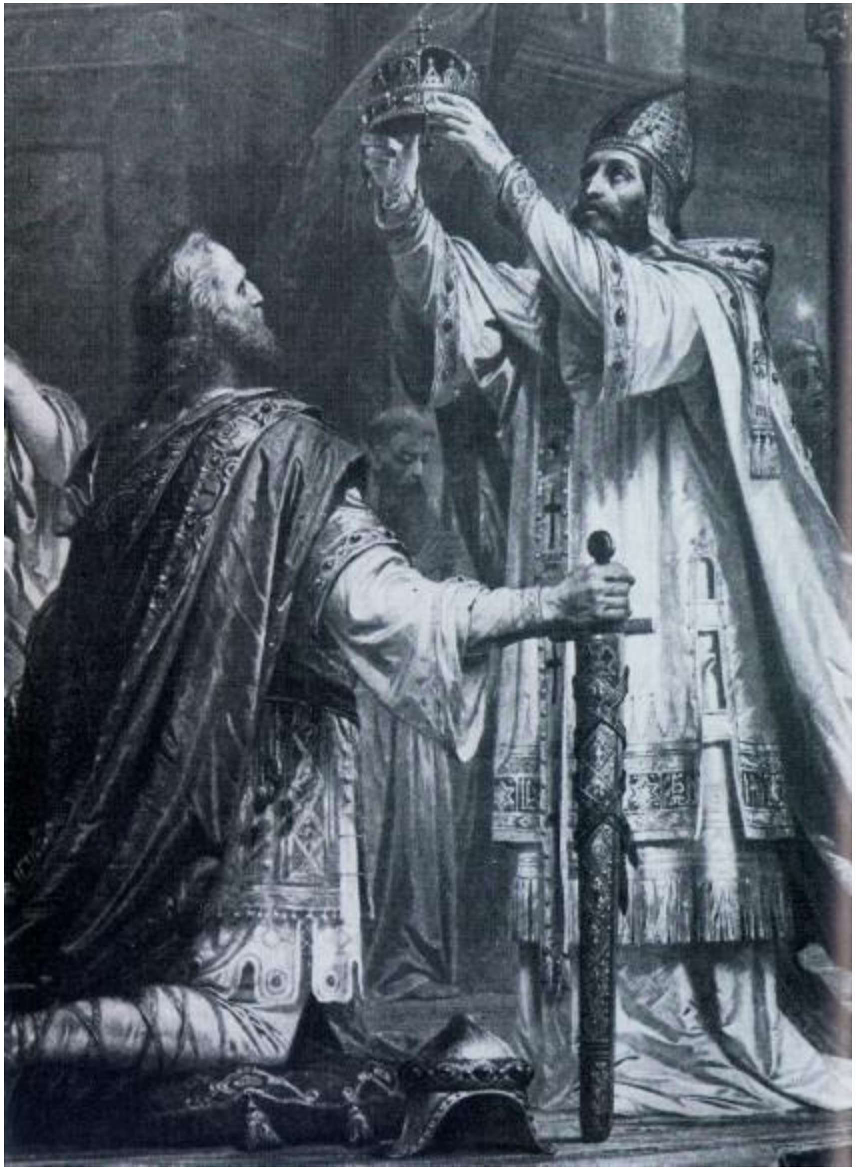
Wolf, Ziege und Kohl treffen sich bei Tetraeder, Pyramide und Heptaeder

Ralf Borndörfer

22. Berliner Tag der Mathematik

HU Berlin, 22.04.2017

Karl der Große (748-814, 1.92 m)



- 748 Geb. in Gauting
- 768 König der Franken
- 800 Krönung zum Römischen Kaiser durch Papst Leo III in Rom
- 814 Gest. in Aachen

Die Bildungsreform Karls des Großen

- „Errata corrigere, superflua abscindere, recta cohortare”
(Fehler verbessern, Überflüssiges aussondern und das Rechte pflegen)

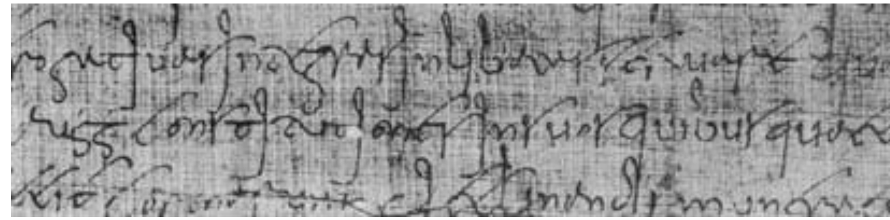
- Admonitio generalis (789)
„Karl ordnete an, Schulen zu errichten, an denen die Kinder lesen und schreiben lernen können. In jedem Kloster, an jedem Bischofssitz soll gelehrt werden: Psalmen, die notae (stenographische Schriftzeichen), Kirchengesang, Rechnen und Grammatik.”

Alcuin von York (732-804)

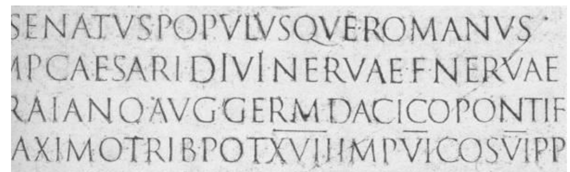
- Geb. 732 nahe York
- Schüler, später Lehrer in der Domschule von York
- 781 Treffen mit Karl dem Großen, Gründung der Akademie am Hof Karls
- 796 Abt, später Bischof im Kloster St. Martin in Tours
- Entwicklung der Karolingischen Minuskel

Entwicklung der Schrift

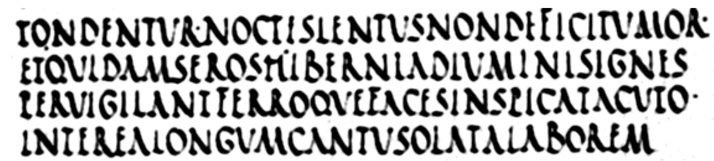
- Jüngere römische Kursive
  (4. Jh. n. Chr., Alltag)



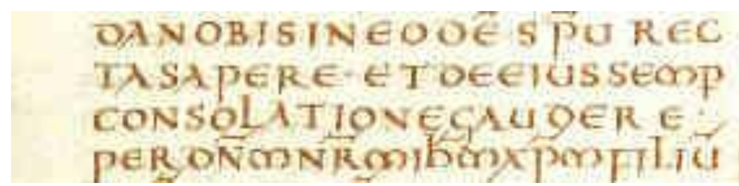
- Capitalis monumentalis
  (1. Jh. v. Chr., Inschriften)



- Capitalis rustica
  (1.-4. Jh. n. Chr., Inschriften)



- Unzialis
  (3. Jh. n. Chr.)



- Karolingische Minuskel
  (8. Jh. n. Chr.)

PROPOSITIO DE LIMACE

Limax fuit ab hirundine invitatus ad prandium infra leuvam unam. In die autem non potuit plus quam unam unciam pedis ambulare. Dicat, qui velit, in quot diebus ad idem prandium ipse limax perambulaverit.

Propositiones ad acuendos iuvenes

(Blatt 203 des Codex Leidensis des Ademar aus dem Jahr 1023)

Über die Schnecke

Eine Schnecke war von einer Schwalbe zum Frühstück eingeladen, eine *leuva* weit. An einem Tag konnte sie nicht weiter als eine *uncia* gehen. Es sage, wer will, in wie vielen Tagen die Schnecke zu diesem Frühstück gewandert ist.

Lösung

In einer *leuva* sind 1500 *passus*, 7500 *pedes* oder 90000 *unciae* enthalten. Wieviele *unciae*, soviele Tage waren es, und das ergibt 246 Jahre und 210 Tage.

leuva (gallische Meile) = 2.5 – 4 km, passus (Doppelschritt), pes (Fuß), uncia (Zoll)

(18) Propositio de lupo et capra et fasciculo cauli.

Homo quidam debebat ultra fluvium transferre lupum et capram et fasciculum cauli, et non potuit aliam navem invenire, nisi quae duos tantum ex ipsis ferre valebat. Praeceptum itaque ei fuerat, ut omnia haec ultra omnio illaesa transferret. Dicat, qui potest, quomodo eos illaesos ultra transferre potuit.

(18) Aufgabe über einen Wolf, eine Ziege und einen Kohlkopf.

Ein Mann musste einen Wolf, eine Ziege und einen Kohlkopf über einen Fluss bringen und konnte nur ein Schiff finden, das nicht mehr als zwei Gegenstände tragen konnte. Es war ihm aber vorgeschrieben, dass er sie alle unverletzt hinüber bringen sollte. Sage, wer es kann, wie er sie unverletzt hinüberbringen konnte.

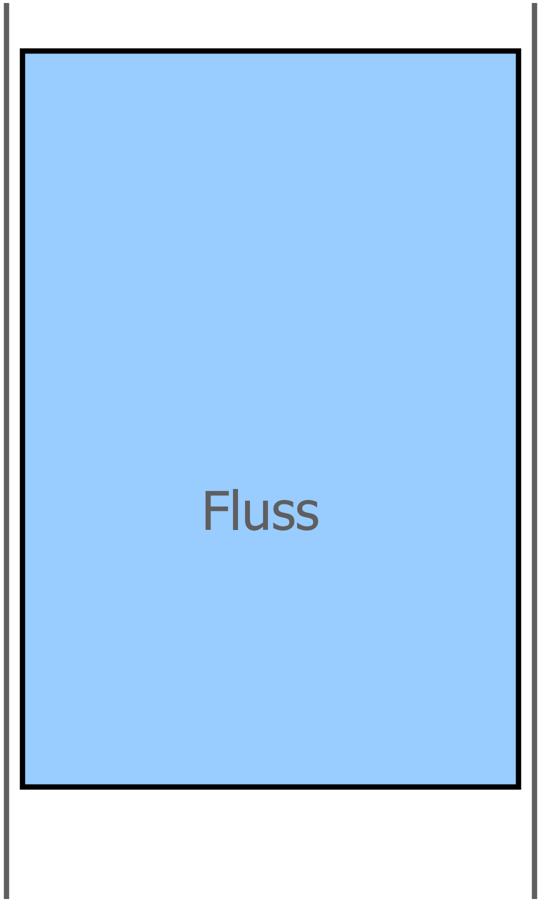
Solutio.

Simili namque tenore ducerem prius capram et dimitterem foris lupum et caulum. Tum deinde venirem lupumque ultra transferrem, lupoque foras misso rursus capram navi receptam ultra reducerem, capraque foras missa caulum transvenerem ultra, atque iterum remigassem, capramque assumptam ultra duxissem. Sicque faciente facta reit remigatio salubris absque voragine lacerationis.

Lösung.

Ich bringe zuerst die Ziege hinüber und lasse den Wolf und den Kohlkopf zurück. Dann fahre ich zurück und bringe den Wolf hinüber, lasse ihn drüben und bringe die Ziege zurück. Dann lasse ich die Ziege hinaus <aus dem Boot> und bringe den Kohlkopf hinüber, fahre nochmal zurück und bringe die Ziege hinüber.

$$\begin{bmatrix} W \\ Z \\ K \end{bmatrix}$$

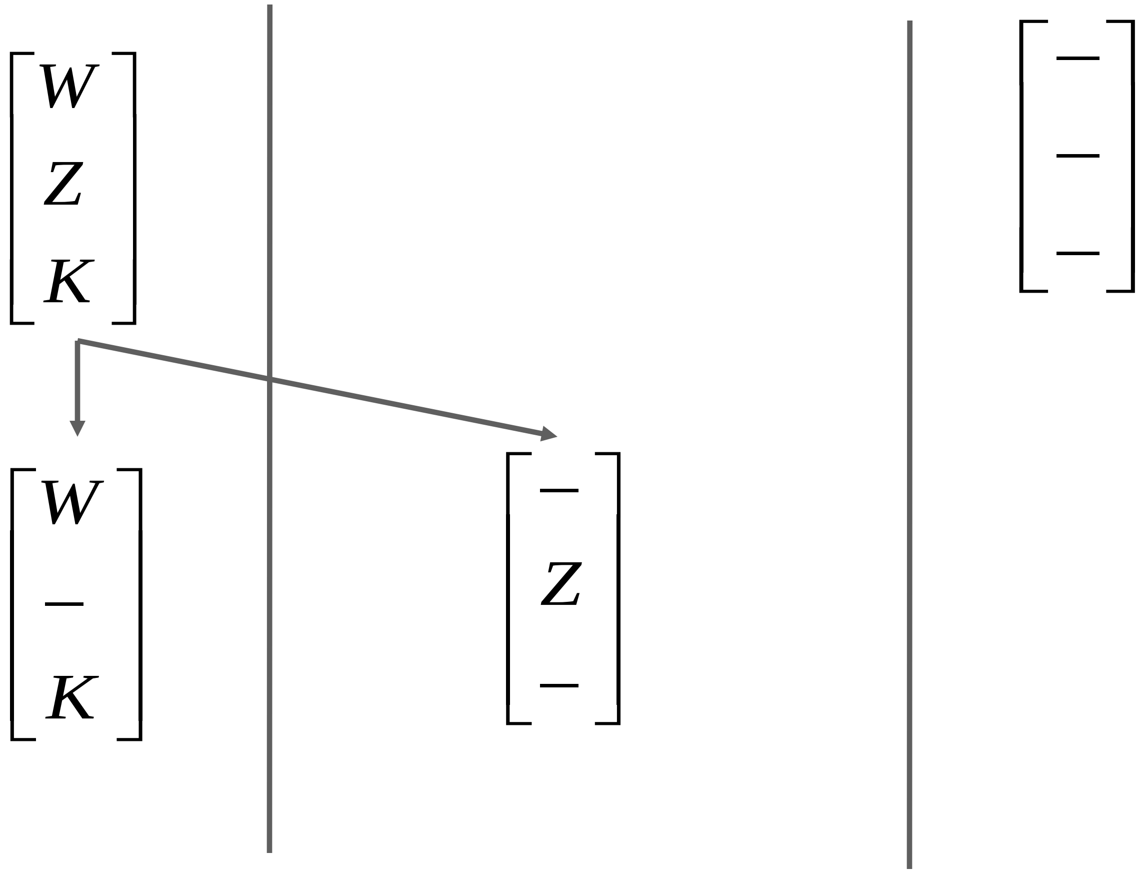


$$\begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix}$$

$t = 0$

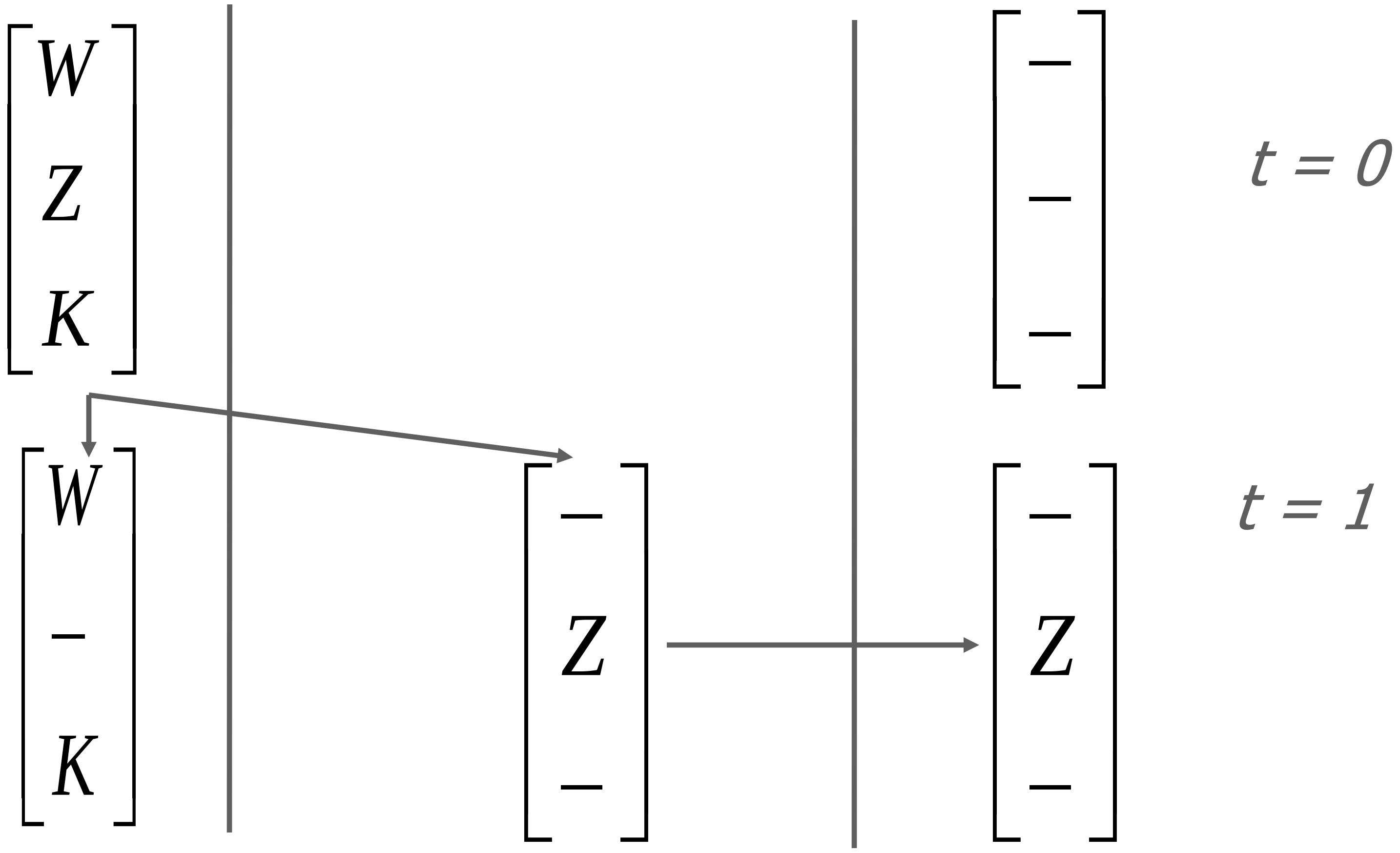
Formalisierung
Modellierung

Startpunkt: Wolf, Ziege und Kohl sind auf der linken Seite des Flusses.

