M. Eigenwerte und Eigenvektoren

M.1. Bsp (Einfache Darstellung lin. Abb.): Seien V, W K-Vektorräume mit Basen $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=1}^{n}$, $\mathcal{C} = \{w_j\}_{j=1}^{m}$, $f: V \to W$ lin. mit Darstellungsmatrix $A = {}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}}(f)$. Wie kann man A möglichst einfach machen?

a) $f: V \to W$, $x \mapsto 0 \Rightarrow A = 0 \to f(x) = Ax = 0 \cdot x$

b) $f: V \to V$, $x \mapsto x \Rightarrow A = I \Rightarrow f(x) = Ix = 1 \cdot x$

c) $\underbrace{f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3}_{\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{e_i\}_{i=1}^{3}}$, $x \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{= A} x$ Diagonalmatrix



$\Rightarrow f(e_1) = 1 \cdot e_1$, $f(e_2) = 2 \cdot e_2$, $f(e_3) = 3 \cdot e_3$

e_i wird auf $\lambda_i \cdot e_i$ abgebildet, $\lambda_i = i$, $i = 1,2,3$

$\Rightarrow e_i$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_i = i$, $i = 1,2,3$

d) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} x = \operatorname{diag}_{i=1}^{n}(\lambda_i)\, x$

$\Rightarrow f(e_i) = \lambda_i e_i$ e_i ist Eigenvektor zum Eigenwert λ_i, $i = 1, \dots, n$

e) $f: V \to W$

$f(x) = 0 = 0 \cdot x \quad \forall x \in \ker(f)$

$\Rightarrow x$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 0 $\forall x \in \ker(f) \setminus \{0\}$

f) $f: V \to W$

$V = \ker(f) \oplus U$, $\mathcal{B} = \underbrace{\{v_1, \dots, v_k\}}_{\text{Basis von } U} \cup \underbrace{\{v_{k+1}, \dots, v_n\}}_{\text{Basis von } \ker(f)}$

$W = f(U) \oplus X$ $\mathcal{C} = \underbrace{\{f(v_1), \dots, f(v_k)\}}_{= \{w_1, \dots, w_k\}} \cup \underbrace{\{w_{k+1}, \dots, w_m\}}_{\text{Basis von } X}$

$\underbrace{w_1 \quad w_k}_{\text{Basis von } f(U)}$

$$A = \begin{array}{c} \\ f(v_1) = w_1 \\ \vdots \\ f(v_k) = w_k \\ w_{k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & \cdots & v_i & v_k & v_{k+1} & \cdots & v_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & & 0 & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & 0 \end{array}\right) \end{array} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

g) Vgl. Bsp 7.3 d)

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$ Bsp 7.3 d) $\Leftrightarrow \quad x \in \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=f_3}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=\ker f} \oplus \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=:U}$

$\Rightarrow e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e_1 - e_2 = e_1 - e_2 + f_3$

$\Rightarrow f(e_1) = e_1 - e_3 = e_1 - e_1 + e_2 - f_3 = e_2 - f_3$

$f(e_2) = e_2 + 2e_3 = e_2 + 2e_1 - 2e_2 + 2f_3 = 2e_1 - e_2 + 2f_3$

$f(f_3) = 0$

$\Rightarrow {}_B A_B = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$

Dh. jede lineare Abb. kann mit passenden Basen immer einfach dargestellt werden. Aber das nützt nicht viel, denn die Komplexität liegt dann in den beiden Basen. Präzisierung des Tages:

$\underbrace{f: V \to V}_{\text{Endomorphismus}}$, $A = {}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}(f)$.
gleiche Basis in Urbild und Bild.

a) $f: V \to V$ Endomorphismus

$V = \ker(f) \oplus U$, $\mathcal{B} = \underbrace{\{v_1, \dots, v_k\}}_{\text{Basis von } U} \cup \underbrace{\{v_{k+1}, \dots, v_n\}}_{\text{Basis von } \ker(f)}$

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ \vdots \\ v_k \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & \dots & v_k \end{array} \quad \begin{array}{cc} v_{k+1} & \dots \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} * & \dots & * & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \\ * & \dots & * & & \end{array}\right) \end{array} = \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$f(v_i) = 0 \cdot v_i$, $i = k+1, \dots, n$

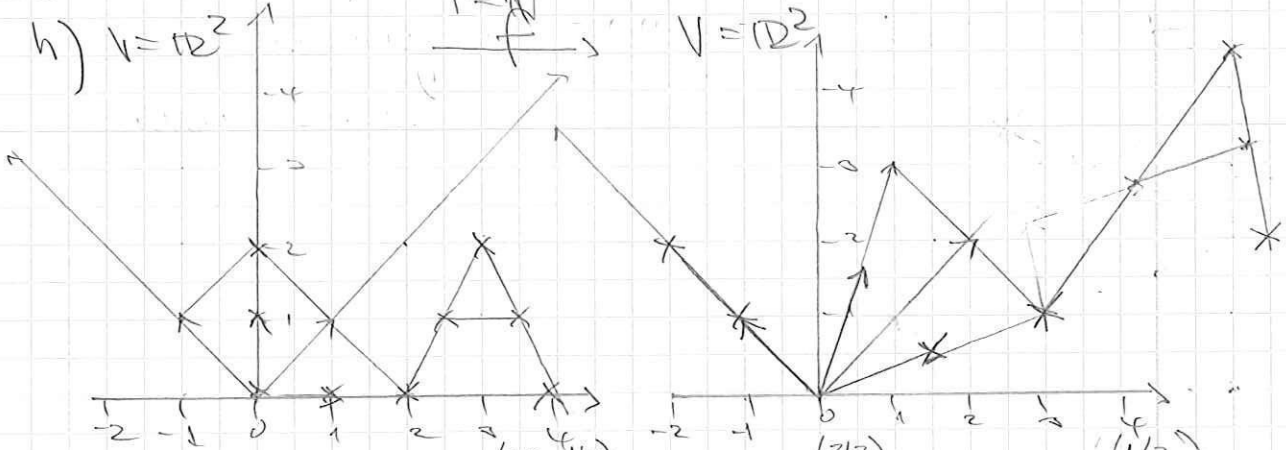
b) geht es noch besser? Traumziel „Diagonalisierung":

$f(v_i) \overset{!}{=} \lambda_i v_i$, $i = 1, \dots, n$

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{B} \overset{!}{=} \{v_i\}_{i=1}^{n}$ Basis aus Eigenvektoren v_i zu Eigenwerten λ_i, $i = 1, \dots, n$

$\Leftarrow$ ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}(f) \overset{!}{=} \operatorname{diag}(\lambda_i)_{i=1}^{n}$

c) $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$



$\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$, $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$, $f(e_1) = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $f(e_2) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}' = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gibt es einen Eigenvektor?

$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3/2-\lambda & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 3/2-\lambda & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 1/2 & 3/2-\lambda & 0 \end{array}\right)$$

1. Fall: $\lambda = 2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Fall: $\lambda \neq 2$ a) $\lambda \neq 1 \Rightarrow x = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1-\lambda & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$ b) $\lambda = 1 \Rightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Einfacher Rechenmöglichkeit mit Determinante:

$$\exists x \neq 0, \lambda : Ax = \lambda x \Leftrightarrow \exists x \neq 0, \lambda : (A - \lambda \mathbb{1}) x = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda : \operatorname{rang}(A - \lambda \mathbb{1}) < n \Leftrightarrow \exists \lambda : \det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3/2-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 3/2-\lambda \end{vmatrix} = \underbrace{(3/2-\lambda)^2 - \frac{1}{4}} = (2-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$\Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = 1$ charakteristisches Polynom

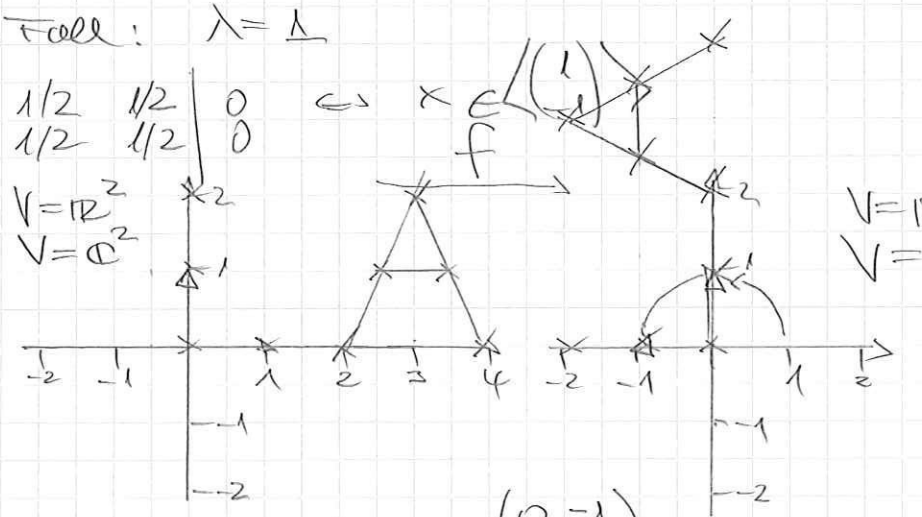
1. Fall: $\lambda = 2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

2. Fall: $\lambda = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

i) $V = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{C}^2$



$V = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{C}^2$

Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn

$\Rightarrow$ keine Eigenvektoren

$\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = -e_1$

gibt es einen Eigenvektor?

$$|A - \lambda \mathbb{1}| = \left| \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$= \lambda^2 + 1 = 0$ hat keine Lösung $\in \mathbb{R}$.

Aber in $\mathbb{C}$!

Rückschau: konjugiert komplex

$\lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i) = 0$

1. Fall: $\lambda = i$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

2. Fall: $\lambda = -i$

$$\left(\begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

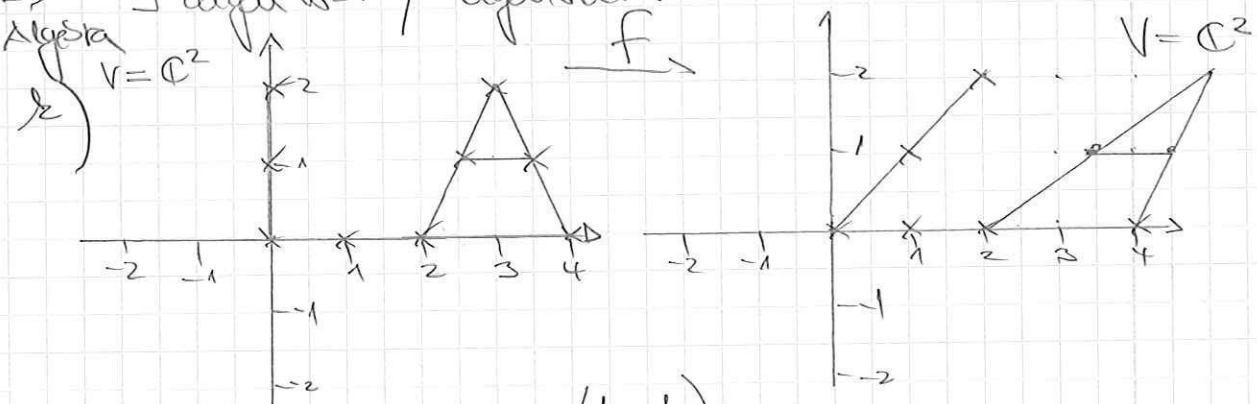
19.10.16

(30)

j) $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $A(f) \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$\det(A - \lambda I) \in \mathbb{C}[x]$ Polynom in λ über $\mathbb{C}$

Fundamentalsatz der Algebra $\Rightarrow$ $\exists$ Eigenwert / Eigenvektor



$\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_1 + e_2$

Wie viele Eigenwerte und Eigenvektoren gibt es?

