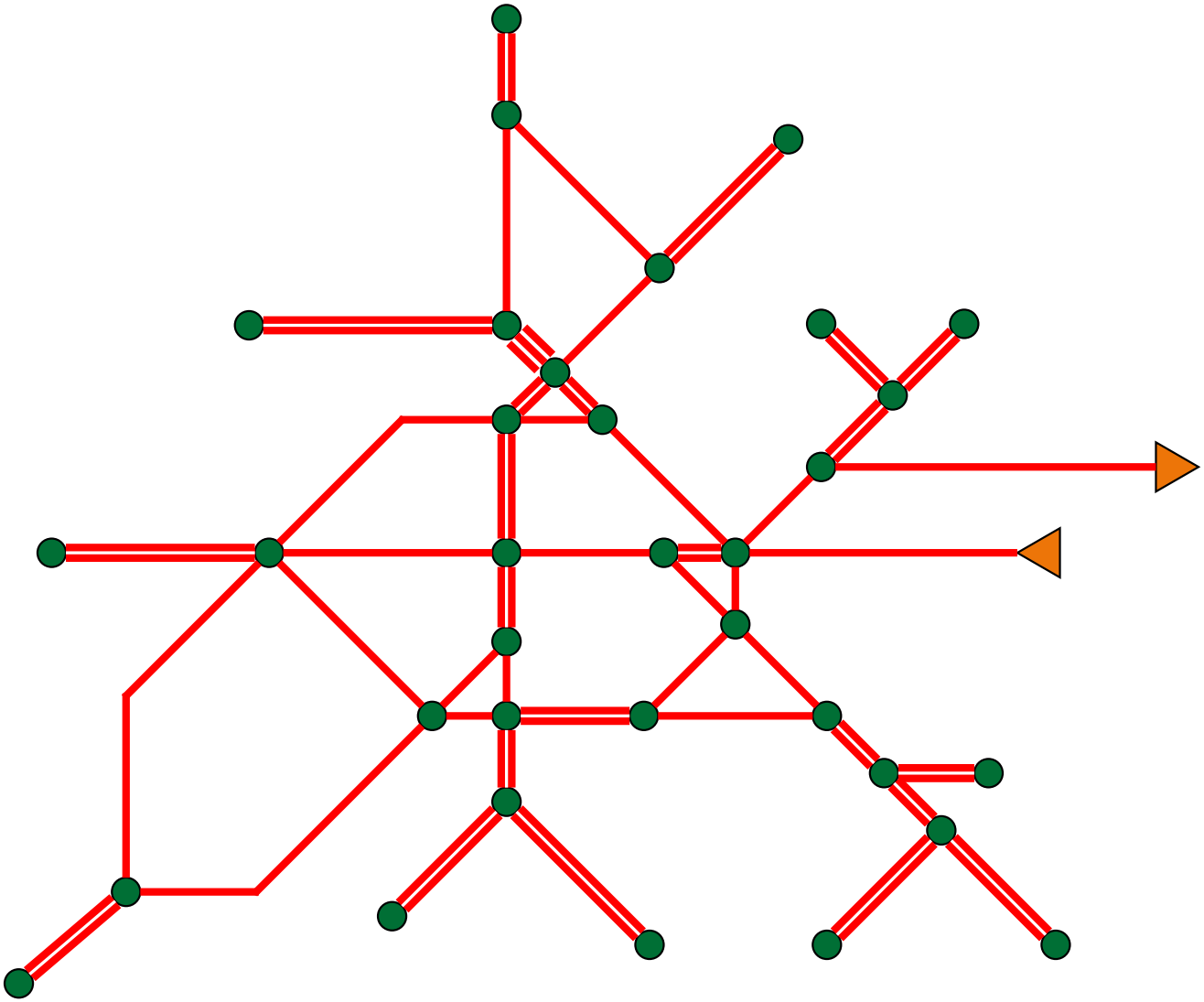
davon reine Fahrzeit:

11:23 Stunden

davon Umsteige- bzw. Wartezeit:

02:36 Stunden

Lösung des verallg. Briefträgerproblems (Weg)



Kürzester Weg (alle Fahrtkanten):

13:59 Stunden

davon reine Fahrzeit:

11:23 Stunden

(vorher: 11:18 Std.)

davon Umsteige- bzw. Wartezeit:

02:36 Stunden

Bisheriger Rekord

- 10. Januar 2015: S-Bahn-Challenge Variante 2 (alle Streckenabschnitte)
- berechnete Dauer: 13:44 Stunden (mit Abkürzungskanten, ohne Südringkurve Ostkreuz)
- Start: Strausberg Nord ab 09:55
- geplantes Ende: Erkner an 23:39

- Verlauf:
  - morgens: pünktlich,
  - mittags: zu früh,
  - nachmittags: wieder pünktlich,
  - abends: . . .

Bisheriger Rekord

Foto: Berliner Feuerwehr / Stefan Rasch

Bisheriger Rekord

- Orkan „Felix“ führte ab etwa 19 Uhr im ganzen S-Bahn-Netz zu Verspätungen und Ausfällen.
- Probleme gab es bei Wannsee (nur ein Gleis befahrbar), Lichterfelde (Streckensperrung) und Oranienburg (Ersatzverkehr).
- Der ursprüngliche Plan musste mehrfach geändert werden.
- Ankunft in Erkner: mit 80 Minuten Verspätung um 00:59 Uhr nach 15:04 Stunden

Weltrekorde

- Eine S-Bahn-Challenge kann natürlich in jedem öffentlichen Verkehrsnetz stattfinden.
- Wer die Challenge in kürzester Zeit bewältigt, kann einen Eintrag im Guinness-Buch der Rekorde erhalten.
- Beispiele:

Stadt	Stationen	Zeit	Jahr
New York („Subway Challenge“)	469	21:28:14	2016
London („Tube Challenge“)	270	15:45:38	2015
Berlin („U-Bahn-Challenge“)	173	06:53:24	2017

S-Bahn-Challenge

Niels Lindner

Zuse-Institut Berlin

MathInside @ Urania Berlin
23.01.2018