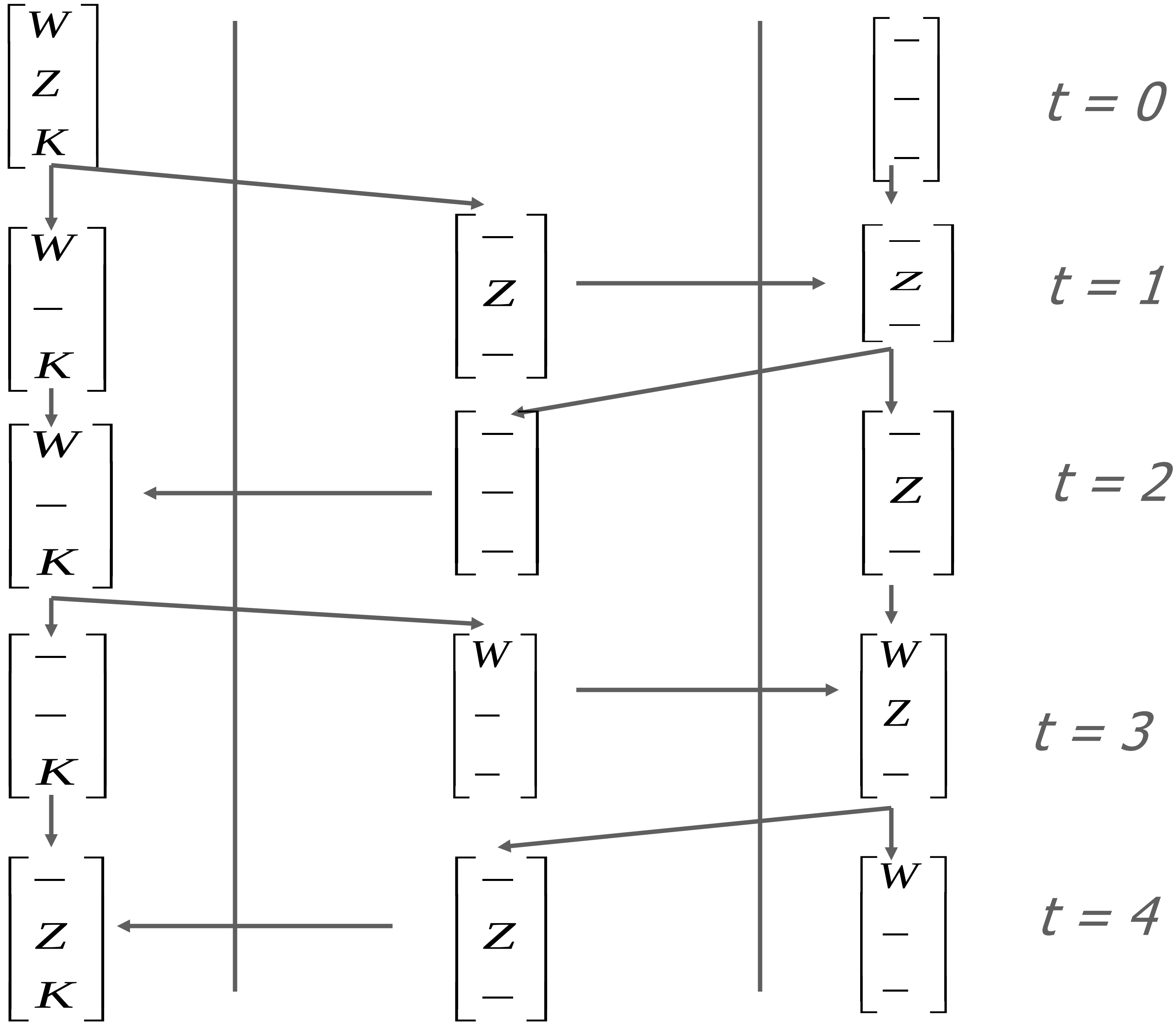


$t = 0$

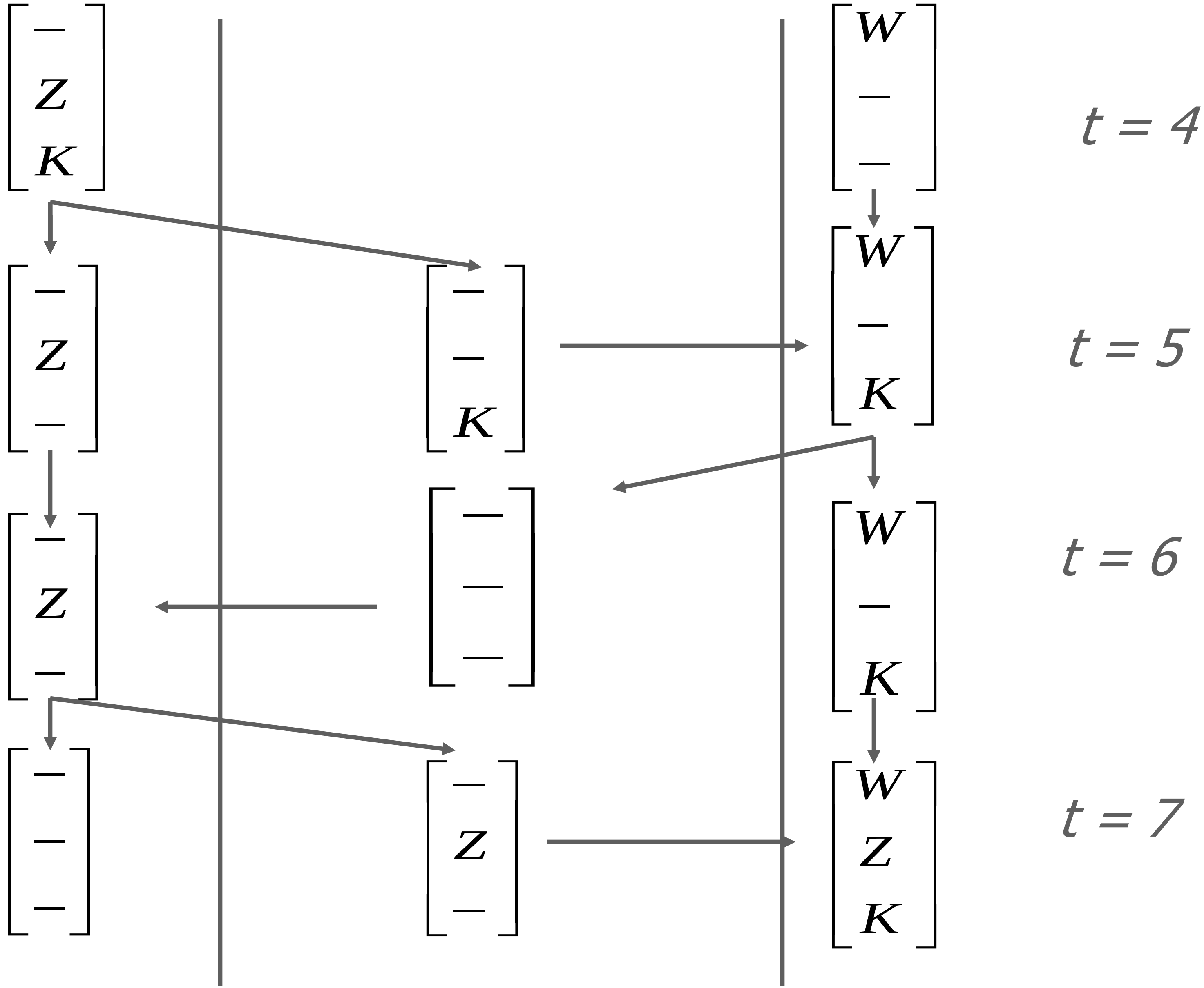
„Ich bringe zuerst die Ziege hinüber . . .“



„ . . . und lasse den Wolf und den Kohlkopf zurück.“



„Dann fahre ich zurück und bringe den Wolf hinüber, lasse ihn drüben und bringe die Ziege zurück."



„Dann lasse ich die Ziege hinaus <aus dem Boot> und bringe den Kohlkopf hinüber, fahre nochmal zurück und bringe die Ziege hinüber.“

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

t = 0

mathematische Modellierung

Noch einmal … mit Zahlen statt Buchstaben.

(ein simpler aber äußerst hilfreicher „Trick")

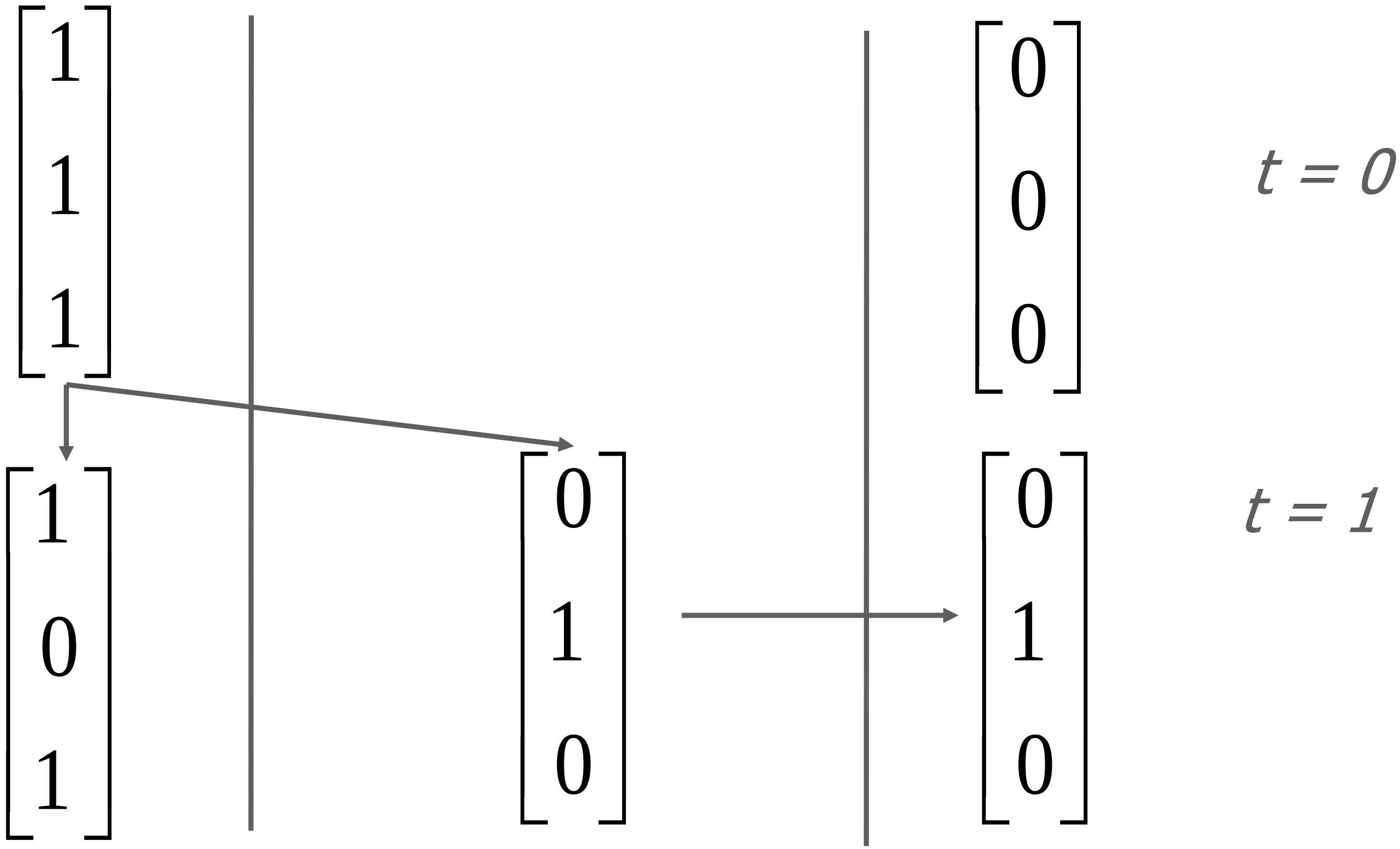
1 = Gegenstand ist da
0 = Gegenstand ist nicht da

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \qquad \qquad \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

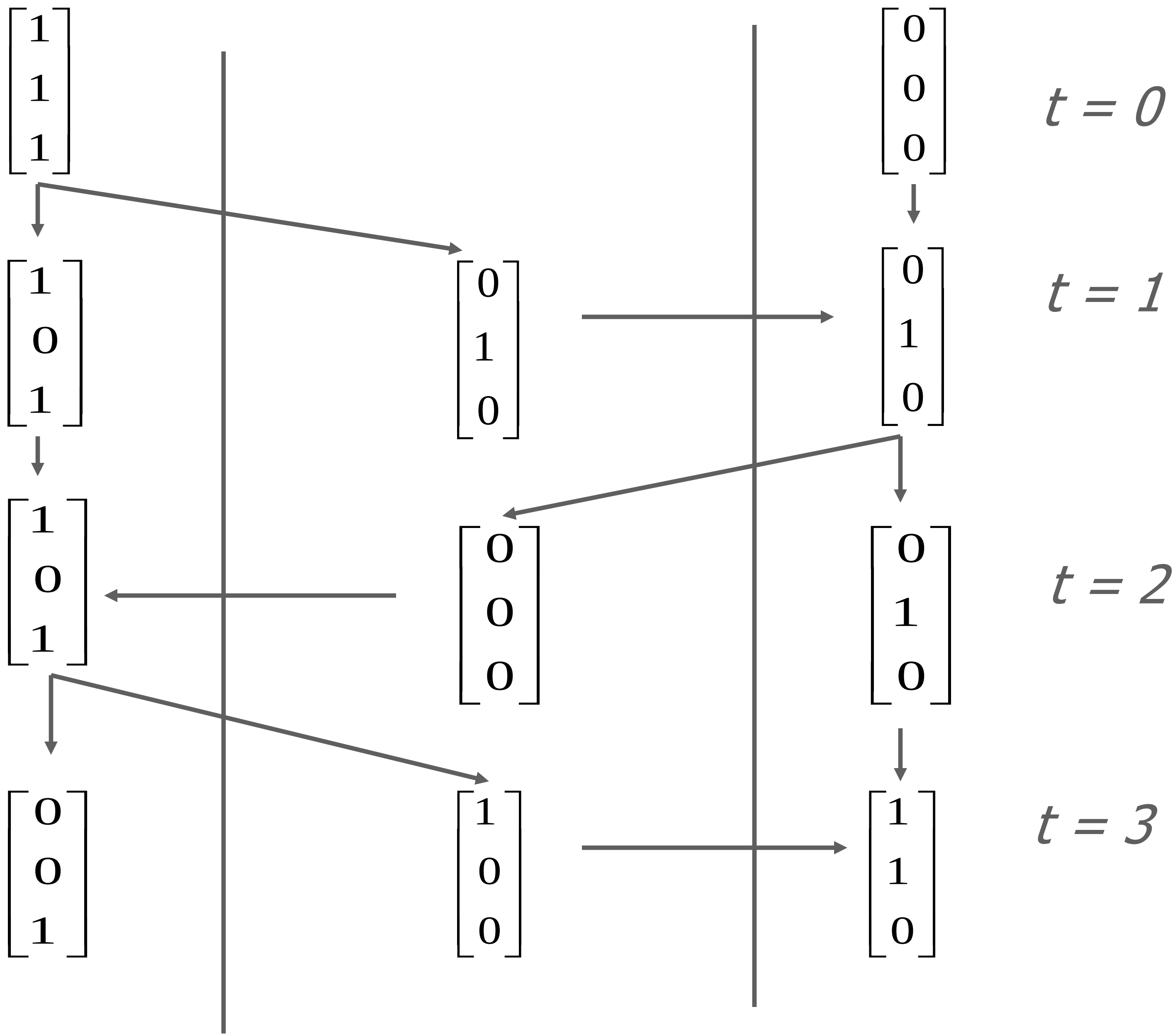
t = 0

$$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

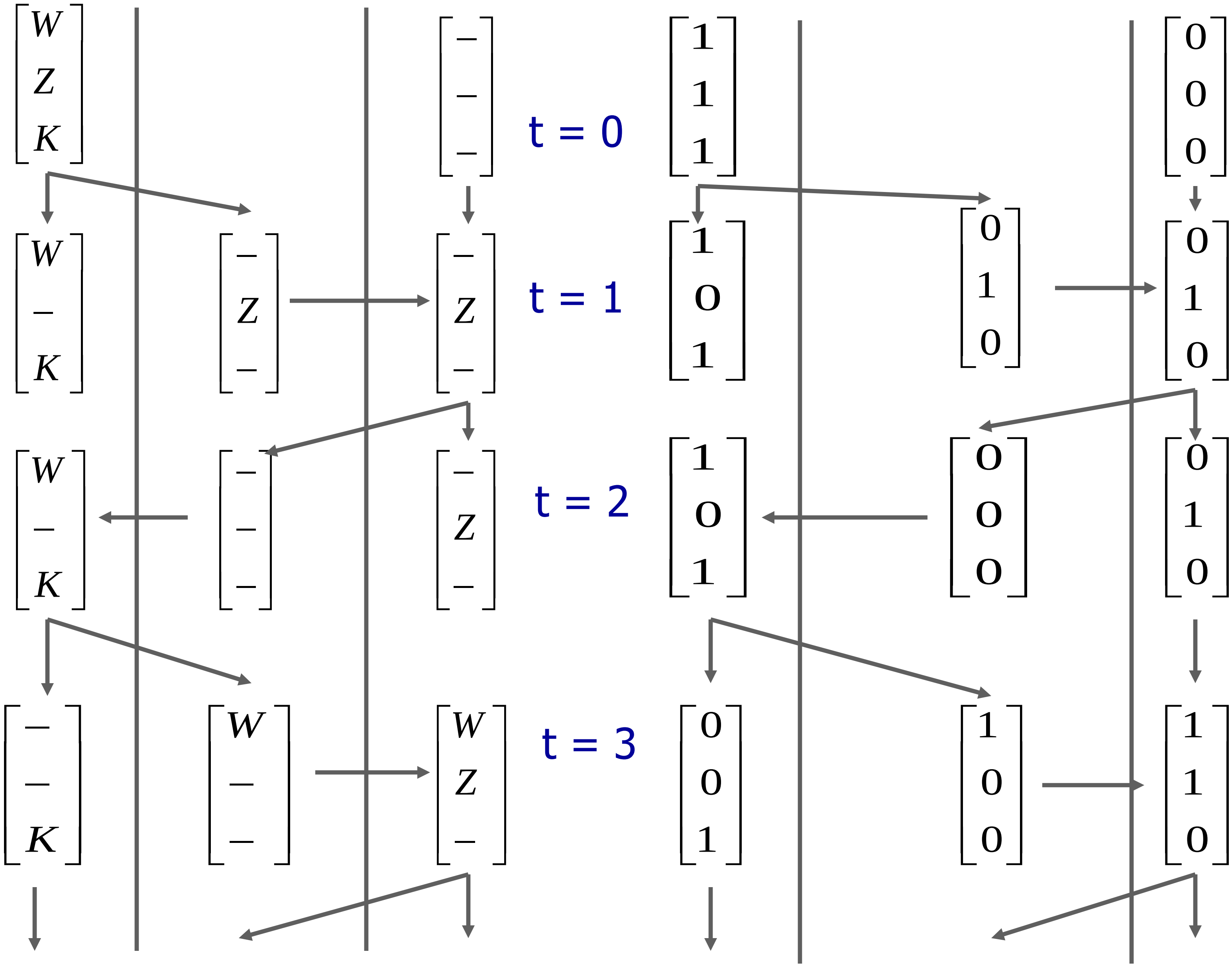
„Ich bringe zuerst die Ziege hinüber . . .“



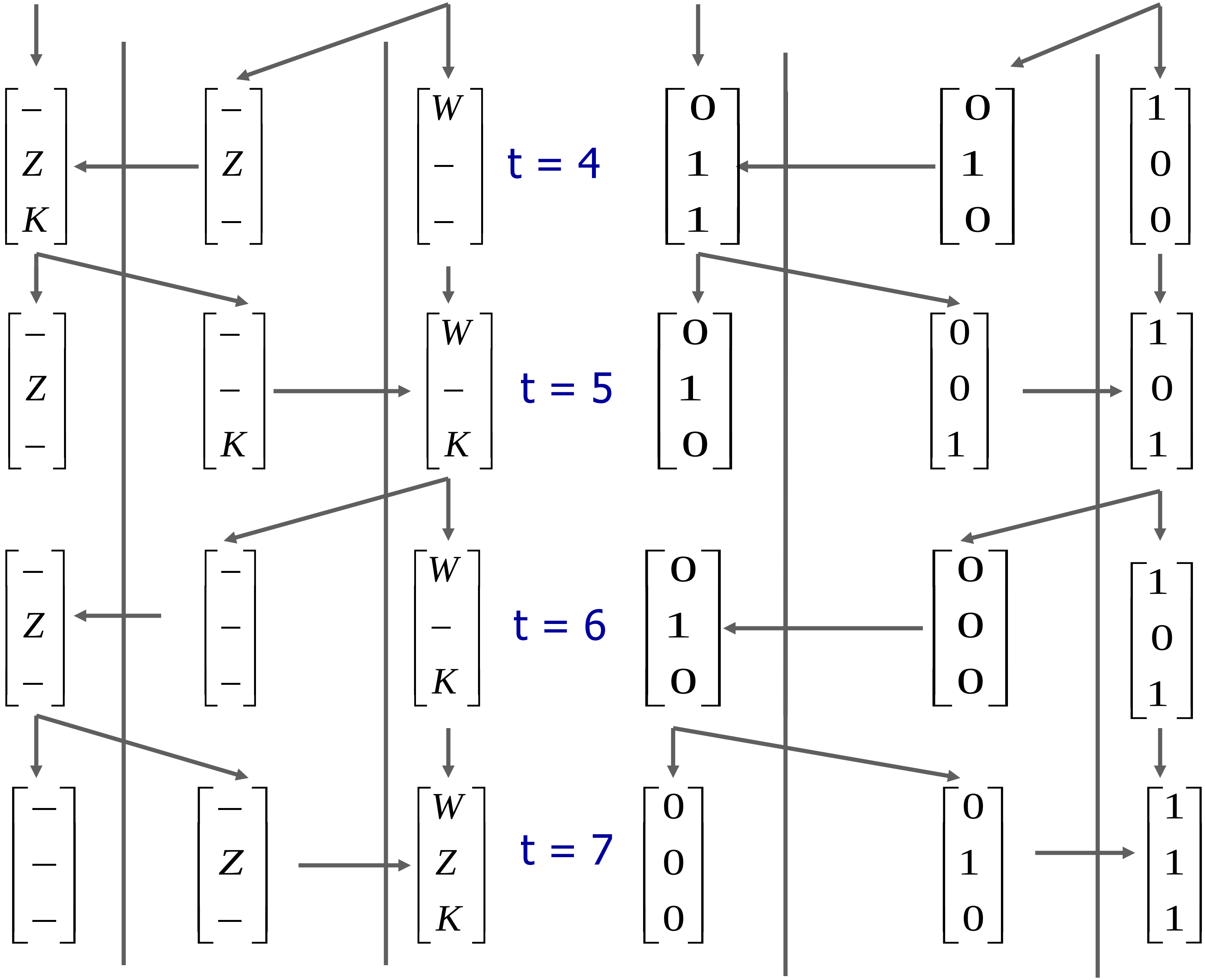
„ . . . und lasse den Wolf und den Kohlkopf zurück. Dann fahre ich zurück und bringe den Wolf hinüber, lasse ihn drüben und bringe die Ziege zurück.“