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

doppelte Nullstelle

$$A - 1 \cdot I \,|\, 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Eigenraum zum Eigenwert 1 ist eindimensional

d.h. es gibt auch in $\mathbb{C}^2$ nicht 2 lin. unabh. Eigenvektoren.

11.2 Lemma (Eigenwerte und -vektoren)

a) Was ist ein Eigenwert / Eigenvektor?

b) Berechnung von Eigenwerten mit Hilfe des charakteristischen Polynoms

(72)

c) Wann (und wie) kann man eine Matrix diagonalisieren?

M.3 Def (Eigenwert, Eigenvektor und Eig. Abb.):
Sei $f: V \to V$ ein Endom. eines K-Vektorraumes V:

a) $\lambda \in K$ Eigenwert von $f :\Leftrightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} : f(v) = \lambda v$

b) $v \in V \setminus \{0\}$ Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda \in K$

Schreibweise: eigenw. EW; eigenv. EV $:\Leftrightarrow f(v) = \lambda v$

$\Delta(f) = \{\lambda \in K : \lambda \text{ EW von } f\}$, Menge der Eigenwerte von f.

Beachte: Ein EW kann 0 sein, ein EV nicht!

(Sonst wäre jedes $\lambda \in K$ ein Eigenwert).

M.4 Bsp (Eigenwert, Eigenvektor): Sei $f: V \to V$ Endom.

a) id_V hat den EW 1 und keinen weiteren, d.h. $\Delta(id_V) = \{1\}$

Begr.: $f(v) = v = 1 \cdot v \quad \forall v \in V$

b) 0 hat den EW 0 und keinen weiteren, d.h. $\Delta(0) = \{0\}$

Begr.: $f(v) = 0 = 0 \cdot v \quad \forall v \in V$

c) $\lambda \in \Delta(f) \Leftrightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} : f(v) = v$.

d) $0 \in \Delta(f) \Leftrightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} : f(v) = 0$

e) v EV von f zum EW $0 \Leftrightarrow v \neq 0 \wedge f(v) = 0$

f) $\{v : v \text{ EV von } f \text{ zum EW } 0\} = \ker f \setminus \{0\}$

M.5 Def (Diagonalisierbarkeit): Sei $f: V \to V$ ein Endomorphismus. f heißt diagonalisierbar, wenn es eine Basis $B = \{v_i\}_{i=1}^n$ und Skalare $\lambda_i \in K$, $i = 1, \dots, n$, gibt, so daß

$$\Rightarrow \Delta_B(f) = \operatorname{diag}_{i=1}^n \lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

M.6 Satz (Kriterium zur Diagbarkeit):
Sei $f: V \to V$ ein Endomorphismus. Dann gilt:

f diagbar $\Leftrightarrow \exists$ Basis B von V aus EV von f

Bew.:

"$\Leftarrow$": Sei $B = \{v_i\}_{i=1}^n$ Basis von V aus EV von f zu EW λ_i, $i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow f(v_i) = \lambda_i v_i$, $i = 1, \dots, n \Rightarrow \Delta_B(f) = \operatorname{diag}_{i=1}^n \lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

M.1: Def.: Eigenwert einer Matrix

a) $\lambda \in K$ Eigenwert von A $:\Leftrightarrow \exists f: V \to V$, Basis $\mathcal{B}$ von V:
$A = {}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}(f)$ $\wedge$ λ Eigenwert von f.

M.3 Prop.: Die Eigenwerte einer Matrix sind unabh. von der Wahl einer Basis.

Bew.: Seien $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=1}^{n}$, $\mathcal{B}' = \{v_i'\}_{i=1}^{n}$ zwei Basen von V und f, f' lin. Abb. mit ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}(f) = A$, ${}_{\mathcal{B}'}A_{\mathcal{B}'}(f') = A$.

$\Rightarrow$: Sei ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{diag}_{i=1}^{n} \lambda_i$, $\mathcal{B} = (v_i)_{i=1}^n$

$\Rightarrow f(v_i) = f(0v_1 + \dots + 0v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \dots + 0v_n)$

$$= v_i \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_i & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_i v_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$v_1 \dots v_i \dots v_n$

$\Rightarrow$ v_i EV von f zum EW λ_i, $i = 1, \dots, n$. $\square$

M.7 Lemma (über verschiedene Eigenwerte): Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind lin. unabh.

Bew.: Seien $v_1, \dots, v_m$ EVen zu paarweise verschiedenen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ von $f: V \to V$. (Induktion über m, Def. 11.3b)

Ind.-Anf.: $m = 1$: $v_1 \neq 0 \Rightarrow (\alpha_1 v_1 = 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} \alpha_1 = 0)$ ✓

Ind.-Ann.: $m \geq 1$: ✓

Ind.-Schluß $m \to m+1$: Sei $\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i v_i = 0$, Dann gilt:

$$0 = f(0) = f\left(\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i \lambda_i v_i \quad (1)$$

$$0 = \lambda_{m+1} 0 = \lambda_{m+1} \left(\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i \lambda_{m+1} v_i \quad (2)$$

$$0 = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{m+1}) v_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \underbrace{(\lambda_i - \lambda_{m+1})}_{=0} v_i \quad (1) - (2)$$

Ind.-Ann.

$\Rightarrow \alpha_i \underbrace{(\lambda_i - \lambda_{m+1})}_{\neq 0} = 0, \quad i = 1, \dots, m$

$v_1, \dots, v_m$ lin. unabh. (λ_i paarweise verschied.)

$\Rightarrow \alpha_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \Rightarrow \alpha_{m+1} = 0$

$\Rightarrow \alpha_i = 0, \quad i = 1, \dots, m+1$. $\square$

M.8 Prop (Hinreichende Bed. für Diag'barkeit):
Sei $f: V \to V$ endom. des n-dim. Vektorraums V. Dann gilt:

$|\Lambda(f)| = n \Rightarrow f$ ist diag'bar.

Bew.: $|\Lambda(f)| = n \Rightarrow \Lambda(f) = \{\lambda_i\}_{i=1}^n$ paarweise verschieden

$\Rightarrow \exists$ EV v_i zum EW λ_i, $i = 1, \dots, n$

Lem. M.7 $\Rightarrow v_1, \dots, v_n$ lin. unabh. $\Rightarrow \{v_i\}_{i=1}^n$ Basis von V.

Dann ist ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{diag}_{i=1}^{n} \lambda_i$. $\square$

M.9 Def (Eigenraum): Sei $f: V \to V$ endom., $\dim V = n$, $\lambda \in K$ (nicht notw. $\lambda \in \Lambda(f)$). Dann heißt, falls $\lambda \in \Lambda(f)$:

$$Eig(f,\lambda) := \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$$

Eigenraum von f zum Eigenwert λ.

M.10 Lemma (Über Eigenräume): Sei $f: V \to V$, $\lambda \in K$.

a) $Eig(f,\lambda) \subseteq V$, d.h. $Eig(f,\lambda)$ ist ein Untervektorraum von V, insbes. $Eig(f,\lambda) \geq 0$.

b) $Eig(f,\lambda) \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda \in \Lambda(f)$

c) $Eig(f,\lambda) = \{v \in V : v \text{ EV von } f \text{ zum EW } \lambda\} \cup \{0\}$

d) $Eig(f,\lambda) = \ker(f - \lambda id_V)$, insbes. $\dim Eig(f,\lambda) = \dim V - \operatorname{rang}(f - \lambda id_V)$.

e) Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ paarweise verschieden und $B_1, \dots, B_k$ Basen von $Eig(f,\lambda_1), \dots, Eig(f,\lambda_k)$. Dann ist $B = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$ ein lin. unabh. Menge.

24.10.16 (64)

Bew.:

a) i) $f(0) = 0 = \lambda \cdot 0 \Rightarrow 0 \in Eig(f,\lambda)$

ii) $v, w \in Eig(f,\lambda) \Rightarrow f(v+w) = f(v) + f(w) = \lambda v + \lambda w = \lambda(v+w)$

iii) $\alpha \in K, v \in Eig(f,\lambda) \Rightarrow f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v)$

b) $Eig(f,\lambda) \neq \{0\} \Rightarrow \exists v \neq 0 : f(v) = \lambda v \Leftrightarrow \lambda \in \Lambda(f)$

c) $v \in Eig(f,\lambda) \Leftrightarrow f(v) = \lambda v \Leftrightarrow v = 0 \vee v$ EV von f zum EW λ

d) $v \in Eig(f,\lambda) \Leftrightarrow f(v) = \lambda v \Leftrightarrow f(v) - \lambda v = 0$

$\Leftrightarrow f(v) - \lambda id_V(v) = 0 \Leftrightarrow (f - \lambda id_V)(v) = 0$

$\Leftrightarrow v \in \ker(f - \lambda id_V)$.

e) Sei $B_j = \{v_{j1}, \dots, v_{jn_j}\}$, $j = 1, \dots, k$ und

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{ji} v_{ji} = 0$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{ji} v_{ji}}_{\in Eig(f,\lambda_j)} = :v_j \in Eig(f,\lambda_j)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k} v_j = 0 \overset{\text{wegen a)}}{\Rightarrow} v_j = 0 \overset{\text{Def. v. } v_j}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{ji} v_{ji} = 0, \quad j = 1, \dots, k$$

$\Rightarrow$ alle Koeffizienten $= 0$, da B_j Basis des Eigenraums

(75)

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_j^i v_j^i = 0 \quad , j=1,\dots,k$

v_j^i lin. unabh. $\Rightarrow \alpha_j^i = 0 \quad , j=1,\dots,k, \ i=1,\dots,n_j$. $\square$

$\Rightarrow_j$ Basis

M.11 Satz (2. Kriterium für Diag'barkeit): Sei $f: V \to V$.

$$f \text{ diag'bar} \Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \Delta(f)} \dim \operatorname{Eig}(f,\lambda) \geq n \quad (= n)$$

Bew.:

"$\Rightarrow$": f diag'bar

$\Rightarrow$ (Kriterium) $\exists$ Basis $B = \{v_j\}_{j=1}^{n}$ aus EV zu EW λ_i, $i=1,\dots,n$

f. Diag'bar ist

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ genau die verschiedenen EWe. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \Delta(f)} \dim \operatorname{Eig}(f,\lambda) &\geq \sum_{i=1}^{k} \dim \operatorname{Eig}(f,\lambda_i) \\ &\geq \sum_{i=1}^{k} \left| \{ v_j : x_j = x_i \} \right| \\ &= \left| \{v_j\}_{j=1}^{n} \right| \\ &= n \quad (= \dim \operatorname{Eig}(f,\lambda)) \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$": Wähle Basis $B_\lambda = \{v_j^\lambda\}_{j=1}^{n_\lambda}$ von $\operatorname{Eig}(f,\lambda)$, $\lambda \in \Delta(f)$.