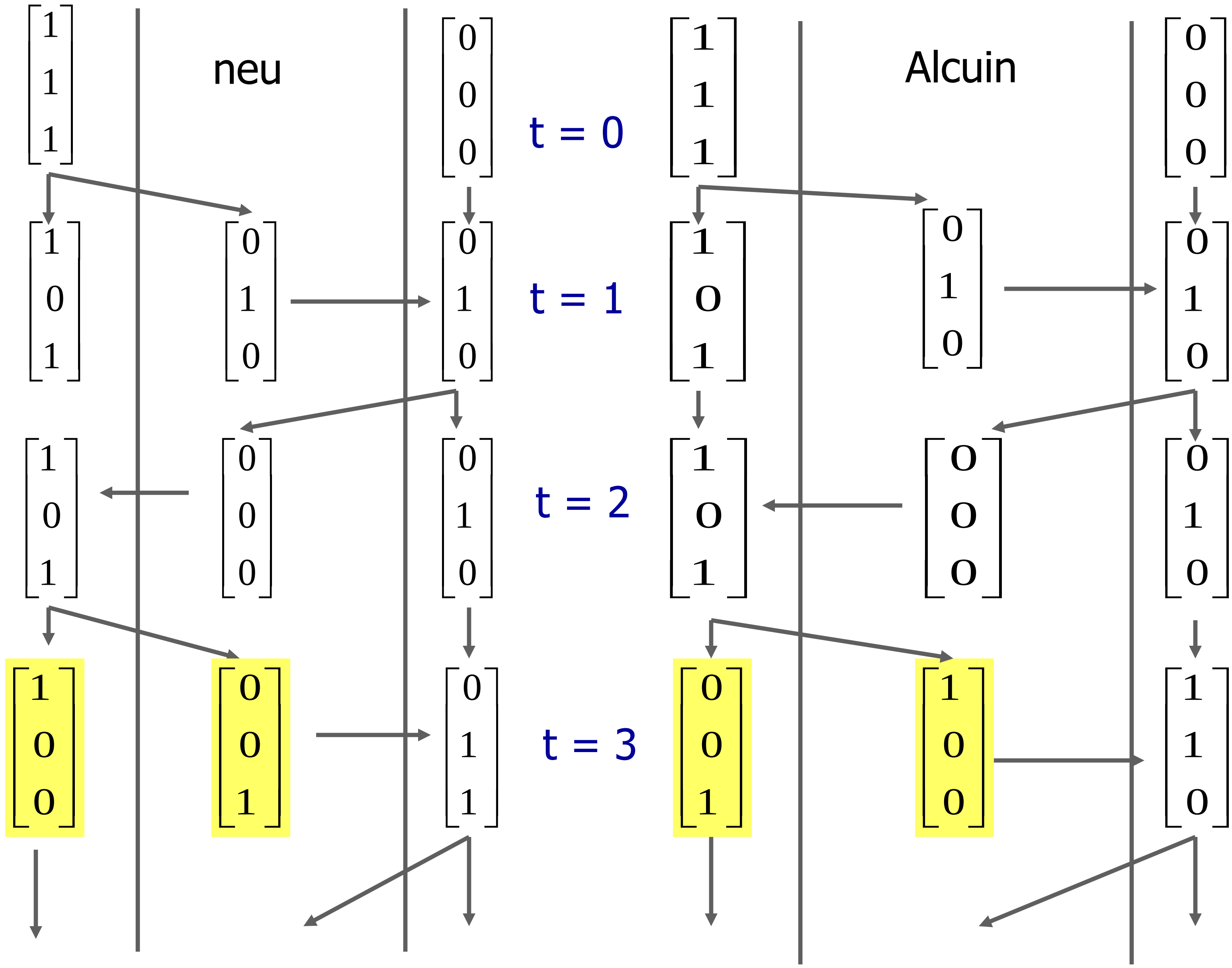
. . . und so fort.



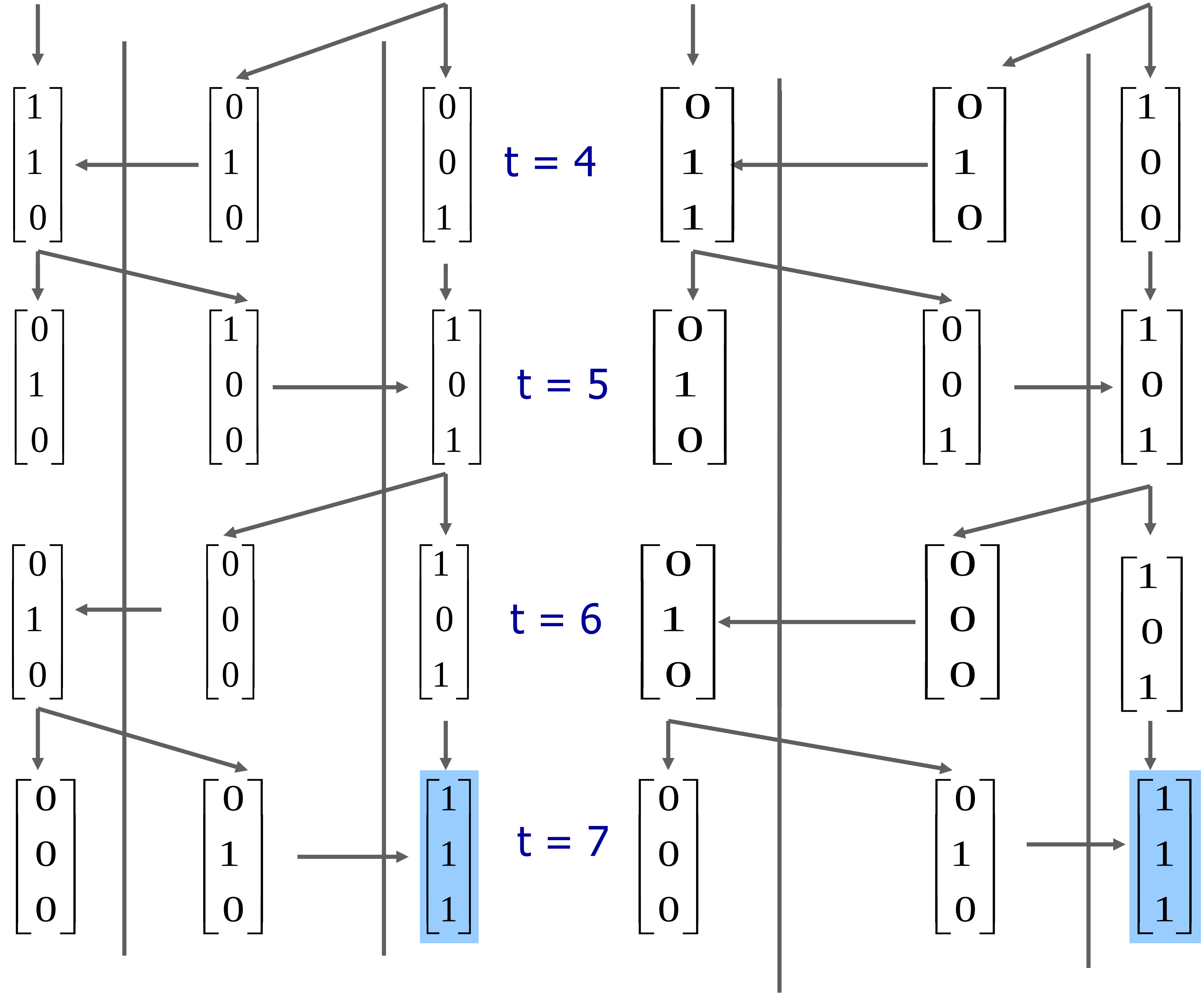
Alcuins Lösung im Doppelpack.



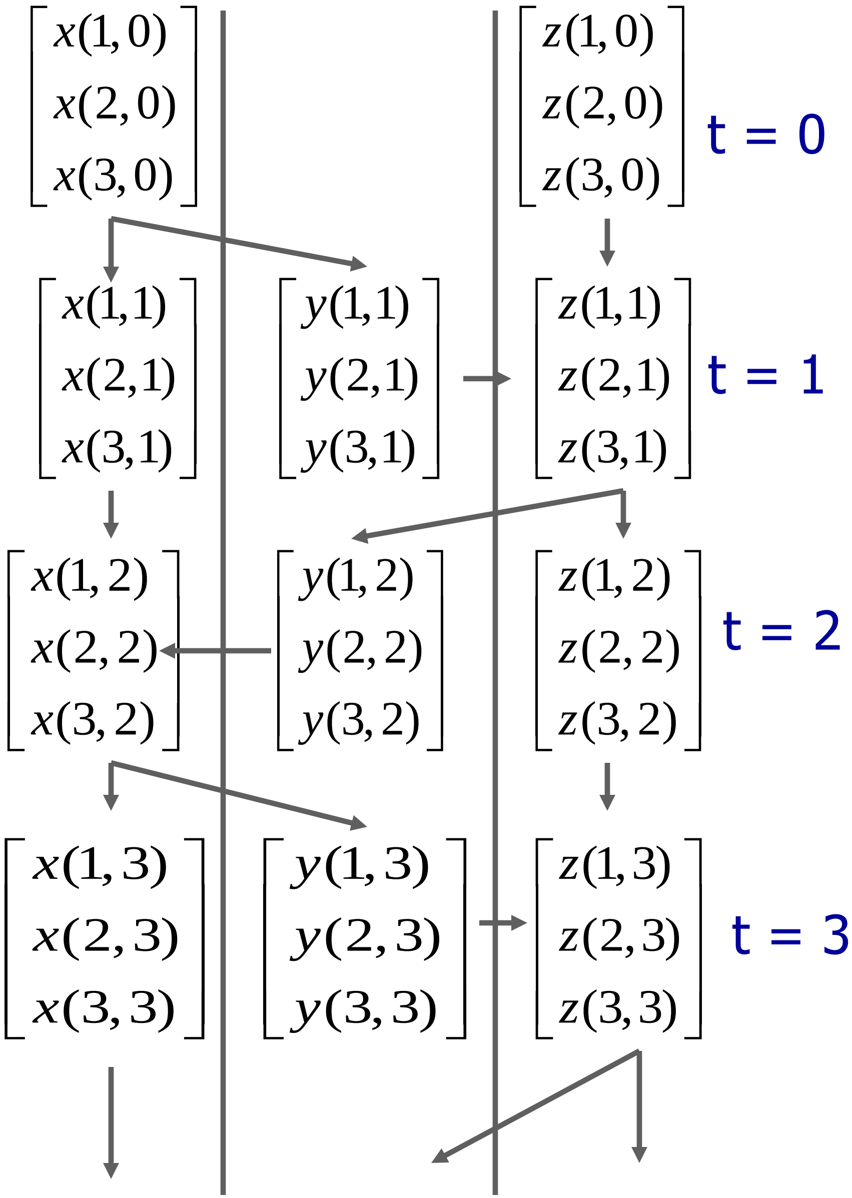
Alcuins Lösung im Doppelpack.

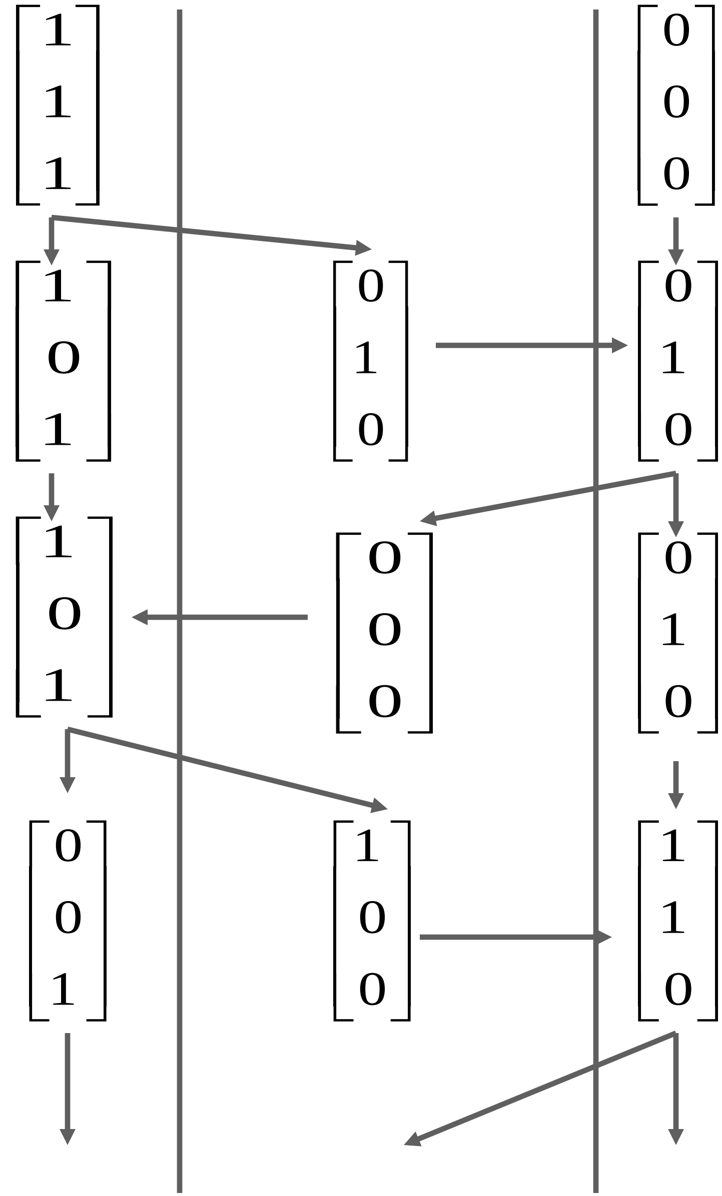


Es gibt mehr als eine Lösung.



Es gibt mehr als eine Lösung.





Eine allgemeine Lösung.

Eine spezielle Lösung.

$$\begin{bmatrix} x(1,4) \\ x(2,4) \\ x(3,4) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y(1,4) \\ y(2,4) \\ y(3,4) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} z(1,4) \\ z(2,4) \\ z(3,4) \end{bmatrix} \qquad t = 4 \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

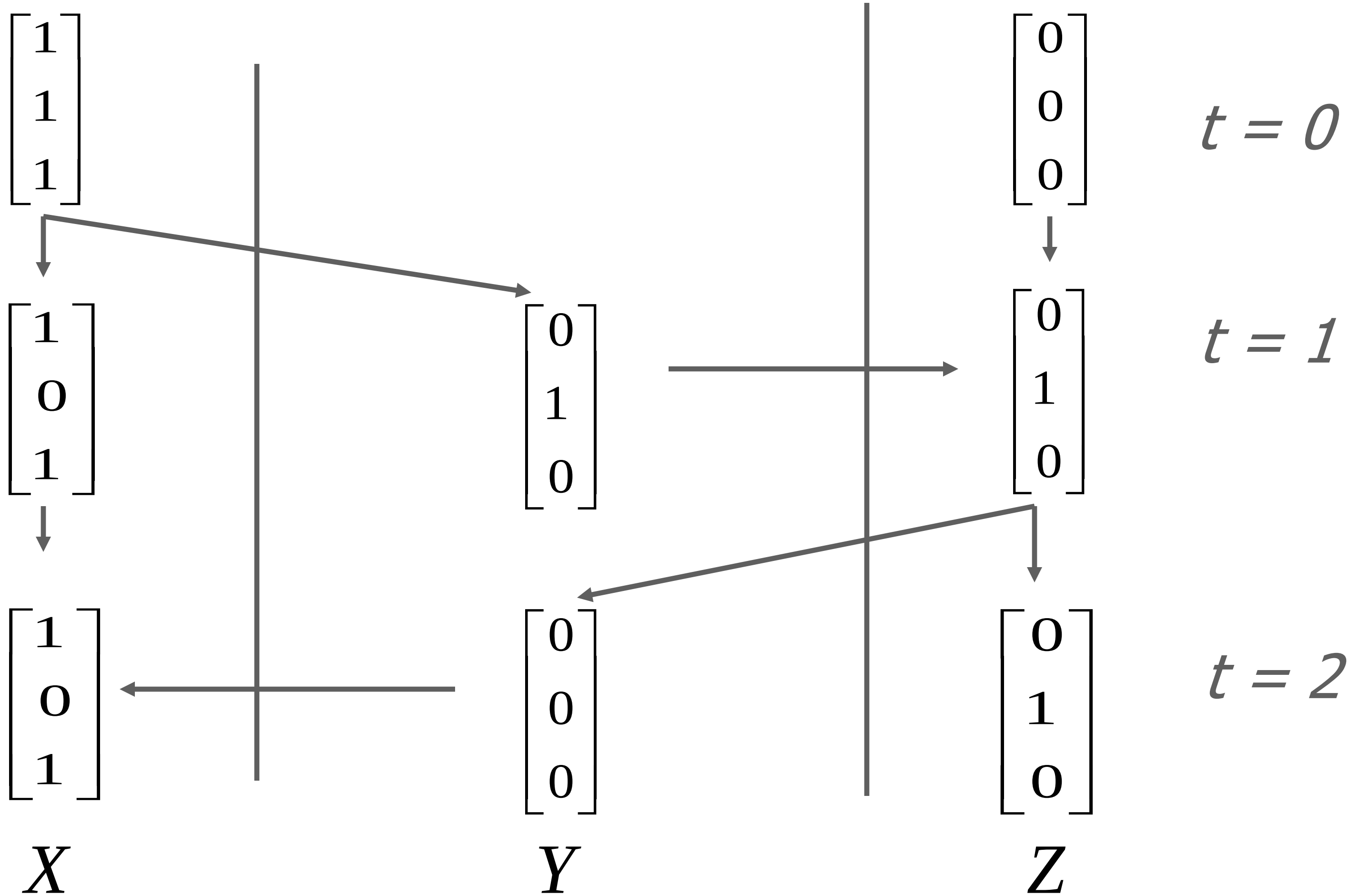
$$\begin{bmatrix} x(1,5) \\ x(2,5) \\ x(3,5) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y(1,5) \\ y(2,5) \\ y(3,5) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} z(1,5) \\ z(2,5) \\ z(3,5) \end{bmatrix} \qquad t = 5 \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(1,6) \\ x(2,6) \\ x(3,6) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y(1,6) \\ y(2,6) \\ y(3,6) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} z(1,6) \\ z(2,6) \\ z(3,6) \end{bmatrix} \qquad t = 6 \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(1,7) \\ x(2,7) \\ x(3,7) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y(1,7) \\ y(2,7) \\ y(3,7) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} z(1,7) \\ z(2,7) \\ z(3,7) \end{bmatrix} \qquad t = 7 \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eine allgemeine Lösung.

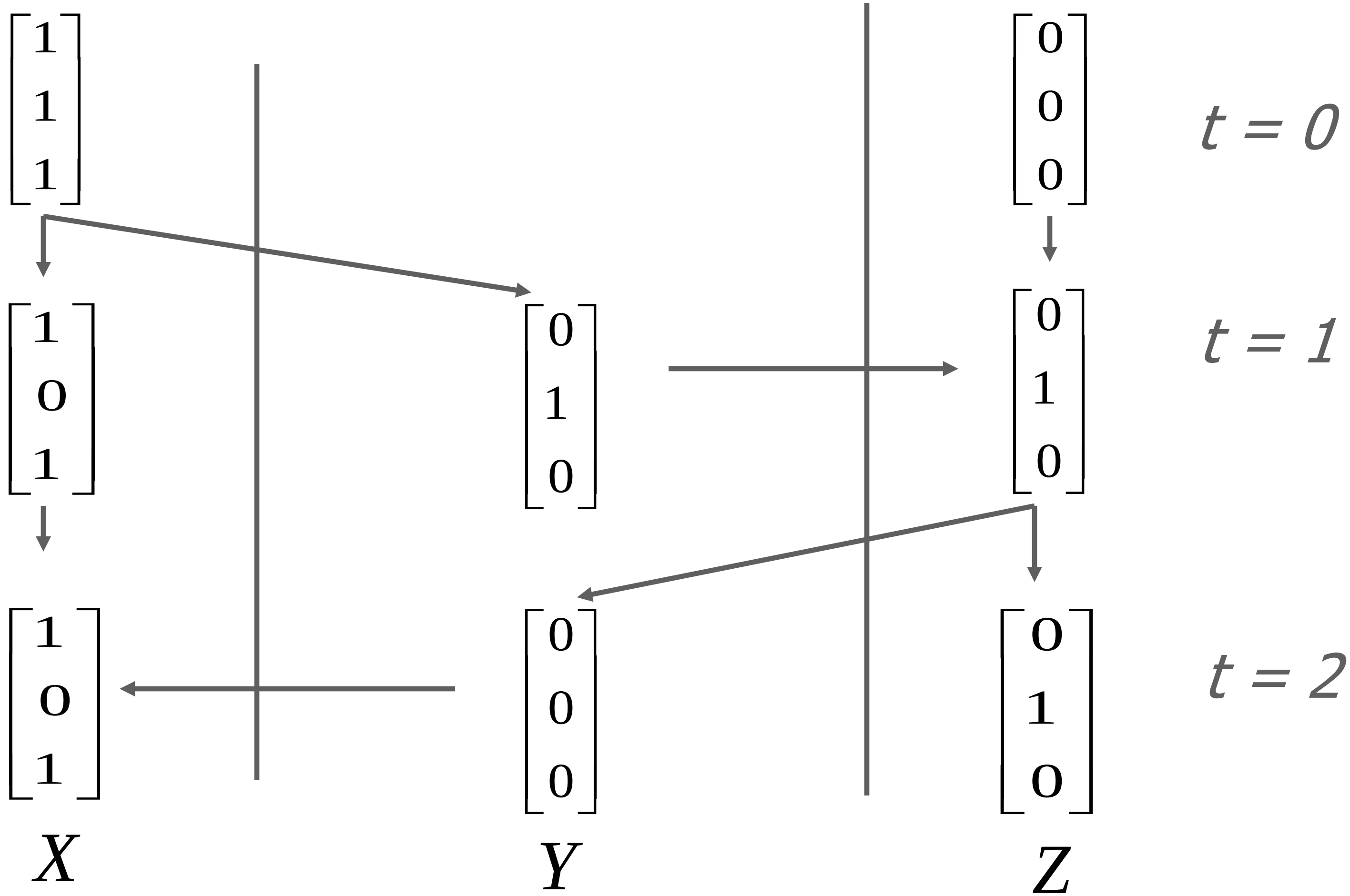
Eine spezielle Lösung.



Binäre Variablen $X(t), Y(t), Z(t) \in \{0,1\}^3$ $\mathbf{0 \leq t \leq T}$

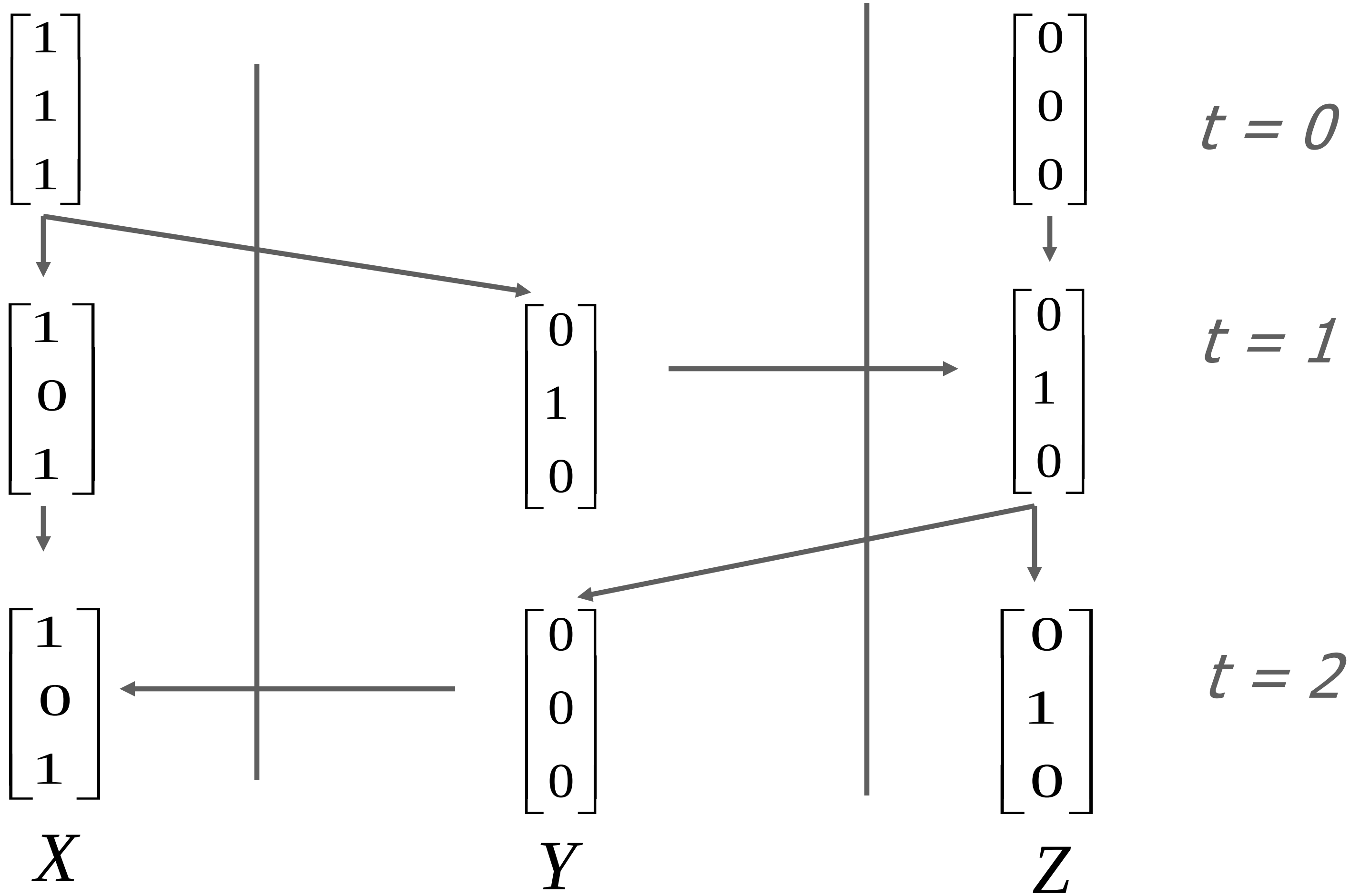
$$X(t) = \begin{bmatrix} x(1,t) \\ x(2,t) \\ x(3,t) \end{bmatrix}, Y(t) = \ldots, Z(t) = \ldots$$

Bedingungen für X, Y und Z ?



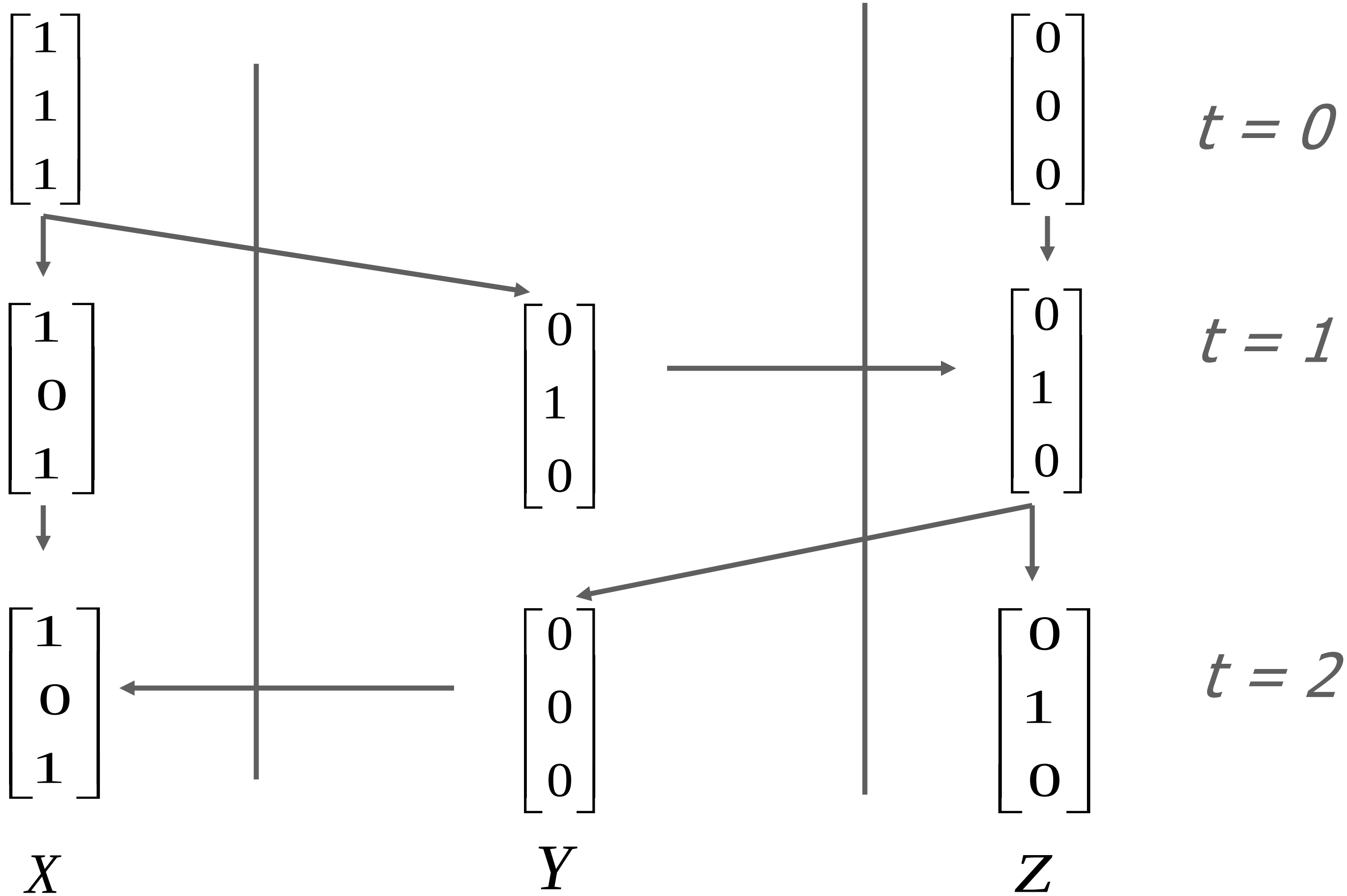
$$Y(t) = \begin{bmatrix} y(1,t) \\ y(2,t) \\ y(3,t) \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

für alle $t \leq T$



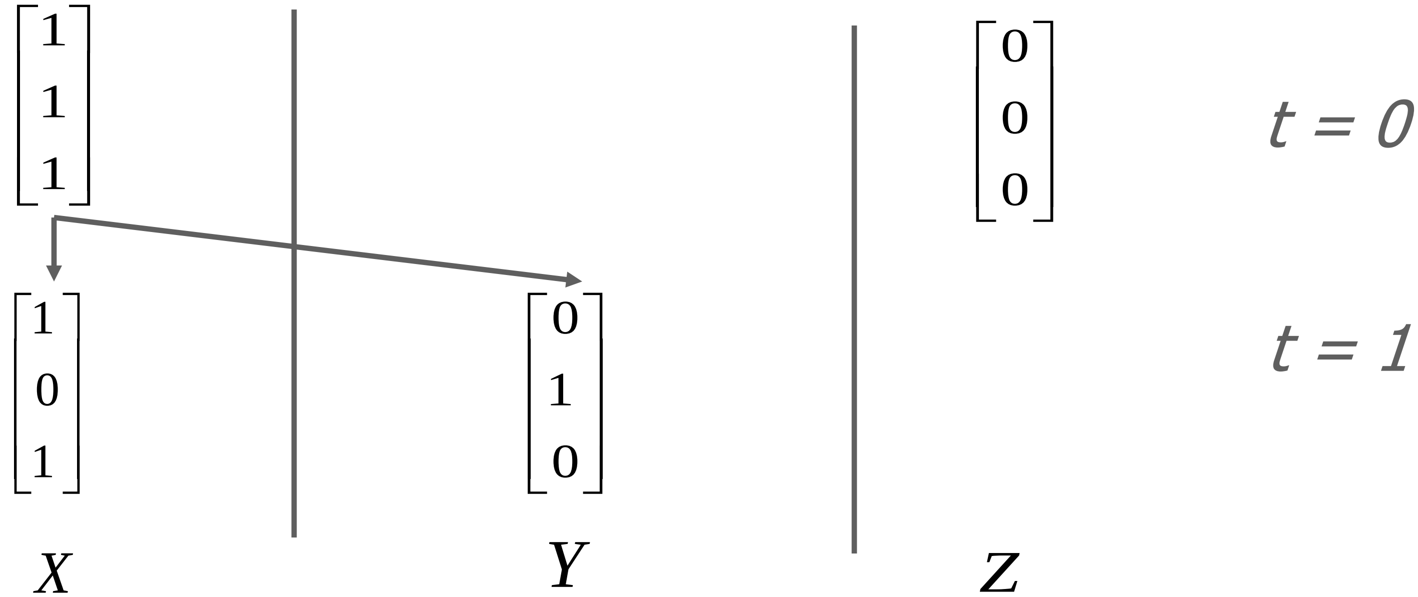
$$X(t) = \begin{bmatrix} x(1,t) \\ x(2,t) \\ x(3,t) \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

für ungerades $t \leq T$ (der Mann ist nicht auf dem linken Ufer)



$$Z(t) = \begin{bmatrix} z(1,t) \\ z(2,t) \\ z(3,t) \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

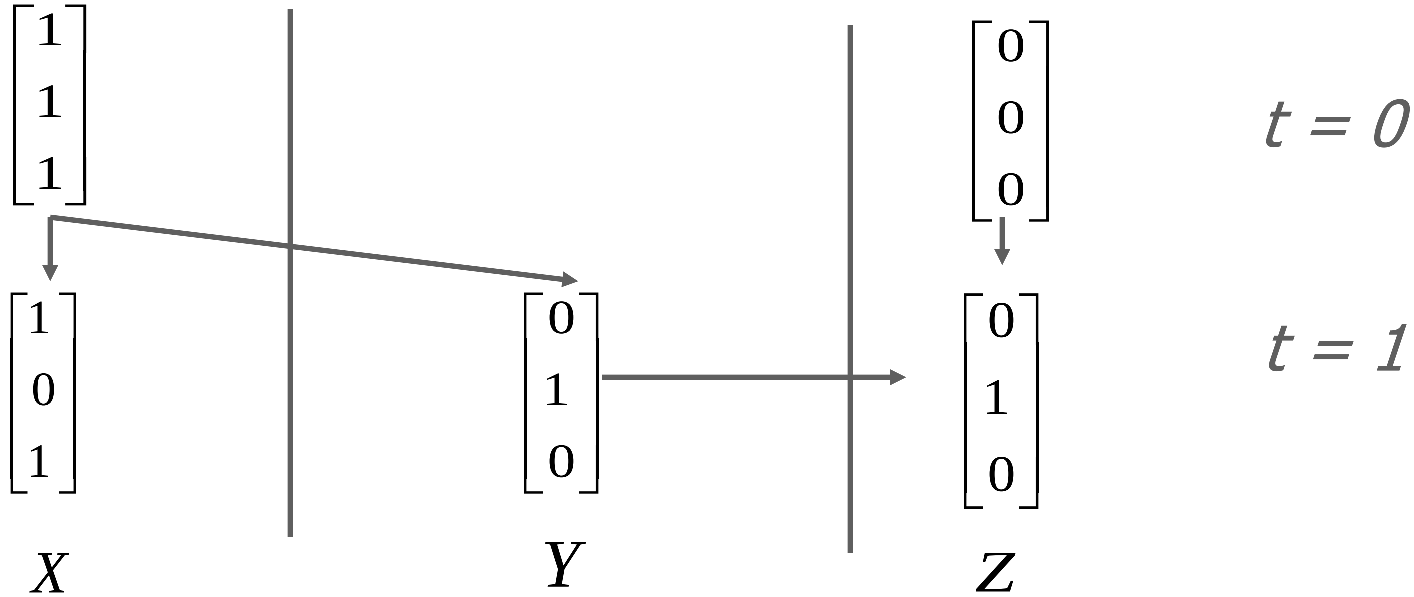
für gerades $t \leq T$ (der Mann ist nicht auf dem rechten Ufer)



$$x(1,t) = x(1,t+1) + y(1,t+1)$$
$$x(2,t) = x(2,t+1) + y(2,t+1)$$
$$x(3,t) = x(3,t+1) + y(3,t+1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x(1,t) \\ x(2,t) \\ x(3,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(1,t+1) \\ x(2,t+1) \\ x(3,t+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y(1,t+1) \\ y(2,t+1) \\ y(3,t+1) \end{bmatrix}$$