Dann Lemma M.9 e) ist $B := \bigcup_{\lambda \in \Delta(f)} B_\lambda$ lin. unabh. und

$$n \geq |B| = \sum_{\lambda \in \Delta(f)} n_\lambda = \sum_{\lambda \in \Delta(f)} \dim \operatorname{Eig}(f,\lambda) \geq n$$

$\Rightarrow$ B Basis von V aus EVen von f

Satz M.5

$\Rightarrow$ f diag'bar. $\square$

1. Kriterium f. Diag'barkeit

M.12 Alg. (Diagonalisierung):

Input: $f: V \to V$

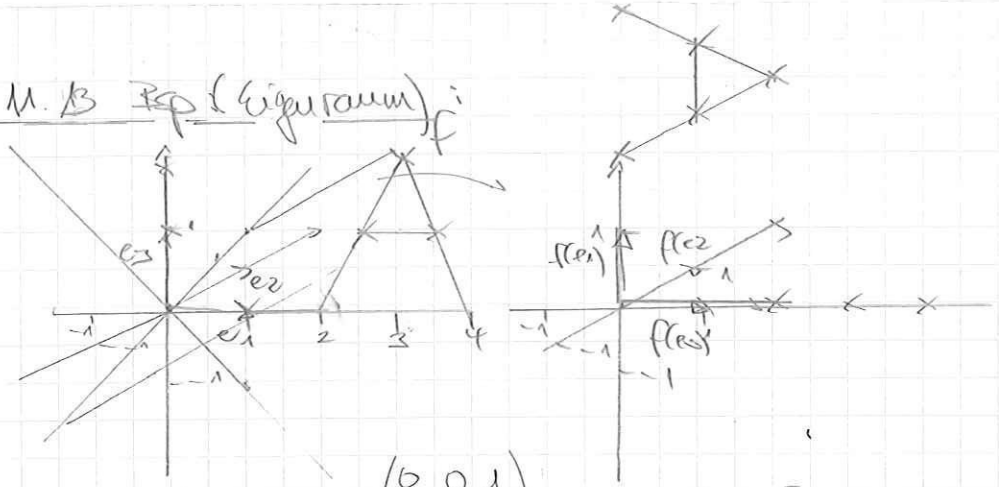
Output: $B, \Delta_B(f) = \operatorname{diag}(\lambda_i)_{i=1}^{n}$ oder "f nicht diag'bar"

1. bestimme $\Delta(f)$
2. forall $\lambda \in \Delta(f)$

   bestimme Basis $B_\lambda = \{v_j^\lambda\}_{j=1}^{\dim \operatorname{Eig}(f,\lambda)}$ von $\operatorname{Eig}(f,\lambda)$
3. if $\sum_{\lambda \in \Delta(f)} \dim \operatorname{Eig}(f,\lambda) < n$ output "f nicht diag'bar"

   else output $\operatorname{diag}_{\lambda \in \Delta(f)} \left(\dim \operatorname{Eig}(f,\lambda) \right)$.

M.B Bsp (Eigenraum) f:



$B = \{e_i\}_{i=1}^3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \{e_i\}_{i=1}^3$

1. $\Delta(f)$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1-\lambda^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(1-\lambda^2)(1-\lambda)$$

$$= -(1-\lambda)(1+\lambda) = 0 \iff \lambda = 1 \vee \lambda = -1.$$

2. $Eig(f, 1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff x \in \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\Rightarrow \dim Eig(f,1) = 2} = Eig(f, 1)$$

$Eig(f, -1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff x \in \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\Rightarrow \dim Eig(f,-1) = 1} = Eig(f, -1)$$

3. $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, $_B A_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

M 14 Def. (Eigenwert einer Matrix): Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann ist $\lambda \in K$ ein **EW von A**, falls es eine Basis $B = \{v_i\}_{i=1}^n$ von K^n gibt, so daß λ ein Eigenwert des durch A bzgl. B definierten lin. Abb $f: K^n \to K^n$ ist, d.h. $A = {}_B A_B(f)$. $\lambda \in \Delta(f)$. A diag'bar: wenn f diag'bar ist.

Sprechweise: $\Delta(A) = \{\lambda \in K : \lambda \text{ EW von } A\}$

M 15 Prop: Die Eigenwerte einer Matrix sind wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Basis (Kor. M.10b) (Kor. M.10d)

Bew.: $\lambda \in \Delta(f) \iff \{0\} \neq Eig(f, \lambda) = \ker(f - \lambda id_V)$

$\Leftrightarrow 1 \le \dim \ker(f - \lambda id_{\mathbb{R}^n}) = n - \operatorname{rang}(f - \lambda id_{\mathbb{R}^n})$

$\Leftrightarrow n > \operatorname{rang}(f - \lambda id_{\mathbb{R}^n}) = \operatorname{rang}(A - \lambda I_n)$

unabhängig von der Wahl von $\mathcal{B}$. □

M.16 Kor. (Ew einer lin. Abb. und ihrer Darst.-matrix):

Die Ew einer lin. Abb. und ihrer Darst.-matrix sind gleich. 26.10.16 (62)

M.17 Prop. (Endomorphismen des $\mathbb{R}^2$): Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lin. Dann kann die Darst.-matrix von f mit einer geeigneten Basis $\mathcal{B}$ auf genau eine der folgenden drei Formen gebracht werden:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \in \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \right\}, \lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$$

Bew.: Sei $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann ist

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + \underbrace{ad - bc}_{=|A|} =: D \quad \text{Diskriminante}$$

$$= \left(\lambda - \frac{a+d}{2}\right)^2 - \frac{(a+d)^2 - 4|A|}{4}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{a+d}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2}$$

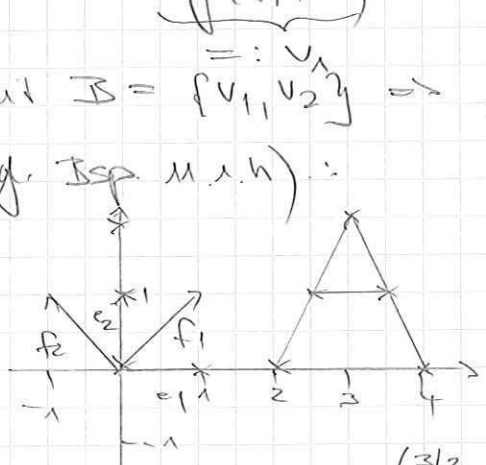
1. Fall: $D > 0$. Dann ist

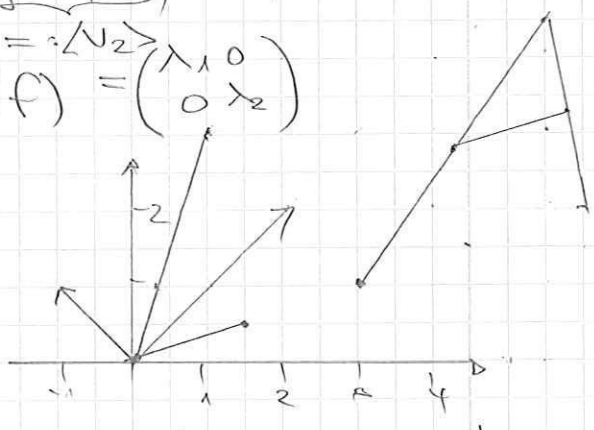
$$|A - \lambda I_2| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2}$$

$\Rightarrow \dim \underbrace{\operatorname{Eig}(f, \lambda_1)}_{=: V_1} = \dim \underbrace{\operatorname{Eig}(f, \lambda_2)}_{=: V_2} = 1$

mit $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\} \Rightarrow {}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

vgl. Bsp. M.1.h):





$\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ $\quad |A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 3/2-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 3/2-\lambda \end{vmatrix}$

$\mathcal{B}' = \{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{f_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{f_2}\}$, $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad = \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{4} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$

$D = \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 = 4|A| = 9 - 4 \cdot 2 = 1 > 0$

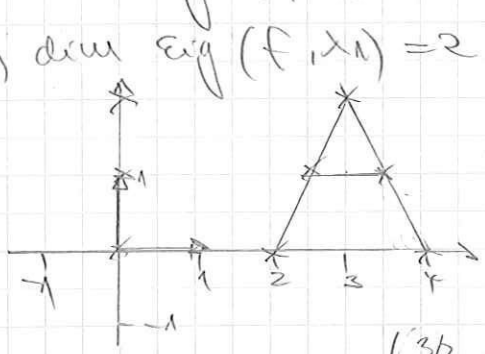
$\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} = 1, 2$

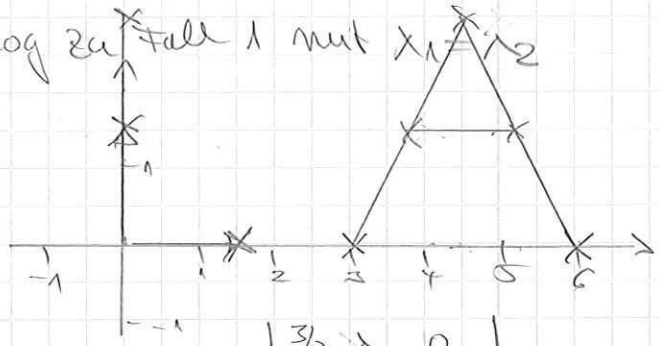
2. Fall: $D = 0$. Dann ist

$$|A - \lambda I_2| = (\lambda - \lambda_1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \lambda_1 = \frac{ad}{2}$$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Eig}(f, \lambda_1) \in \{1, 2\}$

a) $\dim \operatorname{Eig}(f, \lambda_1) = 2$ analog zu Fall 1 mit $\lambda_1 = \lambda_2$





$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}, \quad A = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} \qquad |A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 3/2 - \lambda & 0 \\ 0 & 3/2 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}, \quad A' = A \qquad = \left(\lambda - \tfrac{3}{2}\right)^2$$

$$D = \left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{2}\right)^2 - 4\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 = 9 - 4 \cdot \tfrac{9}{4} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \lambda_1 = \tfrac{3}{2}$$

b) $\dim \operatorname{Eig}(f, \lambda_1) = 1$, wähle v_2 so, dass $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$ mit $v_1 := \operatorname{Eig}(f, \lambda_1)$

$$\Rightarrow {}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & c' \\ 0 & d' \end{pmatrix} = A'$$

Beh.: $d' = \lambda_1$

Beg.:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2_{\{e_1,e_2\}} & \xrightarrow{\ f\ \ (A)\ } & \mathbb{R}^2_{\{e_1,e_2\}} \\ {\scriptstyle id_{\mathbb{R}^2}}\uparrow S & & S^{-1}\downarrow {\scriptstyle id_{\mathbb{R}^2}} \\ \mathbb{R}^2_{\mathcal{B}'} & \xrightarrow{\ f\ \ (A')\ } & \mathbb{R}^2_{\mathcal{B}'} \end{array}$$

$$A' = S^{-1} A S$$

$$\Rightarrow |A' - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & c' \\ 0 & d' - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda)(d' - \lambda)$$

$$= |S^{-1} A S - \lambda S^{-1} I_2 S| = |S^{-1}||A - \lambda I_2||S| = |A - \lambda I_2| = (\lambda_1 - \lambda)^2$$

Beh.: $c' \neq 0$

Beg.: $c' = 0 \Rightarrow \dim \operatorname{Eig}(f, \lambda_1) = 2$ ↯.

Beh.: Man kann v_2 so wählen, dass $c' = 1$ ist.

Beg.: $f(v_2) = c' v_1 + \lambda_1 v_2 \Rightarrow f\left(\frac{v_2}{c'}\right) = v_1 + \lambda_1 \frac{v_2}{c'}$

Beh.: $c' = 1 \Rightarrow f(v_2) = v_1 + \lambda_1 v_2 \Leftrightarrow (f - \lambda \operatorname{id}_{\mathbb{R}^2})(v_2) = v_1$

$\Leftrightarrow A - \lambda I_2 \mid v_1 \overset{\text{Beh. 1}}{\Longrightarrow} \ker (A - \lambda I_2)^2 = \langle v_1, v_2 \rangle$.