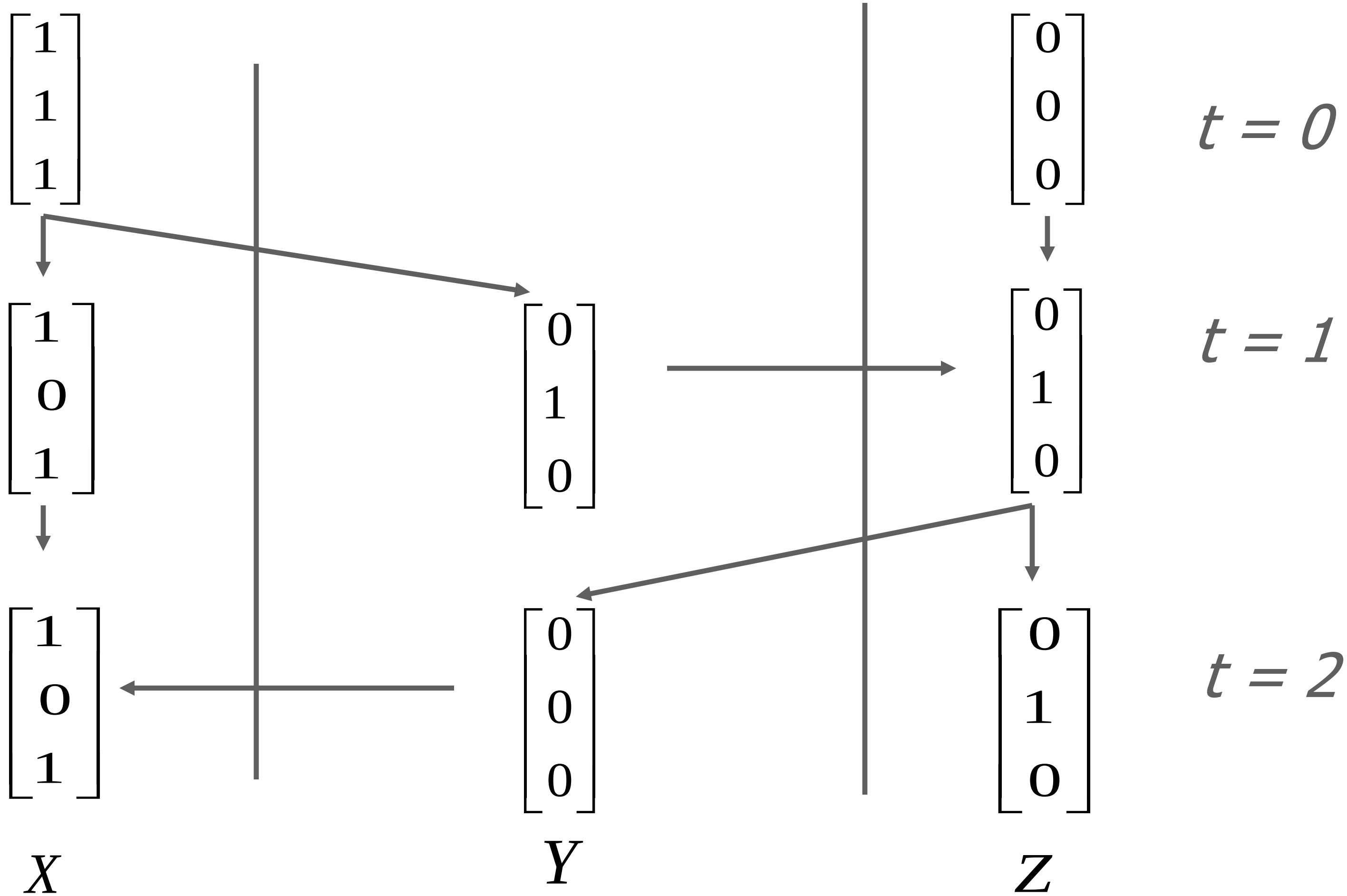
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{X(t)} = X(t+1) + Y(t+1)$$ für gerades $t \leq T$



$$z(1,t+1) = z(1,t) + y(1,t+1)$$
$$z(2,t+1) = z(2,t) + y(2,t+1)$$
$$z(3,t+1) = z(3,t) + y(3,t+1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} z(1,t+1) \\ z(2,t+1) \\ z(3,t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(1,t) \\ z(2,t) \\ z(3,t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y(1,t+1) \\ y(2,t+1) \\ y(3,t+1) \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow Z(t+1) = Z(t) + Y(t+1)$ für gerades $t \le T$



$$Z(t) = Y\left(t+1\right) + Z\left(t+1\right)$$

$$X\left(t+1\right) = Y\left(t+1\right) + X\left(t\right)$$

für ungerades $t \leq T$

Ganzzahliges Programm (IP)

Freie Universität Berlin

$$\min \sum_{i=1}^{3} \sum_{t=1}^{T} x(i,t)$$

$$X(t) = X(t+1) + Y(t+1)$$
$$Z(t+1) = Z(t) + Y(t+1)$$

$t \le T$ gerade

$$Z(t) = Y(t+1) + Z(t+1)$$
$$X(t+1) = Y(t+1) + X(t)$$

$t \le T$ ungerade

$$Y(t) \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

für alle $t \le T$

$$X(t) \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$t \le T$ ungerade

$$Z(t) \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$t \le T$ gerade

$$X(t), Y(t), Z(t) \in \{0,1\}^3$$

für alle $t \le T$

Erst die guten Teile

$$\min \sum_{i=1}^{3} \sum_{t=1}^{T} x(i,t)$$

$$X(t) = X(t+1) + Y(t+1)$$
$$Z(t+1) = Z(t) + Y(t+1)$$

$t \leq T$ gerade

$$Z(t) = Y(t+1) + Z(t+1)$$
$$X(t+1) = Y(t+1) + X(t)$$

$t \leq T$ ungerade

Jeder weiß, wie man mit Gleichungen umgeht.

Und dann?

Freie Universität Berlin

$$Y(t) \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ für alle $t \le T$

$$X(t) \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ $t \le T$ ungerade

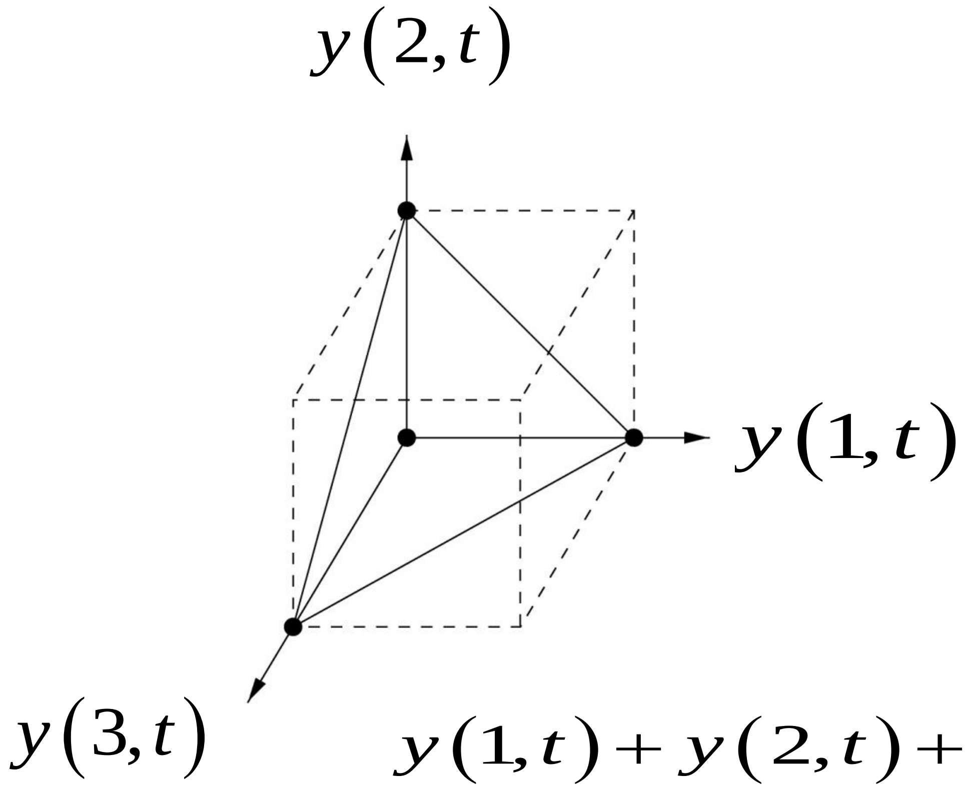
$$Z(t) \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ für gerades $t \le T$

$$X(t), Y(t), Z(t) \in \{0,1\}^3$$ für alle $t \le T$

Aber wie behandelt man die "Mengen-Bedingungen " algorithmisch?

Als Tetraeder (Simplex), …

$$Y(t) \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ für alle $t \leq T$



$$y(1,t) \geq 0$$
$$y(2,t) \geq 0$$
$$y(3,t) \geq 0$$

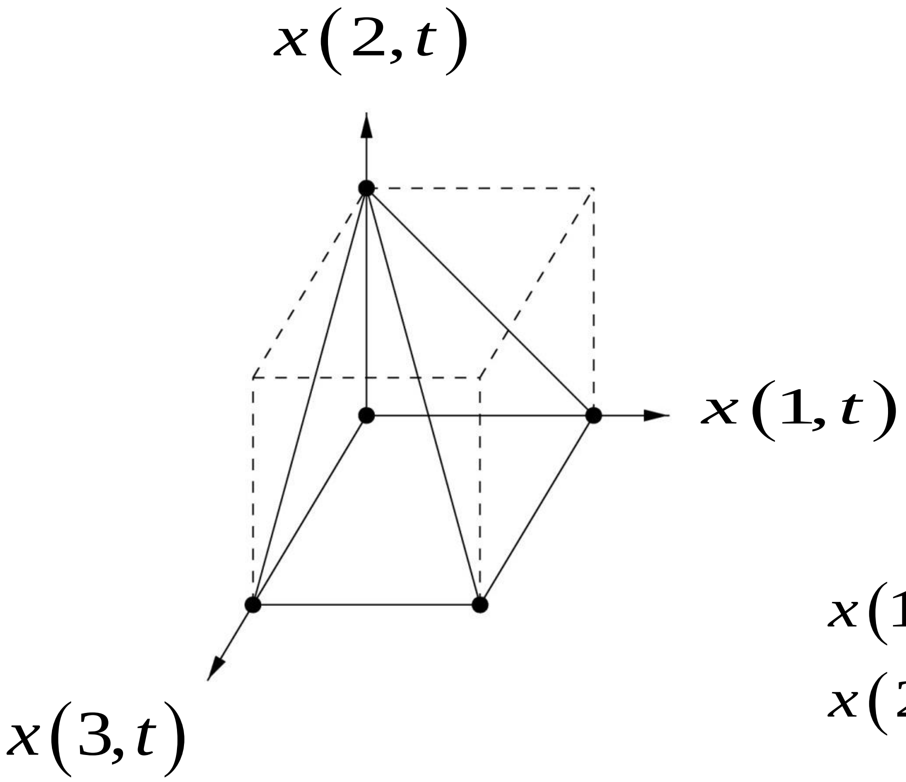
$$y(1,t) + y(2,t) + y(3,t) \leq 1$$

$$y(1,t), y(2,t), y(3,t) \in \{0,1\}$$

… Pyramide, …

$$X(t) \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$t \le T$ ungerade



$$x(1,t) \ge 0$$
$$x(2,t) \ge 0$$
$$x(3,t) \ge 0$$

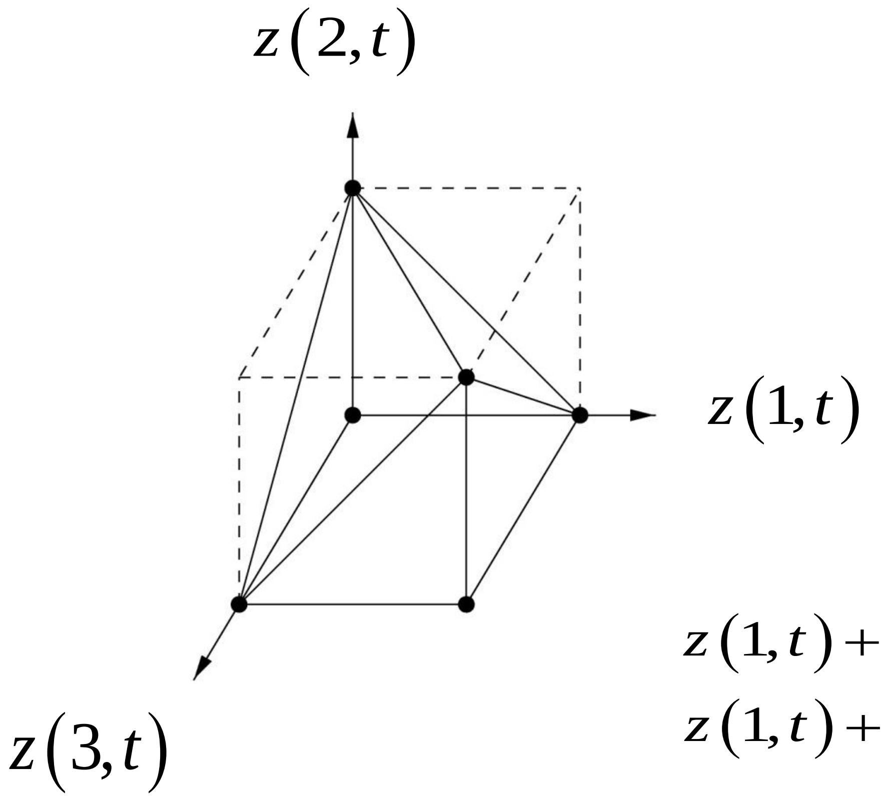
$$x(1,t) + x(2,t) \le 1$$
$$x(2,t) + x(3,t) \le 1$$

$$x(1,t), x(2,t), x(3,t) \in \{0,1\}$$

… und Heptaeder!

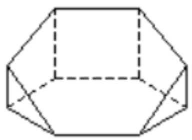
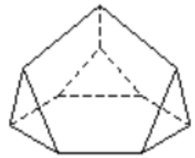
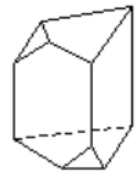
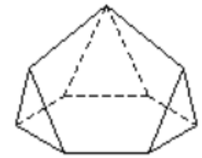
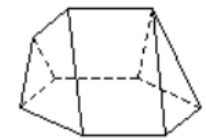
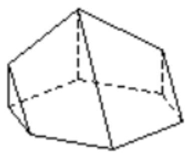
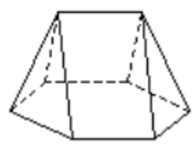
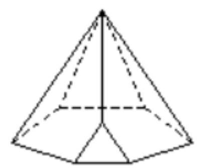
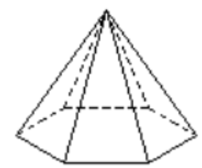
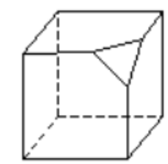
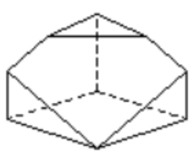
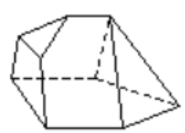
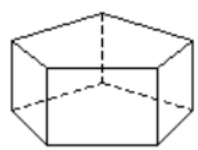
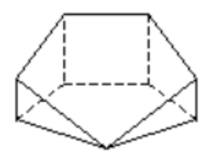
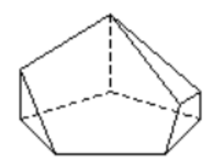
$$Z(t) \in \left\{ \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \right\} \quad t \le T$$

gerade



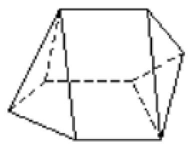
$$z(1,t) \ge 0$$
$$z(2,t) \ge 0$$
$$z(3,t) \ge 0$$
$$z(1,t) \le 1$$
$$z(3,t) \le 1$$
$$z(1,t) + z(2,t) + z(3,t) \le 1$$
$$z(1,t) + z(2,t) - z(3,t) \le 1$$
$$z(1,t), z(2,t), z(3,t) \in \{0,1\}$$

Heptaeder = Siebenflächner

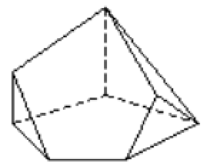
 • Faces: 6,6,4,4,4,3,3 • 10 vertices • 15 edges	 • Faces: 6,5,5,5,3,3,3 • 10 vertices • 15 edges	 • Faces: 6,5,5,4,4,3,3 • 10 vertices • 15 edges	 • Faces: 6,5,4,4,3,3,3 • 9 vertices • 14 edges	 • Faces: 6,5,4,4,3,3,3 • 9 vertices • 14 edges
 • Faces: 6,4,4,4,4,3,3 • 9 vertices • 14 edges	 • Faces: 6,4,4,3,3,3,3 • 8 vertices • 13 edges	 • Faces: 6,4,4,3,3,3,3 • 8 vertices • 13 edges	 Hexagonal pyramid • Faces: 6,3,3,3,3,3,3 • 7 vertices • 12 edges	 • Faces: 5,5,5,4,4,4,3 • 10 vertices • 15 edges
 • Faces: 5,5,5,4,3,3,3 • 9 vertices • 14 edges	 • Faces: 5,5,5,4,3,3,3 • 9 vertices • 14 edges	 Pentagonal prism • Faces: 5,5,4,4,4,4,4 • 10 vertices • 15 edges	 • Faces: 5,5,4,4,4,3,3 • 9 vertices • 14 edges	 • Faces: 5,5,4,4,4,3,3 • 9 vertices • 14 edges

Heptaeder = Siebenflächner

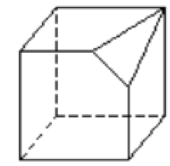
Freie Universität Berlin



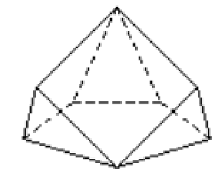
- Faces: 5,5,4,3,3,3,3
- 8 vertices
- 13 edges



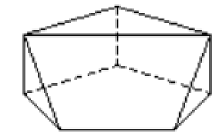
- Faces: 5,5,4,3,3,3,3
- 8 vertices
- 13 edges



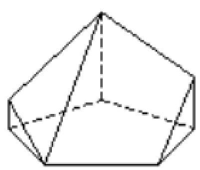
- Faces: 5,4,4,4,4,4,3
- 9 vertices
- 14 edges



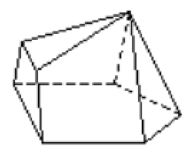
- Faces: 5,4,4,4,3,3,3
- 8 vertices
- 13 edges



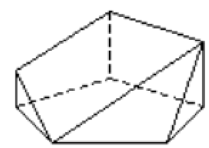
- Faces: 5,4,4,4,3,3,3
- 8 vertices
- 13 edges



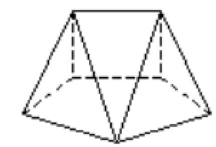
- Faces: 5,4,4,4,3,3,3
- 8 vertices
- 13 edges



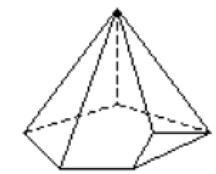
- Faces: 5,4,4,4,3,3,3
- 8 vertices
- 13 edges



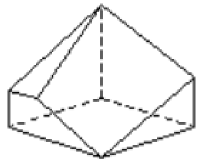
- Faces: 5,4,4,4,3,3,3
- 8 vertices
- 13 edges



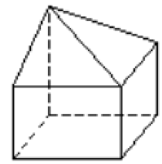
- Faces: 5,4,3,3,3,3,3
- 7 vertices
- 12 edges



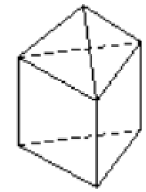
- Faces: 5,4,3,3,3,3,3
- 7 vertices
- 12 edges



- Faces: 4,4,4,4,4,3,3
- 8 vertices
- 13 edges

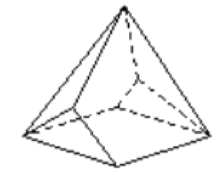


- Faces: 4,4,4,4,4,3,3
- 8 vertices
- 13 edges

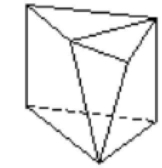


Elongated triangular pyramid

- Faces: 4,4,4,3,3,3,3
- 7 vertices
- 12 edges

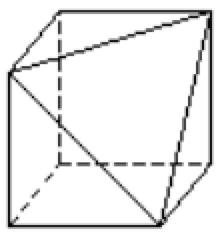
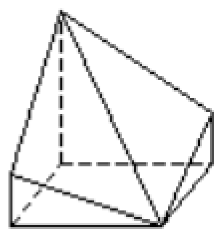
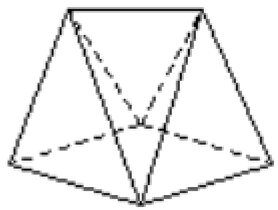
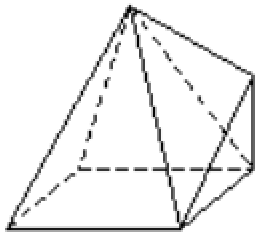


- Faces: 4,4,4,3,3,3,3
- 7 vertices
- 12 edges



- Faces: 4,4,4,3,3,3,3
- 7 vertices
- 12 edges

Heptaeder = Siebenflächner

			
• Faces: 4,4,4,3,3,3,3 • 7 vertices • 12 edges	• Faces: 4,4,4,3,3,3,3 • 7 vertices • 12 edges	• Faces: 4,3,3,3,3,3,3 • 6 vertices • 11 edges	• Faces: 4,3,3,3,3,3,3 • 6 vertices • 11 edges