$\text{Im}\, v_1 = \lambda\, \text{Re}\, v_1 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}i\,(v_1 - \overline{v_1}) = \lambda\left(\frac{1}{2}v_1 + \overline{v_1}\right)$$

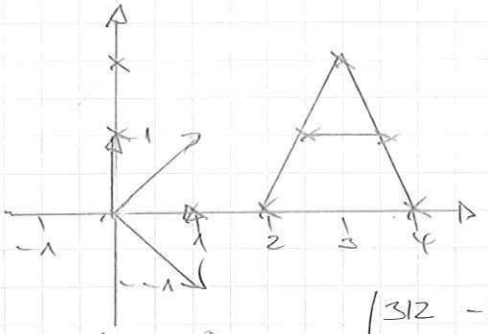
$$\Rightarrow -\frac{1}{2}(\lambda+i)\,v_1 = \frac{1}{2}(\lambda - i)\,\overline{v_1}$$

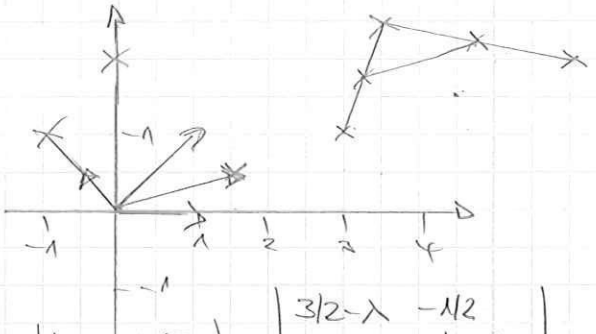
$$\Rightarrow -(\lambda+i)\,v_1 = (\lambda+i)\,\overline{v_1} = \overline{(\lambda+i)\,v_1}$$

$$\Rightarrow \overline{v_1} = -\frac{\lambda+i}{\lambda-i}\,v_1 = -\frac{(\lambda+i)^2}{\lambda^2+1}\,v_1$$

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1$$

$$f(\overline{v_1}) = \begin{cases} f\left(-\frac{(\lambda+i)^2}{\lambda^2+1}v_1\right) = -\frac{(\lambda+i)^2}{\lambda^2+1}\lambda_1 v_1 \\ \overline{\lambda_1}\,\overline{v_1} = \overline{\lambda_1}\left(-\frac{(\lambda+i)^2}{\lambda^2+1}\right)v_1 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 \in \mathbb{R}\ \lightning$$





$\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$, $A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ $\quad |A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 3/2-\lambda & -1/2 \\ 1/2 & 1/2-\lambda \end{vmatrix}$

$\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad = (\lambda - \frac{3}{2})(\lambda - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}$

$D = 4 - 4 \cdot 1 = 0$ $\quad = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$

$A - 1 \cdot I \,|\, 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle v_1 \rangle$

$A - 1 \cdot I \,|\, v_1 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow x \in \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, z.B. $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$(A - 1 \cdot I)^2 \,|\, 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2$

$f(v_2) = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = v_1 + v_2$

$f(v_1) = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Fall: $D < 0$. Dann ist

$$|A - \lambda I_2| = \underbrace{\left(\lambda - \frac{a+d}{2}\right)^2}_{\geq 0} - \underbrace{\frac{D}{4}}_{> 0} \Rightarrow \Lambda(f) = \emptyset$$

Erweitere $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zu $\tilde{f}: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Dann ist

$f = \tilde{f}|_{\mathbb{R}^2}$ und

$|A - \lambda I_2| = \left(\lambda - \frac{a+d}{2}\right)^2 - \frac{D}{4} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2}$

$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{a+d}{2} + \frac{\sqrt{|D|}}{2} i$, $\lambda_2 = \frac{a+d}{2} - \frac{\sqrt{|D|}}{2} i = \overline{\lambda_1} \neq \lambda_1$

$\Rightarrow \dim \underbrace{\mathrm{Eig}(\tilde{f}, \lambda_1)}_{= \langle v_1 \rangle} = \dim \underbrace{\mathrm{Eig}(\tilde{f}, \overline{\lambda_1})}_{=: \langle v_2 \rangle} = 1$

Beh.: O.B.d.A. $v_2 = \overline{v_1}$.

Beg.: $A \overline{v_1} = \overline{A} \overline{v_1} = \overline{A v_1} = \overline{\lambda_1 v_1} = \overline{\lambda_1} \overline{v_1}$. ($A \in \mathbb{R}^2$)

Beh.: $v_1, \overline{v_1}$ lin. unabh.

Beg.: Lemma 11.7 über verall. EWe.

Mit $\tilde{\mathcal{B}} = \{v_1, \overline{v_1}\}$ ist $M_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\tilde{\mathcal{B}}}(\tilde{f}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_1} \end{pmatrix}$. Wähle

$v_1' := \frac{1}{2} \cdot (v_1 + \overline{v_1}) = \mathrm{Re}\, v_1 \in \mathbb{R}^2$

$v_2' := -\frac{1}{2} i (v_1 - \overline{v_1}) = \mathrm{Im}\, v_1 \in \mathbb{R}^2$

Bez.: v_1', v_2' lin. unabh.

Bez.: $v_1 = v_1' + iv_2' = \frac{1}{2}(v_1 + \overline{v_1}) - \frac{1}{2}i(v_1 - \overline{v_1})\,i$

$\overline{v_1} = v_1' - iv_2' = \frac{1}{2}(v_1 + \overline{v_1}) + \frac{1}{2}i(v_1 - \overline{v_1})\,i$

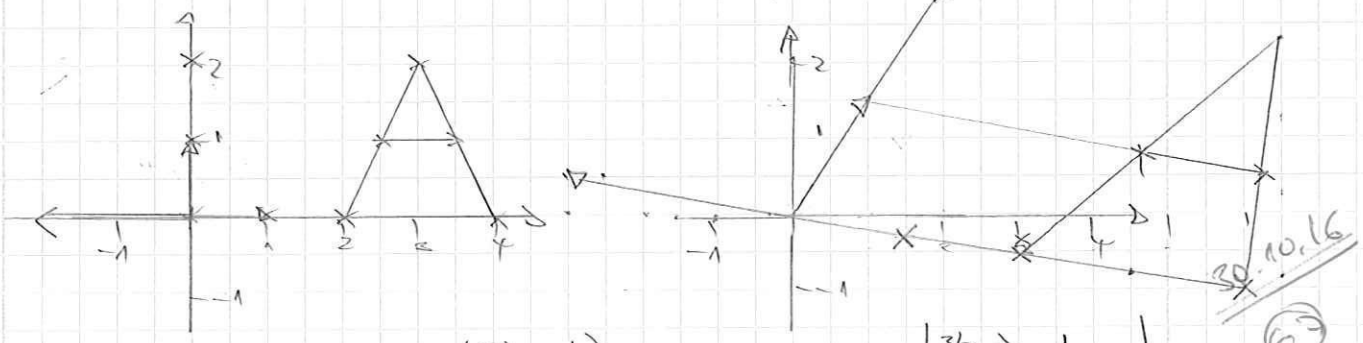
wähle $B' = \{v_1', v_2'\}$.

Bez.: $_{B'}A_{B'}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\lambda_1 & \mathrm{Im}\,\lambda_1 \\ -\mathrm{Im}\,\lambda_1 & \mathrm{Re}\,\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \beta \neq 0$

Beg.:

$$\begin{aligned} f(v_1') &= \tilde{f}\left(\tfrac{1}{2}(v_1 + \overline{v_1})\right) = \tfrac{1}{2}\lambda_1 v_1 + \tfrac{1}{2}\overline{\lambda_1}\,\overline{v_1} \\ &= \tfrac{1}{2}\lambda_1(v_1' + iv_2') + \tfrac{1}{2}\overline{\lambda_1}(v_1' - iv_2') \\ &= \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \overline{\lambda_1})v_1' + \tfrac{1}{2}i(\lambda_1 - \overline{\lambda_1})v_2' \\ &= \underbrace{\mathrm{Re}\,\lambda_1}_{=:\alpha} \cdot v_1' - \underbrace{\mathrm{Im}\,\lambda_1}_{=:\beta} v_2' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(v_2') &= \tilde{f}\left(-\tfrac{1}{2}i(v_1 - \overline{v_1})\right) = -\tfrac{1}{2}i\lambda_1 v_1 + \tfrac{1}{2}i\overline{\lambda_1}\,\overline{v_1} \\ &= -\tfrac{1}{2}i\lambda_1(v_1' + iv_2') + \tfrac{1}{2}i\overline{\lambda_1}(v_1' - iv_2') \\ &= -\tfrac{1}{2}i(\lambda_1 - \overline{\lambda_1})v_1' + \tfrac{1}{2}(\lambda_1 - \overline{\lambda_1})v_2' \\ &= \mathrm{Im}\,\lambda_1 \cdot v_1' + \mathrm{Re}\,\lambda_1 \cdot v_2' \\ &= \alpha \cdot v_1' + \beta \cdot v_2' \end{aligned}$$



(6)

$B = \{e_1, e_2\}$, $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ -1/4 & 3/2 \end{pmatrix}$ $\quad |A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 3/2-\lambda & 1 \\ -1/4 & 3/2-\lambda \end{vmatrix}$

$B' = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\right\}$, $A' = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}$ $= (\lambda - \tfrac{3}{2})^2 + \tfrac{1}{4} = \left[\lambda - \left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{i}{2}\right)\right]\left[\lambda - \left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{i}{2}\right)\right]$

$D = \left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{2}\right)^2 - 4\left(\tfrac{9}{4} + \tfrac{1}{4}\right) = 9 - 10 = -1 < 0$

$$\begin{pmatrix} 3/2-(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}) & 1 \\ -1/4 & \frac{3}{2}-(\frac{3}{2}+\frac{i}{2}) \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -i/2 & 1 \\ -1/4 & -i/2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -i/2 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = v_1$$

$$\begin{pmatrix} 3/2-(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}) & 1 \\ -1/4 & \frac{3}{2}-(\frac{3}{2}-\frac{i}{2}) \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} i/2 & 1 \\ -1/4 & i/2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} i/2 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \overline{v_1}$$

$v_1' = \mathrm{Re}\,v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \alpha = \mathrm{Re}\,\lambda_1 = 3/2$

$v_2' = \mathrm{Im}\,v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \beta = \mathrm{Im}\,\lambda_1 = 1/2$

(8)

$$f(v_1') = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ -1/4 & 3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} = 3/2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(v_2') = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ -1/4 & 3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 1/2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1 = r_1 e^{i\varphi_1} = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$

$= \underbrace{r_1\cos\varphi_1}_{=\mathrm{Re}\lambda_1} + \underbrace{r_1\sin\varphi_1}_{=\mathrm{Im}\lambda_1} i$

ist

$${}_{\mathcal{B}'}A_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\lambda_1 & \mathrm{Im}\lambda_1 \\ -\mathrm{Im}\lambda_1 & \mathrm{Re}\lambda_1 \end{pmatrix} = r_1\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix}$$

Hier:

$r_1 = \sqrt{\frac{3^2}{2} + 1^2} = \sqrt{\frac{13}{4}} = 1{,}802775638\ldots$

$\cos\varphi_1 = 3/2 \Big/ \sqrt{\frac{13}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}\cdot\frac{4}{13}} = \sqrt{\frac{9}{13}} = 0{,}832050294\ldots$

$\Rightarrow \varphi_1 = 33{,}69006753\ldots{}^\circ$

d.h. bzgl. der Basis $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ beschreibt f

eine Drehung um $\varphi_1 = 33{,}69006753\ldots{}^\circ$

und eine Streckung um $r_1 = 1{,}802775638\ldots$

M.18 Satz (über die Eigenwerte einer lin. Abb.): Sei $f: V \to V$ lin. Dann gilt:

$$\lambda \in \Delta(f) \Leftrightarrow \det(f - \lambda\,\mathrm{id}_V) = 0.$$

(Determinante einer Abb.)

Bew.: $\lambda \in \Delta(f) \Leftrightarrow \mathrm{Eig}(f,\lambda) \neq \{0\}$ (über Eigenräume)

$\Leftrightarrow \ker(f - \lambda\,\mathrm{id}_V) \neq \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{rang}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V) < \dim V$

$\Leftrightarrow \det(f - \lambda\,\mathrm{id}_V) = 0.$ □

M.19 Def. (Charakteristische Funktion / Gleichung):

Sei $f: V \to V$ lin., $A \in K^{n\times n}$.

a) $\chi_f: K \to K,\ \lambda \mapsto \det(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)$ charakteristische Funktion von f

b) $\chi_A: K \to K,\ \lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n)$ charakteristische Funktion von A

$\chi_f(\lambda) = 0$ charakteristische Gleichung von f

$\chi_A(\lambda) = 0$ charakteristische Gleichung von A

M.20 Satz (über charakteristische Funktionen): Sei $f: V \to V$, $\mathcal{B}$ Basis von V, $A = {}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}(f)$. Dann gilt

$$\chi_f \equiv \chi_A$$

unabhängig von der Wahl der Basis, d.h. die charakteristischen Funktionen einer lin. Abb. und ihrer Darstellungsmatrizen

sind gleich.

Bew.: $M_B(f-\lambda id_V) \overset{\text{Kor. 9.40}}{=} A-\lambda I$

$\Rightarrow \det(f-\lambda id_V) = \det A-\lambda I \quad \forall$ Basis B - $\square$

M.21 Bsp (Charakteristische Funktion):

a) $\chi_0(\lambda) = |0-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^n$.

b) $\chi_I(\lambda) = |I-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^n$.

} Polynom vom Grad n

c) $\chi_{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\1&2&-3\end{pmatrix}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(-3-\lambda)+2\right] + 1(1-\lambda)\cdot 1$

$= (1-\lambda)\left[-3+3\lambda-\lambda+\lambda^2+2+1\right]$

$= (1-\lambda)\lambda(2+\lambda)$ Polynom vom Grad 3

M.22 Satz (Charakteristisches Polynom): Sei $f: V \to V$ lin, $\dim V = n$, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ eine Darst. Matrix von f. Dann ist die charakteristische Funktion von f bzw A ein Polynom vom Grad n

$$\chi_f(\lambda) = \chi_A(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

und es gilt

a) $a_n = (-1)^n$

b) $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + \dots + a_{nn})$

c) $a_0 = \det A$

Bew.:

$$\chi_f(\lambda) = \chi_A(\lambda) = |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & & a_{1n} \\ & a_{22}-\lambda & \\ & & \ddots \\ a_{n1} & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Kor. 9.55}}{=} \sum_{\text{Leibnizsche Formel}} \operatorname{sign}\sigma \prod_{i=1}^{n} \begin{cases} a_{i\sigma(i)} & \text{, falls } i \neq \sigma(i) \\ a_{i\sigma(i)} - \lambda & \text{, falls } i = \sigma(i) \end{cases}$$

$\sigma \in S_n$

Produkt von n Faktoren = Polynom vom Grad $\leq n$ in λ

Summe von Polynomen vom Grad $\leq n$

= Polynom vom Grad $\leq n$.

$$= \operatorname{sign} \tau \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - \lambda) + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq \tau}} \operatorname{sign} \sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \begin{cases} a_{i\sigma(i)} & i \neq \sigma(i) \\ a_{i\sigma(i)} - \lambda, & i = \sigma(i) \end{cases}$$

$\sigma \in S_n \setminus \{\tau\} \Leftrightarrow \sigma$ hat höchstens $n-2$ Fixpunkte $i = \sigma(i)$

$$= (-1)^n \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} a_{ii} (-\lambda)^{n-1} + \text{Polynom vom Grad} \leq n-2$$

$$= \underbrace{(-1)^n}_{=: a_n} \lambda^n + \underbrace{(-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}}_{=: a_{n-1}} \lambda^{n-1} + \text{---------- " ----------}$$

a) Betrachte $\lambda = 0$:

$$\chi_A(0) = \begin{vmatrix} a_{11} - 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A.$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i 0^i = a_0 \quad . \quad \square$$

Sprechweise / Definition:

d) χ_f, χ_A heißt auch charakteristisches Polynom von f, A

e) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + \ldots + a_{nn} =: \begin{cases} \operatorname{tr} A \\ \operatorname{spur} A \end{cases}$ heißt Spur von A, f (engl. trace)

1.23 Bsp. (Charakt. Polynom):

a) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$$

$$= (-1)^2 \lambda^2 + (-1)^1 \underbrace{(a+d)}_{= \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}} + \underbrace{(ad-bc)}_{= \det A}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$.

1.24 Satz (über die Nullstellen des charakt. Polynoms):

Die Nullstellen des charakt. Polynoms einer lin. Abb. f sind genau die Eigenwerte von f.

Beweis: $\lambda \in \Lambda(f) \Leftrightarrow 0 = \det(f - \lambda \mathrm{id}_V) = \chi_f(\lambda)$. $\square$

(über Eigenwerte einer lin. Abb.) — Satz 1.18

c) vgl. Fischer S. 327

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 6 & 6 \\ -12 & 2 & 12 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \chi_A(\lambda) = \sum_{i=0}^{4} a_i \lambda^i$$

$a_4 = (-1)^4 = 1$

$a_3 = (-1)^3 \operatorname{tr} A = -3$

$$a_0 = \det A = \begin{vmatrix} -6 & 1 & 6 & 0 \\ -14 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 & 0 \\ -2 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

Fehlen a_2 und a_1, wir setzen 2 Werte ein:

$$\chi_A(1) = \begin{vmatrix} -6 & 1 & 6 & 6 \\ -12 & 1 & 12 & 12 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\chi_A(2) = \begin{vmatrix} -7 & 1 & 6 & 6 \\ -12 & 0 & 12 & 12 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \chi_A(1) = 1 \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1^1 - 8 = 0$$

$$= 1 - 3 + a_2 + a_1 - 8 = 0$$

$$\chi_A(2) = 1 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 - 8 = 0$$

$$= 16 - 24 + 4a_2 + 2a_1 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} a_2 + a_1 = 10 \\ 4a_2 + 2a_1 = 16 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 8 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow a_2 = -2, \; a_1 = 12$$

$$\Rightarrow \chi_A(\lambda) = -\lambda^4 - 3\lambda^3 - 2\lambda^2 + 12\lambda - 8$$

11.25 Kor. (über den EW 0): Sei $f: V \to V$ lin. Dann gilt:

$$0 \in \Lambda(f) \overset{\text{Satz 11.24}}{\Leftrightarrow} \det f = 0.$$

Bew.: $0 \in \Lambda(f) \Leftrightarrow \det(f - 0 \cdot \mathrm{id}_V) = \det f = 0$. □

d) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ (symmetrisch)

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2$$

$$= \left(\lambda - \frac{a+d}{2}\right)^2 - \frac{(a+d)^2}{4} + ad - b^2$$

$$= \left(\lambda - \frac{a+d}{2}\right)^2 - \frac{a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4b^2}{4}$$

$$= \left(\lambda - \frac{a+d}{2}\right)^2 - \frac{D}{4}$$

$D = a^2 - 2ad + d^2 + 4b^2 = (a-d)^2 + 4b^2 > 0$ für $b > 0$

$\Rightarrow |\Delta(A)| = 2 \Rightarrow A$ diagbar.

11.26 Kor. (über symmetrische reelle 2×2-Matrizen): Eine symmetrische, reelle $\mathbb{R}^{2\times 2}$-Matrix ist diagbar. (85)

11.27 Def. (geometrische und algebraische Vielfachheit):

Sei $f: V \to V$ lin. und $\lambda \in K$.

a) $\nu(f,\lambda) := \dim \operatorname{Eig}(f,\lambda)$ — geometrische Vielfachheit von λ (bzgl. f)

b) $\mu(f,\lambda) := \max\{\mu \in \mathbb{N} : \exists p \in K[X] : (\lambda - X)^\mu \cdot p(X) = \chi_f(X)\}$

algebraische Vielfachheit von λ (bzgl. f)

11.28 Satz (geometrische und algebraische Vielfachheit):

a) Die geom. Vielfachheit von λ ist die max. Anzahl lin. unabh. Eigenvektoren zum EW λ

b) Die algebraische Vielfachheit ist der Grad des linearen Faktors $(\lambda - X)$ im charakt. Polynom $\chi_f(X)$.

11.29 Satz (über geom. und algebr. Vielfachheit):

Sei $f: V \to V$ lin., $\lambda \in K$. Dann gilt:

$$0 \leq \nu(f,\lambda) \leq \mu(f,\lambda) \leq \dim V.$$

Bew.: Sei $\nu := \nu(f,\lambda)$, $\mu := \mu(f,\lambda)$, $n = \dim V$.

Sei $B_\lambda = \{v_1, \dots, v_\nu\}$ Basis von $\operatorname{Eig}(f,\lambda)$, $B \supseteq B_\lambda$ Basis von V.

$$\Rightarrow {}_B A_B(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & * \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda & \\ \hline & 0 & & * \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \nu \\ \\ \\ n \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & & & & \\ 1 & \dots & \nu & \dots & n \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \chi_f(X) \overset{\text{Bem. 11.28a}}{=} (\lambda - X)^\nu \cdot p(X) \quad \text{Satz 11.22}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \nu \leq \mu \leq \deg \chi_f(X) = n. \quad \square$$

11.30 Satz (3. Kriterium für Diagonalisierbarkeit):

Sei $f: V \to V$ lin. Dann gilt:

$$f \text{ diag'bar} \iff \chi_f(X) = \prod_{\lambda \in \Delta(f)} (\lambda - X)^{\nu(f,\lambda)}$$

d.h. f ist diag'bar genau dann, wenn

a) $\chi_f(X) = \prod_{\lambda \in \Delta(f)} (\lambda - X)^{\mu(f,\lambda)}$ zerfällt in Linearfaktoren

b) $\mu(f,\lambda) = \nu(f,\lambda) \; \forall \lambda \in \Delta(f)$ geom. = algebraische Vielfachheit

Bew.:

"$\Rightarrow$" f diag'bar $\overset{\text{Satz 11.6}}{\underset{\text{1. Kriterium}}{\iff}}$ f diag'barkeit $\exists$ Basis $B = \{v_i\}_{i=1,\dots,n}$ aus Eigenvektoren zu EWen λ_i, $i = 1, \dots, n$

$\Leftrightarrow \exists A \in \mathrm{Mat}_n(K): f = \Phi_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}$

$\Rightarrow \chi_f(x) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - x) = \begin{cases} \prod_{\lambda \in \Delta(f)} (\lambda - x)^{\mu(f,\lambda)} \\ \prod_{\lambda \in \Delta(f)} (\lambda - x)^{\nu(f,\lambda)} \end{cases}$