Binäres Lineares Programm (ILP)

$$\min \sum_{i=1}^{3} \sum_{t=1}^{T} x(i,t)$$

$$X(t) = X(t+1) + Y(t+1)$$

$$Z(t+1) = Z(t) + Y(t+1) \qquad \text{für gerades } t \le T$$

$$Z(t) = Y(t+1) + Z(t+1)$$

$$X(t+1) = Y(t+1) + X(t) \qquad \text{für ungerades } t \le T$$

$$y(1,t) + y(2,t) + y(3,t) \le 1 \qquad \text{für alle } t \le T$$

$$-z(1,t) + z(2,t) + z(3,t) \le 1$$

$$z(1,t) + z(2,t) - z(3,t) \le 1 \qquad \text{für ungerades } t \le T$$

$$x(1,t) + x(2,t) \le 1$$

$$x(2,t) + x(3,t) \le 1 \qquad \text{für gerades } t \le T$$

$$0 \le X(t), Y(t), Z(t) \le 1 \qquad \text{für alle } t \le T$$

$$X(t), Y(t), Z(t) \in \{0,1\}^3 \qquad \text{für alle } t \le T$$

Ganzzahliges Lineares Programm (ILP)

$$\min \sum_{i=1}^{3} \sum_{t=1}^{T} x(i,t)$$

$$X(t) = X(t+1) + Y(t+1)$$

$$Z(t+1) = Z(t) + Y(t+1)$$ für gerades $t \leq T$

$$Z(t) = Y(t+1) + Z(t+1)$$

$$X(t+1) = Y(t+1) + X(t)$$ für ungerades $t \leq T$

$$y(1,t) + y(2,t) + y(3,t) \leq 1$$ für alle $t \leq T$

$$-z(1,t) + z(2,t) + z(3,t) \leq 1$$

$$z(1,t) + z(2,t) - z(3,t) \leq 1$$ für ungerades $t \leq T$

$$x(1,t) + x(2,t) \leq 1$$

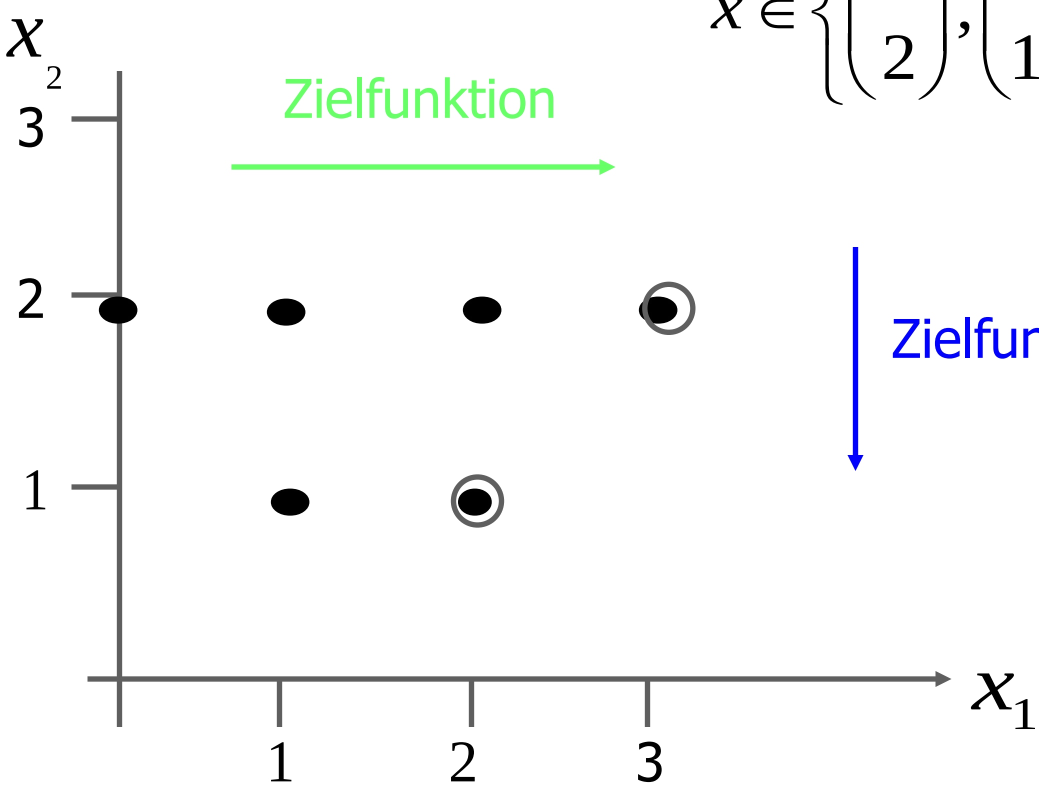
$$x(2,t) + x(3,t) \leq 1$$ für gerades $t \leq T$

$$0 \leq X(t), Y(t), Z(t) \leq 1$$ für alle $t \leq T$

$$X(t), Y(t), Z(t) \in Z^3$$ für alle $t \leq T$

Ganzzahliges Programm (IP)

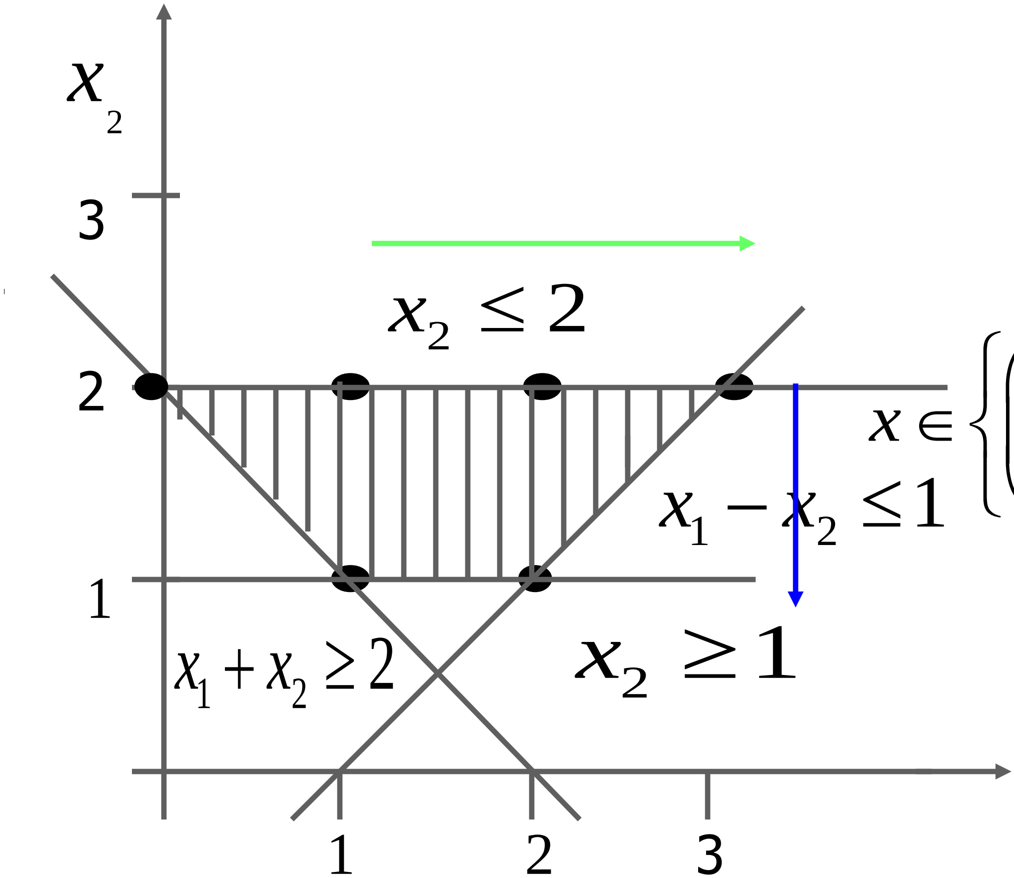
$$x \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$



Zielfunktion $\min \ c^T x$

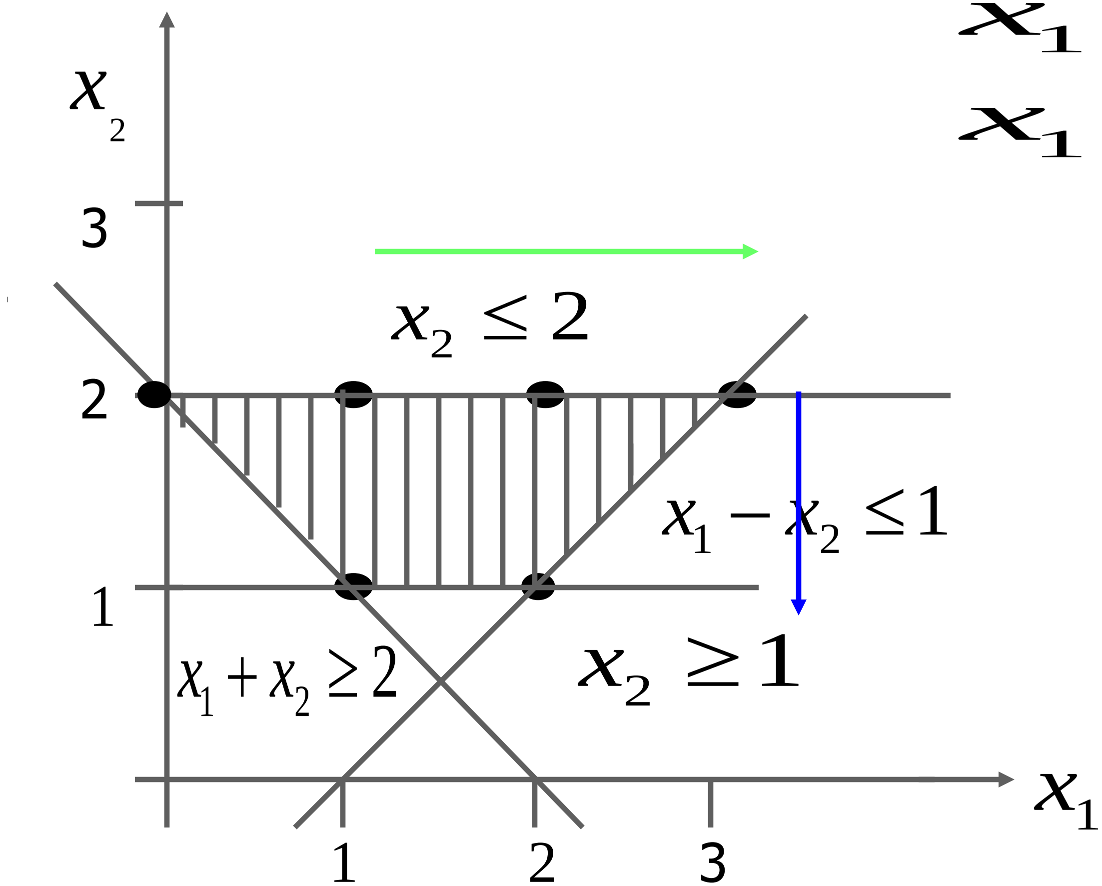
Ganzzahliges Lineares Programm (ILP)

$$
\begin{aligned}
\min\ & c_1 x_1 + c_2 x_2 \\
& x_1 + x_2 \geq 2 \\
& x_1 - x_2 \leq 1 \\
& x_2 \geq 1 \\
& x_2 \leq 2
\end{aligned}
$$



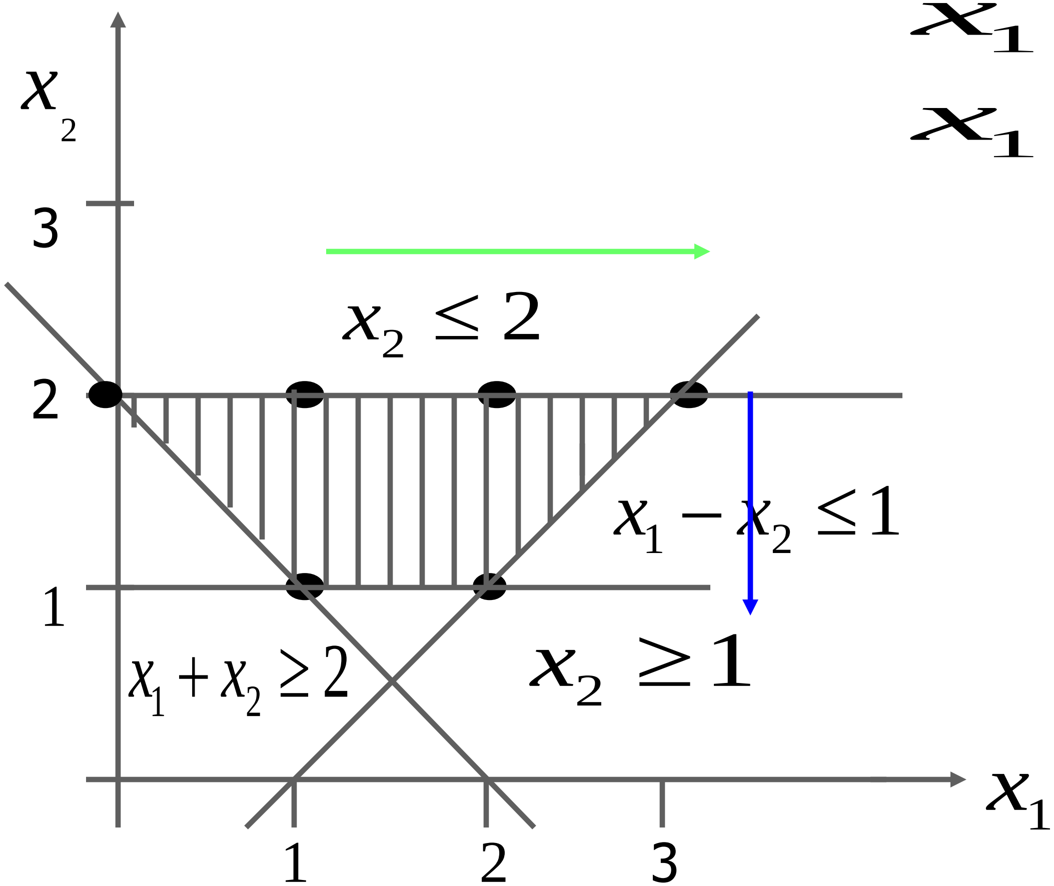
$$x \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Ganzzahliges Lineares Programm (ILP)



$$
\begin{aligned}
\min\ c_1 x_1 &+ c_2 x_2 \\
x_1 + x_2 &\ge 2 \\
x_1 - x_2 &\le 1 \\
x_2 &\ge 1 \\
x_2 &\le 2 \\
x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Lineares Programm (LP) (Lösung ILP als LP)



$$
\begin{aligned}
\min\ c_1x_1 &+ c_2x_2 \\
x_1 + x_2 &\ge 2 \\
x_1 - x_2 &\le 1 \\
x_2 &\ge 1 \\
x_2 &\le 2 \\
\cancel{x_1, x_2} &\cancel{\in Z}
\end{aligned}
$$

LP-Relaxierung (Lösung ILP als LP)

Freie Universität Berlin

$$\min \; c_1 x_1 + c_2 x_2$$

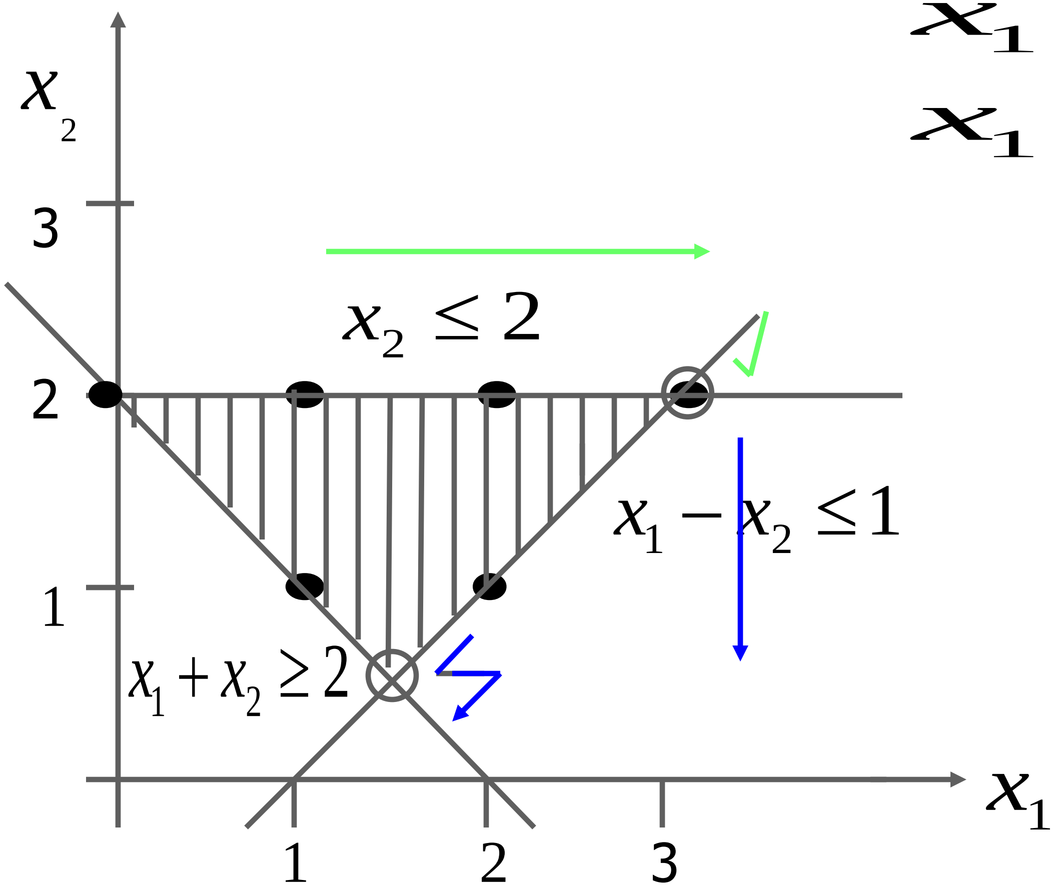
$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$\cancel{x_2 \geq 1}$$

$$\cancel{x_1, x_2 \in Z}$$



Schnittebenenverfahren (Lösung ILP als LP)

$$\min \ c_1 x_1 + c_2 x_2$$

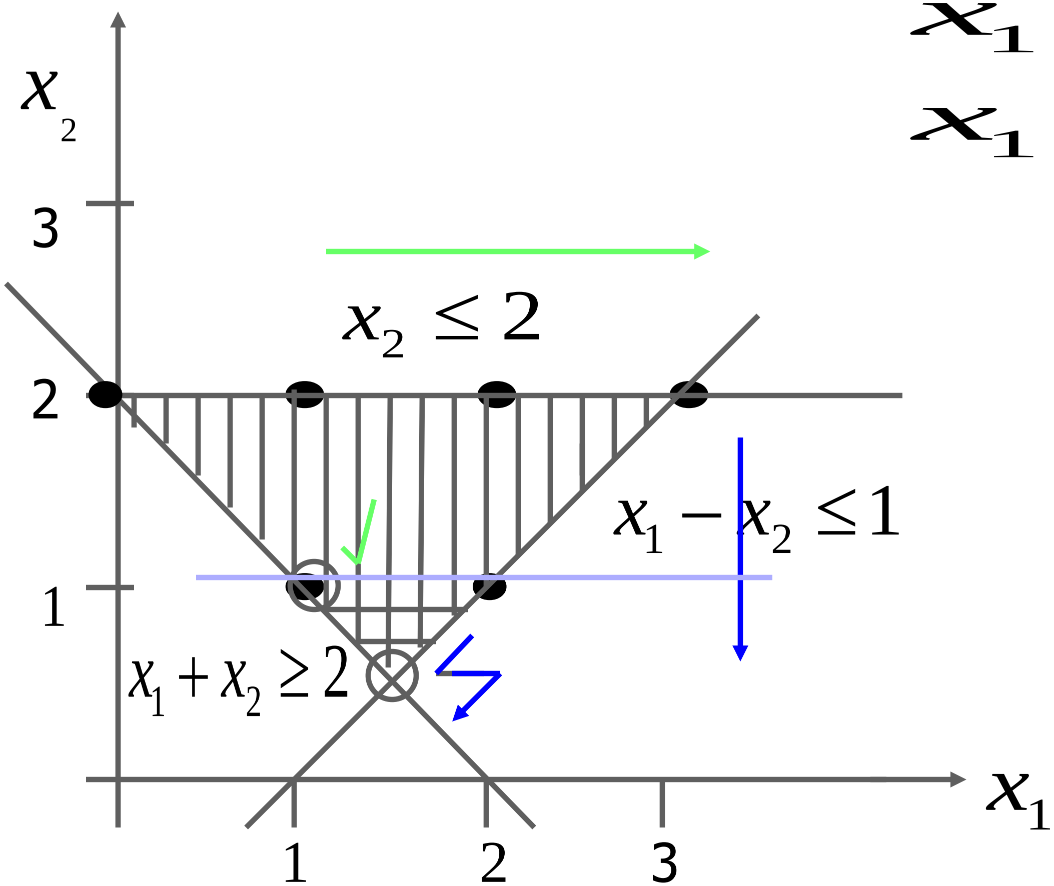
$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

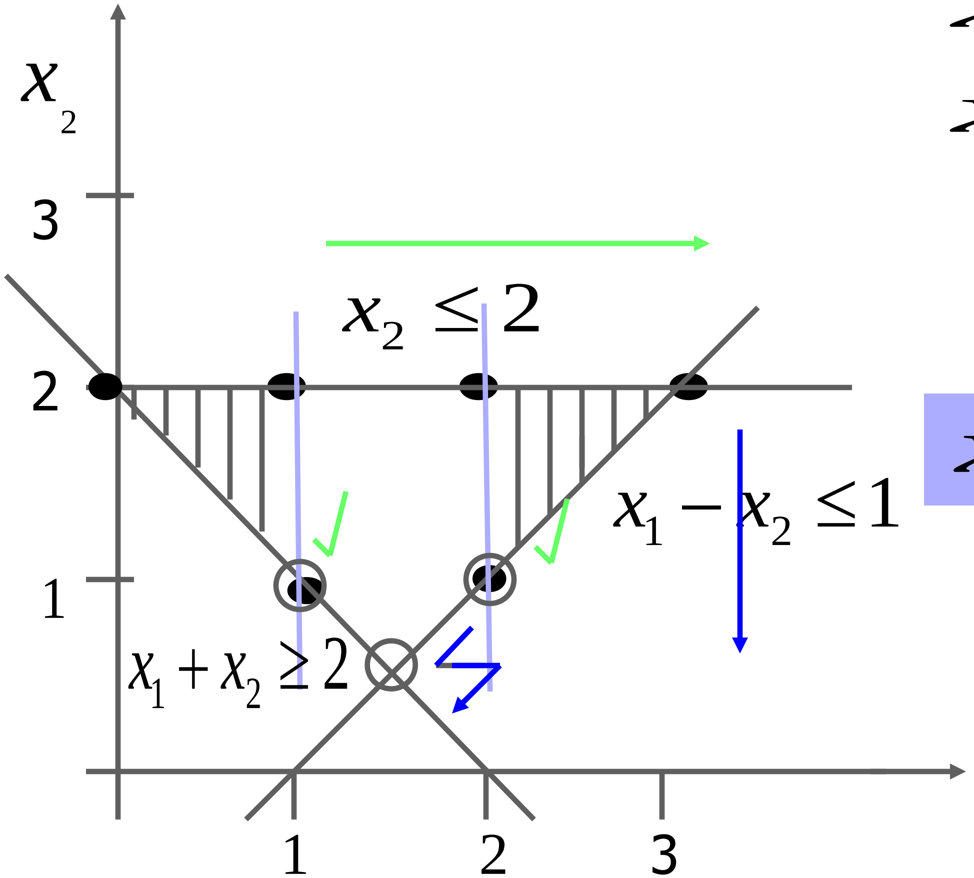
$$x_2 \leq 2$$

$$\boxed{x_2 \geq 1}$$

$$\cancel{x_1, x_2 \in Z}$$



Branch-and-Bound-Verfahren (Lösung ILP als LP)



$$\min\ c_1x_1 + c_2x_2$$
$$x_1 + x_2 \ge 2$$
$$x_1 - x_2 \le 1$$
$$x_2 \le 2$$
$$\cancel{x_1, x_2 \in Z}$$

$\boxed{x_1 \le 1}$ $\boxed{x_1 \ge 2}$

LP-Relaxierung

$$\min \sum_{i=1}^{3} \sum_{t=1}^{T} x(i,t)$$

$$X(t) = X(t+1) + Y(t+1)$$

$$Z(t+1) = Z(t) + Y(t+1)$$

$t \leq T$ gerade

$$Z(t) = Y(t+1) + Z(t+1)$$

$$X(t+1) = Y(t+1) + X(t)$$

$t \leq T$ ungerade

$$y(1,t) + y(2,t) + y(3,t) \leq 1$$

für alle $t \leq T$

$$x(1,t) + x(2,t) \leq 1$$

$$x(2,t) + x(3,t) \leq 1$$

$t \leq T$ ungerade

$$-z(1,t) + z(2,t) + z(3,t) \leq 1$$

$$z(1,t) + z(2,t) - z(3,t) \leq 1$$

$t \leq T$ gerade

$$0 \leq X(t), Y(t), Z(t) \leq 1$$

für alle $t \leq T$

Wie ist das bei Alkuin?

- Zeithorizont T=7
- # Variable = 69
- # Gleichungen = 48
- # Ungleichungen = 21 + Schranken
- Zielfunktion und Startpunkt

Minimize $+x(1,1)+x(2,1)+x(3,1)$

$$+x(1,2)+x(2,2)+x(3,2)$$

$$+x(1,3)+x(2,3)+x(3,3)$$

$$+x(1,4)+x(2,4)+x(3,4)$$

$$+x(1,5)+x(2,5)+x(3,5)$$

$$+x(1,6)+x(2,6)+x(3,6)$$

$$+x(1,7)+x(2,7)+x(3,7)$$

Subject to $x(1,0)=1$

$$x(2,0)=1$$

$$x(3,0)=1$$

$$z(1,0)=0$$

$$z(2,0)=0$$

$$z(3,0)=0$$

$$+x(1,1)+x(2,1)<=1$$
$$+x(2,1)+x(3,1)<=1$$

$$+y(1,1)+y(2,1)+y(3,1)<=1$$

$$-x(1,0)+x(1,1)+y(1,1)=0$$
$$-x(2,0)+x(2,1)+y(2,1)=0$$
$$-x(3,0)+x(3,1)+y(3,1)=0$$
$$+y(1,1)+z(1,0)-z(1,1)=0$$
$$+y(2,1)+z(2,0)-z(2,1)=0$$
$$+y(3,1)+z(3,0)-z(3,1)=0$$

Polytop der x-Zustände, y-Kapazitätsbedingung und Zustandstransition für $t=1$

$$+y(1,2)+y(2,2)+y(3,2)<=1$$

$$-z(1,2)+z(2,2)+z(3,2)<=1$$
$$+z(1,2)+z(2,2)-z(3,2)<=1$$

$$+x(1,1)-x(1,2)+y(1,2)=0$$
$$+x(2,1)-x(2,2)+y(2,2)=0$$
$$+x(3,1)-x(3,2)+y(3,2)=0$$
$$+y(1,2)-z(1,1)+z(1,2)=0$$
$$+y(2,2)-z(2,1)+z(2,2)=0$$
$$+y(3,2)-z(3,1)+z(3,2)=0$$

$$\vdots$$

y-Kapazitätsschranke, Polytop der z-Zustände und Zustandstransition für $t = 2$

Bounds

$0 <= x(1,1) <= 1$

$0 <= x(2,1) <= 1$

$0 <= x(3,1) <= 1$

.

.

.

$0 <= z(3,7) <= 1$

Integers

$x(1,1)$

$x(2,1)$

$x(3,1)$

...

$z(3,7)$

End

Schranken und Ganzzahligkeitsbedingungen

Einsatz eines LP-Codes

(Lineare Programmierung 1987-2000)

Alter Computer	Neuer Computer	Speedup
Sun 3/50	Pentium 4, 1.7 GHz	800
Sun 3/50	Compaq Server ES 40, 667 MHz	900
Intel 386, 25 MHz	Compaq Server ES 40, 667 MHz	400
IBM 3090/108S	Compaq Server ES 40, 667 MHz	45
Cray X-MP/416	Compaq Server ES 40, 667 MHz	10

Alter Code	Neuer Code	Speedup
XMP	Cplex 1.0	4,7
Cplex 1.0	Cplex 5.0	22,0
Cplex 5.0	Cplex 7.1	3,7
XMP	Cplex 7.1	960

„A Model that might have taken a year to solve 10 years ago, can now solve in less than 10 seconds."

Bixby (2001). Solving Real-World Linear Programs: A Decade and More of Progress. *Operations Research 50, No. 1, S. 3-15.*

Lösung der LP-Relaxierung ...

CPLEX> read ani7.lp

Problem `ani7.lp´ read.

Read Time = 0.19 sec.

CPLEX> change problem relax

Problem changed to LP relaxation.

CPLEX> optimize

LP Presolve eleminated 6 rows and 6 columns.

Aggregator did 6 substitutions.

Reduced LP has 57 rows, 57 columns, and

163 nonzeros.

Presolve Time = 0.03 sec.

Lösung der LP-Relaxierung …

Iteration Log . . .
Iteration: 1 Infeasibility = 5.000000
Switched to Devex.
Iteration: 28 Objective = 6.000000

Primal – Optimal: Objective = 6.0000000000e+00
Solution Time = 0.08 sec. Iterations = 30 (27)

Lösung der LP-Relaxierung …

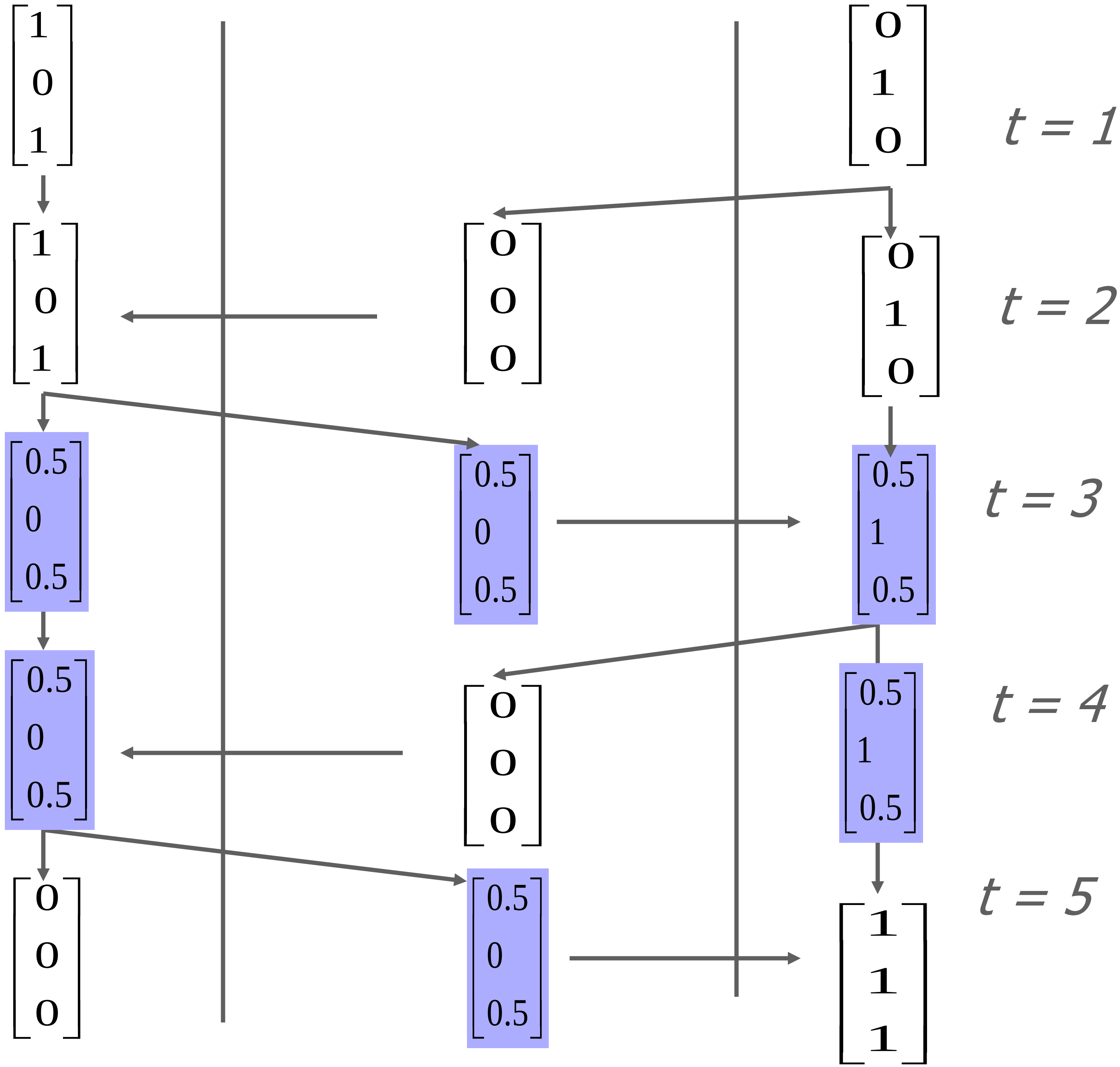
CPLEX> display solution --

Variable	Name		Solution Value
x(1,0)	x(2,0)	x(3,0)	1.000000
x(1,1)		x(3,1)	1.000000
	y(2,1)		1.000000
	z(2,1)		1.000000
x(1,2)		x(3,2)	1.000000
	z(2,2)		1.000000
x(1,3)		x(3,3)	0.500000
y(1,3)		y(3,3)	0.500000
z(1,3)		z(3,3)	0.500000
	z(2,3)		1.000000

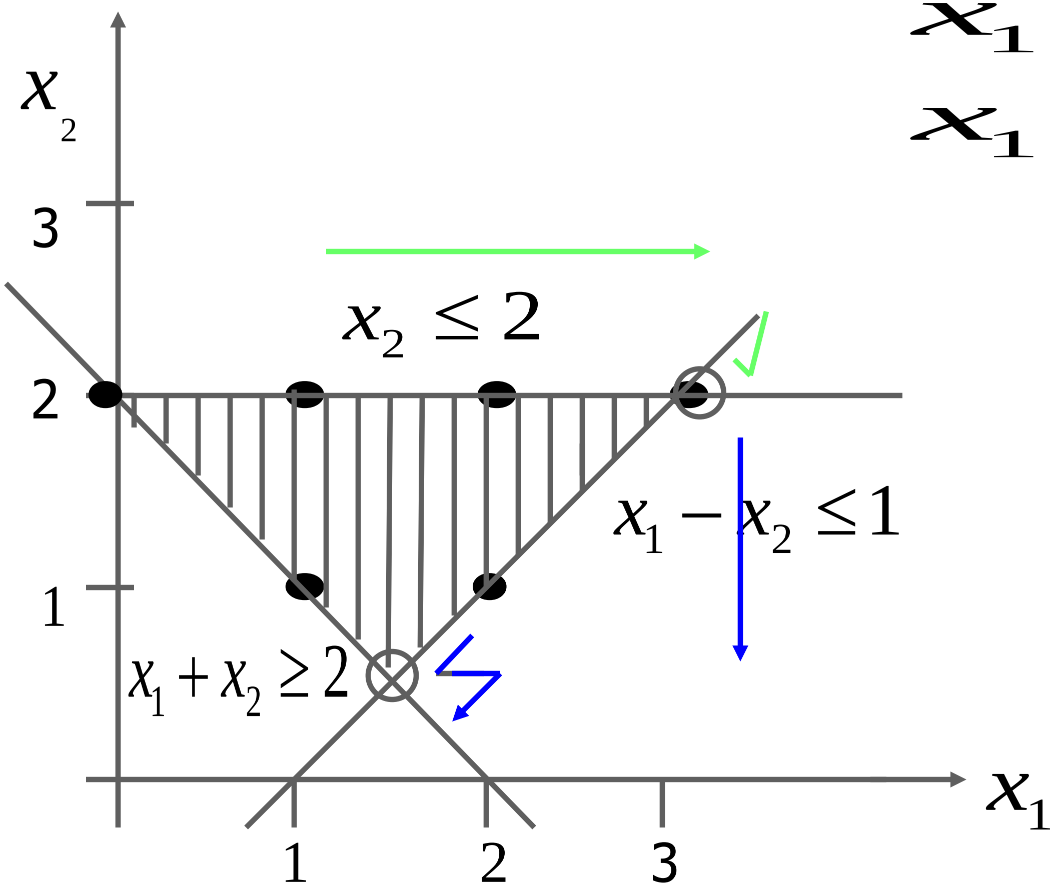
Lösung der LP-Relaxierung …

Variable	Name		Solution Value
x(1,4) z(1,4)		x(3,4) z(3,4)	0.500000 0.500000
 y(1,5) z(1,5) z(1,6) z(1,7)	z(2,4) z(2,5) z(2,6) z(2,7)	 y(3,5) z(3.5) z(3,6) z(3,7)	1.000000 0.500000 1.000000 1.000000 1.000000

All other variables in the range 1—69 are zero.


t = 1
t = 2
t = 3
t = 4
t = 5

LP-Relaxierung (Lösung ILP als LP)



$$\min \; c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$\cancel{x_2 \geq 1}$$

$$\cancel{x_1, x_2 \in Z}$$

Alle Ecken von Alkuins LP (Berechnung mit PORTA)

CONV_SECTION

(1)	1	1	1				0	0	0
	1	0	1	0	1	0	0	1	0
	1	0	1	0	0	0	0	1	0
	1/3	0	2/3	2/3	0	1/3	2/3	1	1/3
	1/3	1/3	2/3	0	1/3	0	2/3	2/3	1/3
	1/3	1/3	2/3	0	0	0	2/3	2/3	1/3
	1/3	1/3	2/3	0	0	0	2/3	2/3	1/3
	1/3	1/3	2/3	0	0	0	2/3	2/3	1/3
	.								
	.								
	.								

Alle Ecken von Alkuins LP (Berechnung mit PORTA)

CONV_SECTION

(1563)

1	1	1				0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1/2	1	0	1/2	0	0	½	0
1/2	1/2	1/2	1/2	0	1/2	1/2	1/2	1/2

Die 1563 gebrochenen Ecken der LP-Relaxierung.

Alle Ecken von Alkuins LP (Berechnung mit PORTA)

Freie Universität Berlin

(1564)

1	1	1				0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1	0
.								
.								
.								

Alle Ecken von Alkuins LP (Berechnung mit PORTA)

Freie Universität Berlin

(1648)

1	1	1				0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0

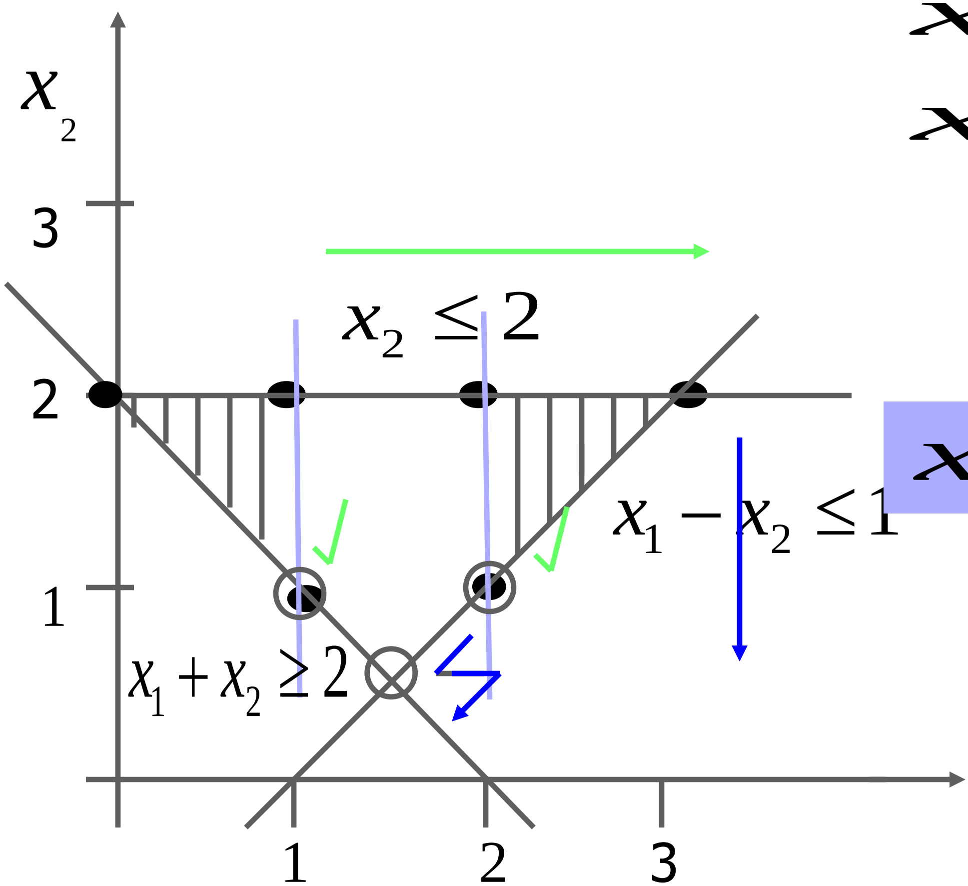
END

Die 85 ganzzahligen Ecken der LP-Relaxierung.

$$
\begin{aligned}
\min\ c_1x_1 &+ c_2x_2 \\
x_1 + x_2 &\geq 2 \\
x_1 - x_2 &\leq 1 \\
x_2 &\leq 2
\end{aligned}
$$

$\boxed{x_1 \leq 1}$ $\boxed{x_1 \geq 2}$

$\cancel{x_1, x_2 \in Z}$



Lösung durch Branch-and-Bound

CPLEX> change bounds x(1,3) u 0

New bounds on variable \`x(1,3)´: x(1,3) = 0

CPLEX> change problem relax

Problem changed to LP-relaxation.