"$\Leftarrow$" $\deg \chi_f(x) = \deg \prod_{\lambda \in \Delta(f)} (\lambda - x) = \sum_{\lambda \in \Delta(f)} \nu(f,\lambda) = \dim V = n$

Satz 11.11 $\Rightarrow$ 2. Unt. f. Diag'bar basiert f diag'bar. $\square$

Bsp. 11.23 (#Aufgabe):

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 6 & 6 \\ -12 & 2 & 12 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \chi_A(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8$$

$$= \underbrace{(x-1)(x-2)}_{= x^2 - 3x + 2} q(x) = (x-1)(x-2)^2(x+2)$$

$$(x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8) : (x^2 - 3x + 2) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$
$$-(x^4 - 3x^3 + 2x^2)$$
$$-4x^2 + 12x - 8$$
$$-(-4x^2 + 12x - 8)$$
$$0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nu(f,1) = \mu(f,1) = 1 \\ \nu(f,-2) = \mu(f,-2) = 1 \\ 1 \le \nu(f,2) \le \mu(f,2) = 2 \end{cases}$$

i) $\lambda = 2$

$$A - 2I \mid 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -7 & 1 & 6 & 6 & 0 \\ -12 & 0 & 12 & 12 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \Leftarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= :v_1 \quad = :v_2$$

$\Rightarrow \nu(f,2) = \mu(f,2) = 2$

ii) $\lambda = 1$

$$A - 1I \mid 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 1 & 6 & 6 & 0 \\ -12 & 1 & 12 & 12 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= :v_3$$

iii) $\lambda = -2$

$$A + 2I \mid 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 6 & 6 & 0 \\ -12 & 4 & 12 & 12 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 8 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$= :v_4$

Mit $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=1}^4$ ist

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{-1} A \Phi_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -2 \end{pmatrix}$$

$\nu(f,2) = \mu(f,2) = 2$
$\nu(f,1) = \mu(f,1) = 1$
$\nu(f,-2) = \mu(f,-2) = 1$

M.31 Krit. (4. Kriterium für Diag'barkeit): Sei $f: V \to V$ lin. Abb.:

f diag'bar $\Leftrightarrow \exists_{\lambda \in \Lambda(f)} \dim(\ker(f, \lambda)) = \dim V \Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda(f)} \operatorname{Eig}(f, \lambda)$.

(Kor. 6.25 a); Kor. M.7 über verschiedene Eigenwerte)

M.32 Bsp. (Minimalpolynom eines Vektors): A.M. 16

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 2 \end{pmatrix}, \quad |A| = \lambda, \quad |A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \chi_A(\lambda) = 0$$

$$\chi_A(x) = -x^3 + 3x^2 + a_1 x + \lambda = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = (1 - x)^3$$

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda + 3\lambda + a_1 + \lambda = 0 \Rightarrow a_1 = -3$$

$$A - \lambda I \,|\, 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$v_1 = e_1$

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 + e_2 = v_2$$

$$f(f(v_1)) = f(v_2) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & \lambda & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = e_1 + e_2 + e_3 = v_3$$

$$f(f(f(v_1))) = f(f(v_2)) = f(v_3) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & \lambda & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = e_1 + 3e_3$$

$$= v_1 + 3(v_3 - v_2) = 1 v_1 - 3 v_2 + 3 v_3 = v_4$$

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$\Rightarrow {}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(v_3) = 1 \cdot v_1 - 3 \cdot v_2 + 3 v_3$$

$$\Leftrightarrow f^3(v_1) = 1 \cdot v_1 - 3 f(v_1) + 3 f^2(v_1)$$

$$\Leftrightarrow -f^3(v_1) + 3 f^2(v_1) - 3 f(v_1) + v_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -A^3 v_1 + 3 A^2 v_1 - 3 A v_1 + v_1 = 0$$

M.33 Satz und Def. (Minimalpolynom eines Vektors): Sei $f: V \to V$ lin., $\dim V = n$, $v \in V$. Dann ex. genau ein normiertes Polynom minimalen Grades $q_{f,v} \in K[X]$, $\deg q_{f,v} = k \leq n$ mit

$$q_{f,v}(f)(v) = 0.$$

$q_{f,v}$ heißt Minimalpolynom von v bzgl. f.

Idee: Setze $v_1 = v$, $v_{i+1} = f(v_i)$, bis zum ersten Mal

$$v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i, \quad \alpha \neq 0.$$

Dann ist $k \leq n$ und

$$v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = f^k(v_1) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f^{i-1}(v_1) = \left(\sum_{i=0}^{k} (-\alpha_{i+1}) f^i\right)(v)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k+1} (-\alpha_i) f^{i-1}\right)(v_1) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k+1} (-\alpha_i) f^{i-1}\right)}_{=: \varphi_{f,v}(A)}(v_1) =: \varphi_{f,v}(f)(v) \quad (1)$$

$\varphi_{f,v}$ normiert, da $\alpha_{k+1} = 1$

Aus: $\exists \psi \in K[x]: \psi(f)(v) = 0$, ψ normiert, $\deg \psi \leq \deg \varphi_{f,v}$.

1. Fall: $\deg \psi < \deg \varphi_{f,v}$. Sei $\psi(x) = \sum_{i=0}^{\ell} \beta_i x^i$, $\ell < k$

$$\Rightarrow 0 = \psi(A)(v) = \sum_{i=0}^{\ell} \beta_i f^i(v) = \sum_{i=0}^{\ell} \beta_i f^i(v_0) = \sum_{i=0}^{\ell} \beta_i v_i \quad \lightning$$

2. Fall: $\deg \psi = \deg \varphi_{f,v}$. Sei $\psi(x) = \sum_{i=0}^{k} \beta_i x^i$, $\beta_k = \alpha_k = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \deg(\varphi_{f,v} - \psi)(x) \leq k-1 < k \\ (\varphi_{f,v} - \psi)(f)(v) = \varphi_{f,v}(f)(v) - \psi(f)(v) = 0 \end{cases} \quad \lightning \quad \square$$

1.30 Bsp. (Herleitung):

$$v_4 - 3v_3 + 3v_2 - 1 \cdot v_1 = 0$$

$$\Rightarrow f^3(v_1) - 3f^2(v_1) + 3f(v_1) - 1 f^0(v_1) = 0$$

$$\Rightarrow \left(f^3 - 3f^2 + 3f - 1f^0\right)(v_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3}_{= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}} - 3\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2}_{= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

In der Tat:

$$\left(f^3 - 3f^2 + 3f^1 - f^0\right)(v_2) = \left(f^3 - 3f^2 + 3f^1 - f^0\right)(f(v_1))$$

$$= \left(f^4 - 3f^3 + 3f^2 - f^1\right)(v_1) = f\underbrace{\left(f^3 - 3f^2 + 3f^1 - f^0\right)(v_1)}_{=0} = 0$$

Analog $\left(f^3 - 3f^2 + 3f^1 - f^0\right)(v_3) = f^2\left(f^3 - 3f^2 + 3f^1 - f^0\right)(v_1) = 0$ (SG)

Mit $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ ist also

$p(f) \equiv 0$, $p(A) = 0 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Und: $p(x) = -\chi_f(x) = -\chi_A(x)$.

<u>M. Satz (von Cayley-Hamilton)</u>: Sei $f: V \to V$ Mv.

Dann gilt: $\chi_f(f) = 0$.

<u>Bew.:</u> Wähle $0 \neq v_1 \in V$, $v_{i+1} := f(v_i)$ bis zum k-ten Mal.

$$v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \quad , \quad \alpha \neq 0 \qquad (2)$$

d.h. $v_{k+1} \in \langle v_i \rangle_{i=1}^{k}$, $\dim \langle v_i \rangle_{i=1}^{k} = k$.

Sei $U := \langle v_i \rangle_{i=1}^{k}$.

<u>Beh.:</u> $f(U) \subseteq U$, d.h. U ist invariant unter f.

<u>Beg.:</u> Sei $u \in U = \langle v_i \rangle_{i=1}^{k} \Rightarrow \exists \beta \in U: u = \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i$

$$\Rightarrow f(u) = f\left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \underbrace{f(v_i)}_{=v_{i+1}} + \beta_k \underbrace{f(v_k)}_{=v_{k+1}}$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i v_{i+1} + \beta_k \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right) \in \langle v_i \rangle_{i=1}^{k} = U. \quad \diamond$$

Ergänze $\{v_1, \dots, v_k\}$ zu einer Basis B von V.

$$\Rightarrow {}_B A_B(f) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & & & & \alpha_1 & \\ 1 & 0 & & & \alpha_2 & \\ & 1 & 0 & & \alpha_3 & * \\ & & \ddots & 0 & \alpha_{k-1} & \\ & & & 1 & \alpha_k & \\ \hline & & 0 & & & A_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & * \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right).$$

<u>Behr.:</u> $\varphi_{f,v}(x) = \sum_{i=0}^{k} (-\alpha_{i+1}) x^i$, $\alpha_{k+1} = -1$.

<u>Begr.:</u> (2) und (1). $\diamond$

$\Rightarrow$ $\varphi_{f,v}(A)(v) = 0$.

<u>Behr.:</u> $\chi_{A_1} = (-1)^k \varphi_{f,v}$.

<u>Beg.:</u>

$$\chi_{A_1}(x) = |A_1 - xI| = \begin{vmatrix} -x & & & & \alpha_1 \\ 1 & -x & & & \alpha_2 \\ & 1 & -x & & \alpha_3 \\ & & \ddots & -x & \alpha_{k-1} \\ & & & 1 & \alpha_k - x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & & & & \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^{i-1} - x^k \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ & \ddots & 0 & & \alpha_{k-2} + \alpha_{k-1} x + \alpha_k x^2 - x^3 \\ & & 1 & 0 & \alpha_{k-1} + \alpha_k x - x^2 \\ & & & 1 & \alpha_k - x \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{k-1} \sum_{i=0}^{k} \alpha_{i+1} x^i \overset{\alpha_{k+1} = -1}{=} (-1)^k \sum_{i=0}^{k} (-\alpha_{i+1}) x^i \quad . \quad \diamond$$

Bh.: $\chi_A = \chi_{A_1} \cdot \chi_{A_2}$.

Beg.: Folgt aus $\det \begin{pmatrix} M_1 & * \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} = \det M_1 \cdot \det M_2$. $\diamond$

$\Rightarrow \chi_A(v) = \chi_{A_1}(v) \cdot \chi_{A_2}(v) = (-1)^k \varphi_{f,v}(v)\, \chi_{A_2}(v) = 0$.

Da v beliebig war, gilt dies für alle $v \in V$.

Bh.: $M = \begin{pmatrix} M_1 & * \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \in K^{n,n}$, $M_1 \in K^{m,m}$ $\Rightarrow \det M = \det M_1 \cdot \det M_2$

Beg.:

1. Fall: $\det M_1 = 0 \Rightarrow \operatorname{rang} M_1 < m \Rightarrow \operatorname{rang} M < n \Rightarrow \det M = 0$.

2. Fall: $\det M_1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} M_1 = m$. Dann kann man mit elementaren Spaltenumformungen $* = 0$ erreichen, d.h. $\det M = \det \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$.

Wegen $\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$ ist

$$\det M = \det \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} = \det \left[\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \det \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

$$= \det M_1 \cdot \det M_2. \qquad \square$$

M.35 Satz und Def. (Minimalpolynom einer lin. Abb.):

Sei $f: V \to V$ lin., $\dim V = n$. Dann $\exists$ genau ein normiertes Polynom minimalen Grades $\varphi_f \in K[x]$, $\deg \varphi_f = k \in \mathbb{N}$, mit

$$\varphi_f(f) = 0.$$

φ_f heißt Minimalpolynom von f.