CPLEX> tranopt

Iteration Log . . .

Iteration: 1 Dual Objective = 6.000000

Dual – Optimal: Objective = 9.000000000e+00

Solution Time = 0.02 sec. Iterations = 12 (0)

Fordert man jedoch zusätzlich noch, dass zuerst der Wolf über den Fluss gebracht werden muss $\left(x\left(1,3\right)\leq 0\right),\ldots$

Lösung durch Branch-and-Bound

CPLEX> display solution --

Variable	Name		Solution Value
x(1,0)	x(2,0)	x(3,0)	1.000000
x(1,1)		x(3,1)	1.000000
	y(2,1)		1.000000
	z(2,1)		1.000000
x(1,2)		x(3,2)	1.000000
	z(2,2)		1.000000
		x(3,3)	1.000000
y(1,3)			1.000000
z(1,3)	z(2,3)		1.000000
	x(2,4)	x(3,4)	1.000000
	y(2,4)		1.000000

Lösung durch Branch-and-Bound

Variable	Name		Solution Value
z(1,4)			1.000000
	x(2,5)		1.000000
	z(2,4)		1.000000
		y(3,5)	1.000000
z(1,5)		z(3.5)	1.000000
	x(2,6)		1.000000
z(1,6)		z(3,6)	1.000000
	y(2,7)		1.000000
z(1,7)	z(2,7)	z(3,7)	1.000000

All other variables in the ranges 1—69 are zero.

... erhält man Alcuins Lösung.

Lösung durch Branch-and-Bound (2. Fall)

CPLEX> read ani7.lp

Problem `ani7.lp´ read.

Read Time = 0.10 sec.

CPLEX>optimize

MIP Presolve eliminated 6 rows and 6 columns.

Aggregator did 6 substitutions.

Reduced MIP has 57 rows, 57 columns, and
163 nonzeros.

Presolve Time = 0.02 sec.

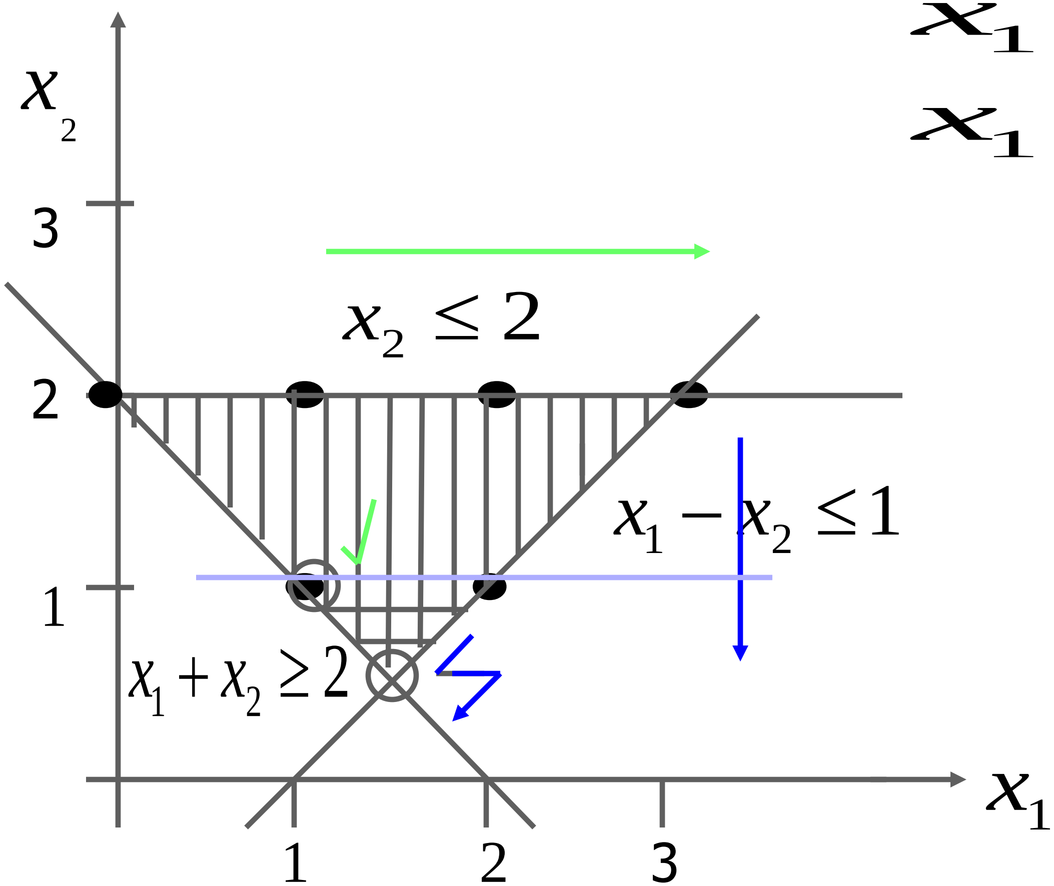
Lösung durch Branch-and-Bound (2. Fall)

Nodes	Left	Objec-tive	IInf	Best	Integer	Best Node	Cuts/ItCnt
0	0	6.0000	12			6.0000	30
* 2	2	9.0000	0		9.0000	6.0000	37
* 3	0	9.0000	0		9.0000		39

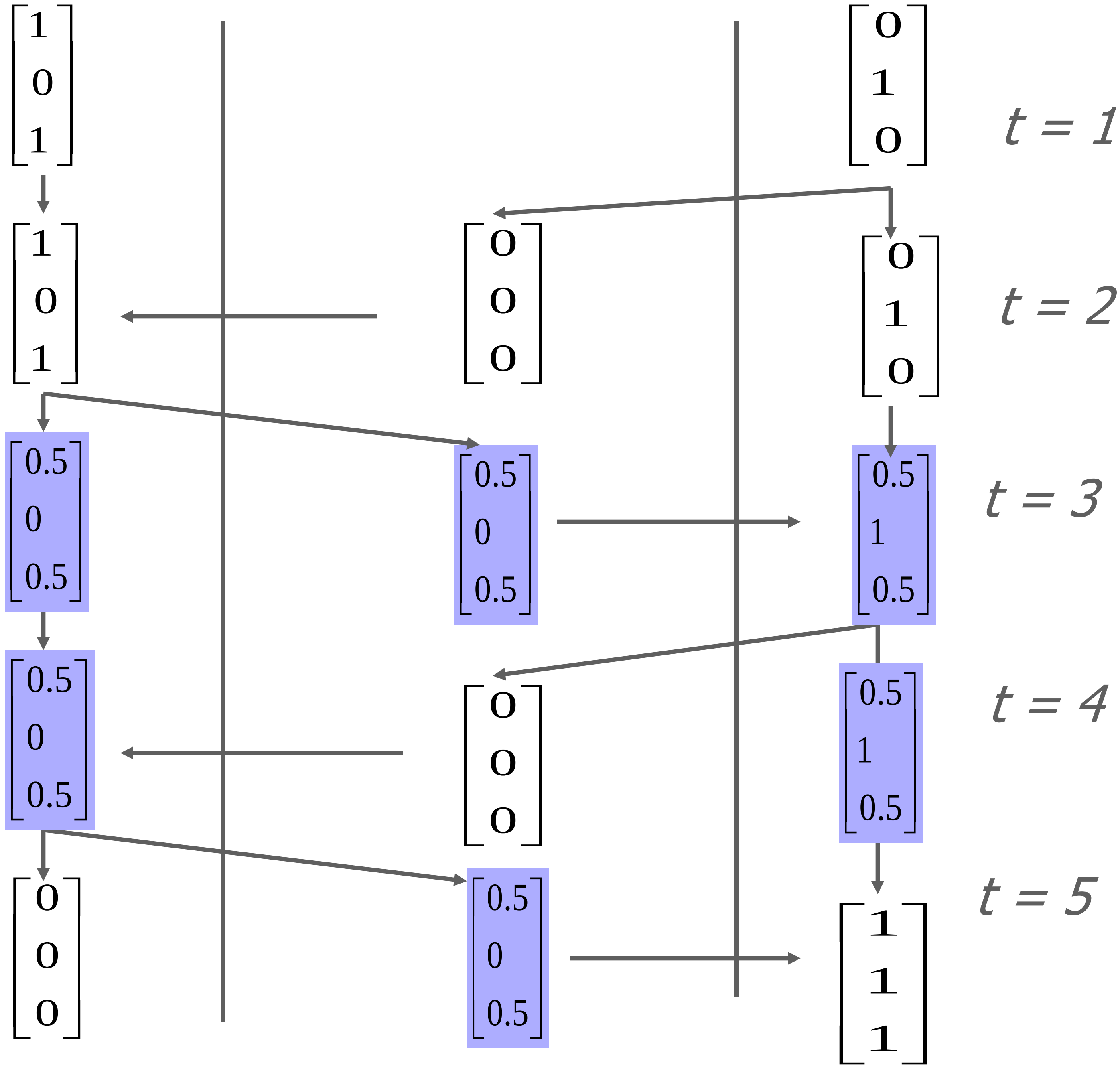
Integer Optimal Solution: Objective = 9.000000000e+00

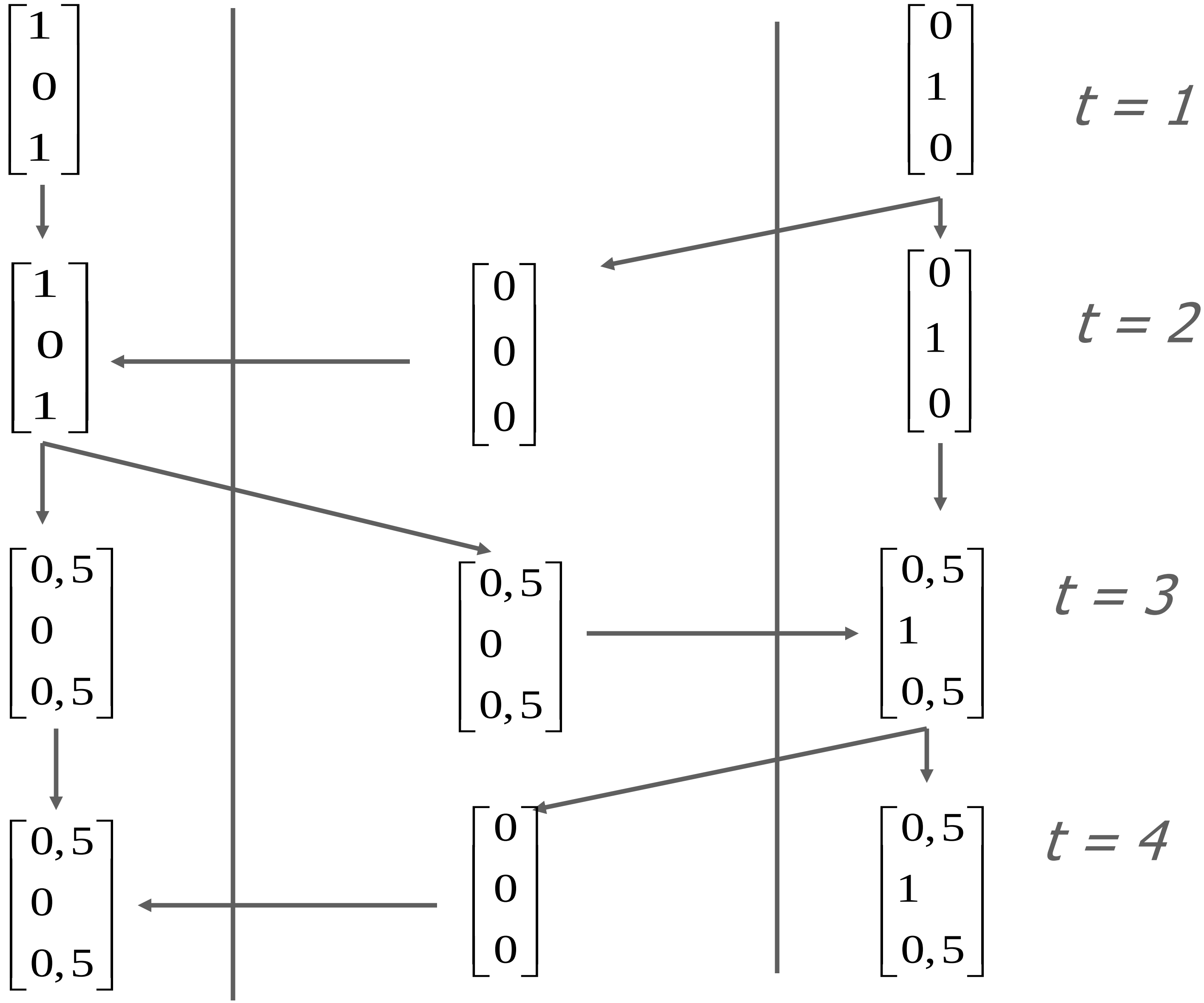
Solution Time = 0.08 sec. Iterations = 39 Nodes = 3

Die analoge Untersuchung des verbleibenden Falls zeigt, dass Alcuins Lösung optimal war.



$$\begin{aligned} \min\ c_1x_1 &+ c_2x_2 \\ x_1 + x_2 &\ge 2 \\ x_1 - x_2 &\le 1 \\ x_2 &\le 2 \\ \boxed{x_2} & \boxed{\ge 1} \\ \cancel{x_1, x_2 \in Z} \end{aligned}$$


t = 1
t = 2
t = 3
t = 4
t = 5



Die gebrochene Lösung zeigte zwei Gegenstände auf der rechten Seite zum Zeitpunkt $t = 4$, aber das ist unmöglich.

Separierung von Schnittebenen

Diese *kombinatorische* Bedingung kann man in die Ungleichung

$$z(1,4) + z(2,4) + z(3,4) \leq 1$$

"übersetzen" und diese als Schnittebene verwenden.

```
c1:    z(1,0) = 0
.
.
.
c55:   z(3,6)+x(3,7)+y(3,7)=1
c56:   -z(1,7)-z(2,7)<=-1
.
.
.
c81:  -y(1,7)-y(2,7)+z(1,7)+z(2,7)<=1
c82:  -y(2,7)-y(3,7)+z(2,7)+z(3,7)<=1
c83:   y(2,3)+y(1,4)+y(3,4)
      -y(1,5)-y(3,5)+y(1,6)+y(3,6)
      -y(1,7)-y(3,7)+z(1,7)+z(3,7)<=1
c84:   z(1,4)+z(2,4)+z(3,4)<=1
.
.
.
c100:  z(1,7)<=1
End
```

... die Ungleichung ist die Facette (c84) der konvexen Hülle der ganzzahligen Lösungen von Alcuins Problem.

Lösung durch Schnittebenen

CPLEX> add constraint
Enter new constraints and bounds
[`end´ terminates]:

$$z(1,4)+z(2,4)+z(3,4)<=1$$

end
Problem addition successful.
CPLEX> tranopt

Iteration Log . . .
Iteration: 1 Dual Objective = 9.000000

Dual – Optimal: Objective = 9.000000000e+00
Solution Time = 0.02 sec. Iterations = 3 (0)

CPLEX> display solution -

Variable	Name		Solution Value
x(1,0)	x(2,0)	x(3,0)	1.000000
x(1,1)		x(3,1)	1.000000
	y(2,1)		1.000000
	z(2,1)		1.000000
x(1,2)		x(3,2)	1.000000
	z(2,2)		1.000000
		x(3,3)	1.000000
y(1,3)			1.000000
z(1,3)	z(2,3)		1.000000
x(1,4)		x(3,4)	1.000000
y(1,4)			1.000000
	z(2,4)		1.000000

CPLEX> display solution -

Variable	Name		Solution Value
x(1,5)		x(3,5)	0.500000
y(1,5)		y(3,5)	0.500000
z(1,5)		z(3,5)	0.500000
	z(2,5)		1.000000
x(1,6)		x(3,6)	0.500000
z(1,6)		z(3,6)	0.500000
	z(2,6)		1.000000
y(1,7)		y(3,7)	0.500000
z(1,7)	z(2,7)	z(3,7)	1.000000

All other variables in the range of 1-69 are zero.

Eine Schnittebene allein reicht noch nicht aus.

CPLEX> add constraints

```
Enter new constraints and bounds
['end' terminates] :
- y(1,7) - y(2,7) + z(1,7) + z(2,7)   <=  1
- y(2,7) - y(3,7) + z(2,7) + z(3,7)   <=  1
end
Problem addition successful.
CPLEX> tranopt
Reinitializing dual norms .....
Computed 2 new norms.

Iteration Log .....
Iteration:   1   Dual Objective = 9.000000

Dual  -  Optimal:  Objective  = 9.000000000e+00
Solution Time  =  0.02 sec.  Iterations  =  3  (0)
```

Zwei weitere Schnittebenen (c81 and c82) ...

CPLEX> display solution -

Variable Name			Solution Value
x(1,0)	x(2,0)	x(3,0)	1.000000
x(1,1)		x(3,1)	1.000000
	y(2,1)		1.000000
	z(2,1)		1.000000
x(1,2)		x(3,2)	1.000000
	z(2,2)		1.000000
		x(3,3)	1.000000
y(1,3)			1.000000
z(1,3)	z(2,3)		1.000000
	x(2,4)	x(3,4)	1.000000
	y(2,4)		1.000000
z(1,4)			1.000000

CPLEX> display solution -

Variable	Name		Solution Value
	x(2,5)		1.000000
		y(3,5)	1.000000
z(1,5)		z(3,5)	1.000000
	x(2,6)		1.000000
z(1,6)		z(3,6)	1.000000
	y(2,7)		1.000000
z(1,7)	z(2,7)	z(3,7)	1.000000

All other variables in the range of 1-69 are zero.

... ûnd wieder haben wir die Optimalität von Alcuins Lösung bewiesen.

Weitere Informationen?

www.zib.de/borndoerfer/publications

- ZR 95-27 Alcuin's Transportation Problems and Integer Programming
- ZR 98-09 Optimization of Transportation Systems
- ZR 99-32 Der Schnellste Weg zum Ziel

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Gedicht von Karl Gerok (1867)

Als Kaiser Karl zur Schule kam und wollte visitieren,
da prüft' er scharf das kleine Volk, ihr Schreiben, Buchstabieren,
Ihr Vaterunser, Einmaleins und was man lernte mehr:
Zum Schlusse rief die Majestät die Schüler um sich her.
Gleichwie der Hirte schied er da die Böcke von den Schafen;
Zu seiner Rechten hieß er stehn die Fleiß'gen und die Braven.
Da stand im groben Linnenkleid manch schlichtes Bürgerkind,
Manch Söhnlein eines armen Knechts von Kaisers Hofgesind.
Dann rief er mit gestrengem Blick die Faulen her, die Böcke,
Und wies sie mit erhobner Hand zur Linken in die Ecke.
Da stand in pelzverbrämtem Rock manch feiner Herrensohn;
Manch ungezognes Mutterkind, manch junger Reichsbaron.