Bew.: Betrachte

$$I(f) := \{ p \in K[x] : p(f) = 0 \} \quad \text{Ideal von } f$$

Wegen $\varphi_f \in I(f)$ ist $I(f) \neq \emptyset$. Sei $\varphi \in I(f)$ ein normiertes Polynom minimalen Grades.

Bh.: $p \in I(f) \Rightarrow p = q \cdot \varphi_f$, d.h. φ_f teilt p.

Beg.: Ann.: $p = q \cdot \varphi_f + r$, $\deg r < \deg \varphi_f$.

$\Rightarrow p(f) = q(f) \underbrace{\varphi_f(f)}_{=0} + r(f) = r(f) = 0$ ↯. $\square$

M.36 Kor. (über Minimalpolynome): Sei $f: V \to V$ lin., $0 \neq V \in V$, $p(x) \in K[x]$.

a) $p(f) = 0 \Rightarrow \exists\, q(x) \in K[x]: p(x) = \varphi_f(x) \cdot q(x)$

b) $p(f)(v) = 0 \Rightarrow \exists\, q(x) \in K[x]: p(x) = \varphi_{f,v}(x) \cdot q(x)$

c) $\exists\, q(x) \in K[x]: \varphi_f(x) = \varphi_{f,v}(x) \cdot q(x)$.

d) $\exists\, q(x) \in K[x]: \chi_f(x) = \varphi_f(x) \cdot q(x)$.

Bew.:

a) Bd. (1) im Bew. von Satz M.35.

b) Analog zu a).

c) Folgt aus b) mit $p(x) = \varphi_f(x)$.

d) Folgt aus a) mit $p(x) = \chi_f(x)$. □

M.37 Satz (über die Nullstellen des Minimalpolynoms): Sei $f: V \to V$ lin., $\lambda \in K$. Dann gilt:

$$\chi_f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \varphi_f(\lambda) = 0,$$

d.h. die Nullstellen des Minimalpolynoms sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

Bew.:

"$\Leftarrow$": Sei $\varphi_f(\lambda) = 0 \Rightarrow \chi_f(\lambda) = \underbrace{\varphi_f(\lambda)}_{=0} \cdot q(\lambda) = 0$. (Kor M.36 d))

"$\Rightarrow$": Sei $\chi_f(\lambda) = 0 \overset{\text{Satz M.24}}{\Leftrightarrow} \lambda \in \Delta(f)$.

Sei $v \in \operatorname{Eig}(f,\lambda) \setminus \{0\}$ ein zugehöriger $\in V$ und

$\varphi_f(x) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^i$. Dann gilt:

$$0 = \underbrace{\varphi_f(f)}_{=0}(v) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f^i(v) \overset{f(v)=\lambda v}{=} \left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \lambda^i\right) v = \varphi_f(\lambda) \cdot v$$

$\Rightarrow \varphi_f(\lambda) = 0$. □

M.38 Bem. (Berechnung des Minimalpolynoms): Nach Kor M.36 kann man das Minimalpolynom berechnen, indem für alle Teiler $p(x)$ des charakt. Polynoms $p(f) = 0$ testet. (und das Polynom mit minimalem Grad bestimmt.)
Nach Satz M.37 haben dabei alle linearfaktoren mindestens den Grad 1.

M.39 Satz (Spaltenzerlegung): Sei $f: V \to V$ lin. und

$$\varphi_f(x) = p(x) \cdot q(x), \quad \operatorname{ggT}(p(x), q(x)) = 1.$$

Dann gilt:

a) $V = \ker p(f) \oplus \operatorname{im} p(f)$,
$V = \ker q(f) \oplus \operatorname{im} q(f)$.

b) $\ker p(f) = \operatorname{im} q(f) =: U$
$\ker q(f) = \operatorname{im} p(f) =: W$

c) $f(U) = U$, $f(W) = W$, d.h.
$\ker \begin{Bmatrix} p(f) \\ q(f) \end{Bmatrix}$, $\operatorname{im} \begin{Bmatrix} p(f) \\ q(f) \end{Bmatrix}$ sind invariant unter f.

$\ker p(f) \oplus \operatorname{im} p(f)$
$\| \quad \cap \{0\} \quad \| V$
$\ker q(f) \oplus \operatorname{im} q(f)$

14.11.06 (18)

Bew.: Sei $\dim V = n$. $p(f): V \to V$ ist lin. Abb.

$\Rightarrow n = \dim V = \dim \ker p(f) + \dim \operatorname{im} p(f)$.

Beh. 1: $\operatorname{im} p(f) \subseteq \ker q(f)$

Beg.: Sei $0 \neq v \in \operatorname{im} p(f) \Rightarrow \exists\, 0 \neq u \in V : v = p(f)(u)$

$\Rightarrow q(f)(v) = q(f)\,p(f)(u) = \underbrace{\varphi_f(f)}_{=0}(u) = 0$.

Beh. 2: $\ker p(f) \cap \ker q(f) = \{0\}$

Beg.: Sei $0 \neq v \in \ker p(f) \cap \ker q(f)$.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} p(f)(v) = 0 & \Rightarrow & p(x) = \varphi_{f,v}(x) \cdot p'(x) \\ q(f)(v) = 0 & \Rightarrow & q(x) = \varphi_{f,v}(x) \cdot q'(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{ggT}(p(x), q(x)) \neq 1 \;\lightning$$

a) $\operatorname{im} p(f) \cap \ker p(f) \overset{\text{Beh. 2}}{\subseteq} \ker q(f) \cap \ker p(f) = \{0\}$.

b) $\dim \operatorname{im} p(f) \leq \dim \ker q(f) \overset{\text{Beh. 2}}{\leq} n - \dim \ker p(f) = \dim \operatorname{im} p(f)$

c) Sei $v \in \ker p(f) \Rightarrow p(f)(f(v)) = f(\underbrace{p(f)(v)}_{=0}) = f(0) = 0$.

d) Ann.: $W = \{0\} \Rightarrow V = \ker p(f) \Rightarrow p(f) \equiv 0 \;\lightning$

Denn $\deg p(x) = \deg \varphi_f(x) - \deg q(x) < \deg \varphi_f(x)$. □

M.40 Satz (5. Kriterium für Diagonalisierbarkeit):

Sei $f: V \to V$ lin. Dann gilt:

$$f \text{ diagbar} \iff \varphi_f(x) = \prod_{\lambda \in \Delta(f)} (\lambda - x),$$

d.h. f ist diag'bar genau dann, wenn das Minimalpolynom in Linearfaktoren zerfällt. (19)

Beg. $p(x), q(x) \neq \{0\}$

Satz: Sei $\dim V = n$.

"$\Rightarrow$" Sei f diag'bar $\Rightarrow \exists$ Basis $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=1}^n$ aus Eigv zu Eigw λ_i, $i = 1, \dots, n$

Sei $v \in V \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$

$$\Rightarrow \prod_{\lambda \in \Delta(f)} (f - \lambda \mathrm{id}_V) \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \prod_{\substack{\lambda \in \Delta(f) \\ \lambda \neq \lambda_i}} (f - \lambda \mathrm{id}_V) \underbrace{(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)(v_i)}_{=0} = 0$$

Satz 11.37 $\Rightarrow$ $c_{p_f}(x) = \prod_{\lambda \in \Delta(f)} (x - \lambda)$.
über der Nullstellen des Minimalpolynoms

"$\Leftarrow$" Sei $\Delta(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Induktion über k.

Ind.-Anf.: $k = 1$: $c_{p_f}(x) = x - \lambda \Rightarrow V = \ker(f - \lambda \mathrm{id}_V) = \mathrm{Eig}(f, \lambda)$.

Ind.-Ann.: Sei die Beh. bewiesen für $k \in \mathbb{N}$.

Ind.-Schritt $k \to k+1$: Sei $c_{p_f}(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)$.

$$\Rightarrow c_{p_f}(x) = \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{k-1} x - \lambda_i \right)}_{=:p(x)} \underbrace{(x - \lambda_k)}_{=:q(x)}, \quad \mathrm{ggT}(p(x), q(x)) = 1$$

Spaltdarst. $\Rightarrow$ Satz 11.39 $\Rightarrow V = \ker q(f) \oplus \mathrm{im}\, q(f)$

$$= \ker(f - \lambda_k \mathrm{id}_V) \oplus \underbrace{\mathrm{im}(f - \lambda_k \mathrm{id}_V)}_{=:U}$$

$$= \underbrace{\mathrm{Eig}(f, \lambda_k)}_{\neq \{0\},\ f\text{-invariant}} \oplus \underbrace{U}_{\neq \{0\},\ f\text{-invariant}}$$

Betrachte $\tilde{f}: U \to U$, $u \mapsto f(u) \in f(U) = U$.

$\Rightarrow c_{p_{\tilde{f}}}(x) = \prod_{i=1}^{k-1} (x - \lambda_i)$

Ind.-Ann. $\Rightarrow \tilde{f}$ diag'bar.

Sei $\mathcal{B}_U$ Basis von U, $\mathcal{B}_{\lambda_k}$ Basis von $\mathrm{Eig}(f, \lambda_k)$

$\Rightarrow \mathcal{B} := \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_{\lambda_k}$ Basis von V.

$$\Rightarrow {}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} {}_{\mathcal{B}_U}A_{\mathcal{B}_U}(\tilde{f}) & 0 \\ \hline 0 & \lambda_k I_{\dim \mathrm{Eig}(f, \lambda_k)} \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{k-1} \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \lambda_k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{matrix} \end{array} \right)$$

$\dim U = n$ $\qquad$ $\dim \mathrm{Eig}(f, \lambda_k)$

$\square$

M.2 Esp. (Indeveq) i

$$A=\begin{pmatrix}-5&1&6&6\\-12&2&12&12\\1&1&0&-2\\-4&0&4&6\end{pmatrix},\quad \chi_A(x)=(x-1)(x-2)^2(x+2)$$

$$\mathrm{eig}(A,1)=\langle(1,0,1,0)^T\rangle = \ker(A-1I)=\langle v_1\rangle$$

$$\mathrm{eig}(A,2)=\langle(1,1,1,0)^T,(1,1,0,1)^T\rangle = \ker(A-2I)=\langle v_2,v_3\rangle$$

$$\mathrm{eig}(A,-2)=\langle(1,3,-1,1)^T\rangle = \ker(A+2I)=\langle v_4\rangle$$

$$\varphi_A(x)=(x-1)(x-2)(x+2)$$

$$\varphi_A(A)=(A-1I)(A-2I)(A+2I)$$

$$=\begin{pmatrix}-6&1&6&6\\-12&1&12&12\\1&1&-1&-2\\-4&0&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7&1&6&6\\-12&0&12&12\\1&1&-2&-2\\-4&0&4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1&6&6\\-12&4&12&12\\1&1&2&-2\\-4&0&4&8\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}12&0&-12&-12\\36&0&-36&-36\\-12&0&12&12\\12&0&-12&-12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&1&6&6\\-12&4&12&12\\1&1&2&-2\\-4&0&4&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}=\{e_i\}_{i=1}^4$, $\mathcal{B}'=\{v_i\}_{i=1}^4$

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^4_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{f(A)\ =\ A} & \mathbb{R}^4_{\mathcal{B}} \\ {\scriptstyle id_{\mathbb{R}^4}}\uparrow\,\mathcal{B}' & & \mathcal{B}'^{-1}\downarrow\,{\scriptstyle id_{\mathbb{R}^4}} \\ \mathbb{R}^4_{\mathcal{B}'} & \xrightarrow[f(A')]{A'} & \mathbb{R}^4_{\mathcal{B}'}\end{array}$$

$$A'=\mathcal{B}'^{-1}A\mathcal{B}'=\begin{pmatrix}3&-1&-2&-2\\-2&1&2&1\\-1&0&1&2\\1&0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&1&6&6\\-12&2&12&12\\1&1&0&-2\\-4&0&4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&3\\1&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&-1&-2&-2\\-2&1&2&1\\-1&0&1&2\\1&0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2&-2\\0&2&2&-6\\1&2&0&2\\0&0&2&-2\end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{array}{c|c|c|c} & A'v_1 & A'v_2 & A'v_3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$=\underbrace{\mathrm{eig}(f,1)}_{=\ker(A-1)}=\underbrace{\mathrm{eig}(f,2)}_{=\ker(A-2I)}=\underbrace{\mathrm{eig}(f,-2)}_{=\ker(A+2I)}$$

i) $\lambda = 1$

$$\varphi_A(x) = \underbrace{(x-2)(x+2)}_{=q(x)} \cdot \underbrace{(x-1)}_{=p(x)}$$

$$\ker(A-2I) \oplus \ker(A+2I) \oplus \ker(A-I)$$
$$= \underbrace{\mathrm{Eig}(A,2)}_{\parallel} \oplus \underbrace{\mathrm{Eig}(A,-2)}_{\parallel} \oplus \underbrace{\mathrm{Eig}(A,1)}_{\parallel}$$
$$= \mathrm{Im}(A-I) \oplus \mathrm{Eig}(A,1) = V$$

$$\varphi_A(A) = \underbrace{(A-2I)(A+2I)}_{=q(A)} \cdot \underbrace{(A-I)}_{=p(A)} = 0$$

$$\varphi_A(A)(v_1) = (A-2I)(A+2I) \cdot \underbrace{(A-I)(v_1)}_{=0} = 0$$

$$\varphi_A(A)(v_i) = (A-2I)(A+2I) \cdot \underbrace{(A-I)(v_i)}_{\in \mathrm{Im}(A-I) = \langle v_i \rangle_{i=2}^{4}} = 0, \quad i=2,3,4$$

$$\mathrm{Im}(A-I) = \left\langle \begin{pmatrix} -6 & 1 & 6 & 6 \\ -12 & 1 & 12 & 12 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 12 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} v_2 & v_3 & v_4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle v_2, v_3, v_4 \rangle$$

ii) $\lambda = 2$ $\qquad \underbrace{\ker(A-I) \oplus \ker(A+2I)}_{=\mathrm{Im}(A-2I)} \oplus \ker(A-2I) = V$

$$\varphi_A(x) = \underbrace{(x-1)(x+2)}_{=q(x)} \cdot \underbrace{(x-2)}_{=p(x)}$$

$$\varphi_A(A) = \underbrace{(A-I)(A+2I)}_{=q(A)} \cdot \underbrace{(A-2I)}_{=p(A)} = 0$$

$$\varphi_A(A)(v_i) = (A-I)(A+2I) \cdot \underbrace{(A-2I)(v_i)}_{=0} = 0, \quad i=2,3$$

$$\varphi_A(A)(v_i) = (A-I)(A+2I) \cdot \underbrace{(A-2I)(v_i)}_{\in \mathrm{Im}(A-2I) = \langle v_1, v_4 \rangle} = 0, \quad i=1,4$$

$$\mathrm{Im}(A-2I) = \left\langle \begin{pmatrix} -7 & 1 & 6 & 6 \\ -12 & 0 & 12 & 12 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} v_1 & v_4 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle v_1, v_4 \rangle.$$

iii) $\lambda = -2$

$$\operatorname{Im}(A+2I) = \left\langle \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 & 6 \\ -12 & 4 & 12 & 12 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -3 & 1 & \overbrace{1}^{=v_1} & 0 \\ -12 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \overbrace{1}^{=v_2} & 1 & \overbrace{1}^{=v_3} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle v_2, v_1, v_3 \rangle .$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = f(A)$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(-1-\lambda)+2\right]$$

$$= (1-\lambda)(2-1+\lambda^2) = (1-\lambda)(1+\lambda^2)$$

$$= (1-\lambda)(i+\lambda)(-i+\lambda)$$

i) $\operatorname{Eig}(A,1)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

ii) $\operatorname{Eig}(A,i)$

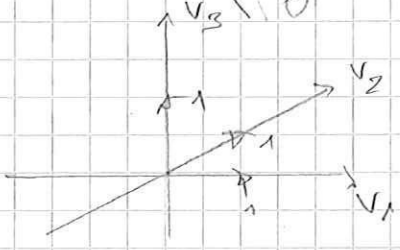
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-i & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1-i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -i & -1+i & 0 & 0 \\ 1 & -1-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

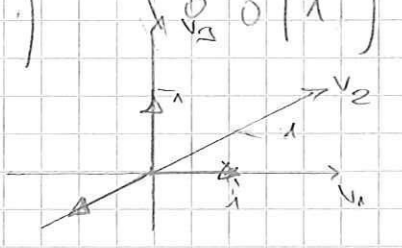
iii) $\operatorname{Eig}(A,-i)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+i & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1+i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} i & -1-i & 0 & 0 \\ 1 & -1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \operatorname{Re}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \operatorname{Im}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} =: \{v_i\}_{i=1}^{3} .$$

$$\Rightarrow T^{-1} A T = \left(\begin{array}{cc|c} \operatorname{Re} i & \operatorname{Im} i & 0 \\ -\operatorname{Im} i & \operatorname{Re} i & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = A'$$





Drehung um 90° im UZS in der $v_1 v_2$-Ebene

$$\varphi_A(\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda^2)$$

$$\varphi_A(A) = (I-A)(I+A^2)$$

$$= B\,(I-B^{-1}AB)(I+B^{-1}AB\,B^{-1}AB)\,B^{-1}$$

$$= B\,(I-A')(I+A'^2)\,B^{-1}$$

$$= B\left[\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right) - \left(\begin{array}{cc|c}0&1&0\\-1&0&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right)\right]\left[\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|c}-1&0&0\\0&-1&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right)\right] B^{-1}$$

Drehung um 180°

$$= B\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\1&1&0\\\hline 0&0&0\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c}0&0&0\\0&0&0\\\hline 0&0&2\end{array}\right) B^{-1}$$

invertiert → 0 ← invertiert

$$= 0$$

$$\ker(I-A) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{im}(I-A) = \left\langle \begin{pmatrix}0&-2&2\\1&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle = \ker(I+A^2)$$

$$\ker(I+A^2) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{im}(I+A^2) = \left\langle \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&-2&2\\1&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^2 \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1&0&2\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&2\\0&0&2\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \ker(I-A)$$

$$\ker(I-A') \oplus \ker(I+A'^2)$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \mathrm{im}(I+A'^2) \oplus \mathrm{im}(I-A')$$

M.41 Satz (Zerlegung des minimalpolynoms):

Sei $f: V \to V$ lin., $0 \neq v \in V$, $\tilde{V} := \operatorname{im} \varphi_{f,v}(f)$, $\tilde{f} := f|_{\tilde{V}, \tilde{V}}$,
$\tilde{f}: \tilde{V} \to \tilde{V}$, $v \mapsto f(v)$.

Dann gilt

$$\varphi_f(\lambda) = \varphi_{f,v}(\lambda) \cdot \varphi_{\tilde{f}}(\lambda).$$

Bew.:

Bem.: $f(\tilde{V}) \subseteq \tilde{V}$, da $\tilde{V}$ ist f-invariant und $\tilde{f}$ wohldef.

Beob.: Sei $\varphi_{f,v}(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \lambda^i$ und $w \in \tilde{V} = \operatorname{im} \varphi_{f,v}(f)$.

$\Rightarrow \exists u \in V: w = \varphi_{f,v}(f)(u) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f^i(u)$

$\Rightarrow f(w) = f(\varphi_{f,v}(f))(u) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f^{i+1}(u)$

$= \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f^i(f(u)) = \varphi_{f,v}(f)(\underbrace{f(u)}_{\in V}) \in \operatorname{im} \varphi_{f,v}(f)$ ◇.

Wegen Kor. M.36 a) ist

$$\varphi_f(\lambda) = \varphi_{f,v}(\lambda) \cdot q(\lambda).$$

Beob.: $q(\lambda) = \varphi_{\tilde{f}}(\lambda) \cdot r(\lambda)$.

Beob.: $\{0\} = \varphi_f(f)(v) = q(f)\,\underbrace{\varphi_{f,v}(f)(v)}_{\tilde{v}}$

$= q(f)(\tilde{v}) = q(\tilde{f})(\tilde{v}) = 0$

$\overset{\text{Kor. M.36 a)}}{\Rightarrow} q(\tilde{f}) = 0 \Rightarrow q(\lambda) = \varphi_{\tilde{f}}(\lambda) \cdot r(\lambda)$ ◇.

Beob.: $\varphi_{f,v}(f) \cdot \varphi_{\tilde{f}}(f) = 0$.

Beob.: $\varphi_{f,v}(f) \cdot \varphi_{\tilde{f}}(f)(v) = \varphi_{\tilde{f}}(f)\,\underbrace{\varphi_{f,v}(f)(v)}_{\in \tilde{V}} = 0$ ◇.

Also ist $\varphi_f(\lambda) = \varphi_{f,v}(\lambda) \cdot \varphi_{\tilde{f}}(\lambda)$ □

M.42 Bsp. (Zerlegung des minimalpolynoms):

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^3$

i) $v = e_1 \Rightarrow Ae_1 = e_1 \Rightarrow \varphi_{A,e_1}(\lambda) = 1 - \lambda$

ii) $\operatorname{im} \varphi_{A,e_1}(A) = \operatorname{im}(I - A) = \langle I - A \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

$\Rightarrow \tilde{f} : \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \to \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \; v \mapsto Av$

$\Rightarrow \varphi_{\tilde{f}}(x) = (1-x)$

ii) $\varphi_f(x) = \varphi_{f|_{E_1}}(x) \cdot \varphi_{\tilde{f}}(x) = (1-x)(1-x) = (1-x)^2$.

iv) $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T_A = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\ker(T-A) \; \mathrm{im}(T-A)$

$\cdot \ker(T-A)^2$

11.43 Bem. (Alternative Berechnung des Minimalpolynoms):

Man kann alternativ auch die Gleichung

$$\varphi_A(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i = 0$$

als Gleichung für α_i mit LGSen berechnen.

11.42 Exp. (Fortsetzung):

b) $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

i) $\deg \varphi_A(x) = 2$:

$$\alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \alpha \in \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Rightarrow \varphi_A(x) = 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$.

$\Rightarrow \varphi_A(A) = (I-A)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}, \; \chi_A(x) = (2-x)^4$

$$2I - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (2I-A)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2I-A)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (2I-A)^4 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \varphi_A(x) = (2-x)^4 = \chi_A(x)$.

M 43 Def. (Nilpotente lin. Abb.): Sei $f: V \to V$ lin.

f nilpotent $:\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}: f^k = 0$.

M 44 Kor. (eigenschaften nilpotenter Abb.): Sei $f: V \to V$ nilpotent mit $f^k = 0$, $f^{k-1} \neq 0$. Dann gilt:

a) $\Lambda(f) = \{0\}$

b) $\varphi_f(x) = x^k$.

c) $\varphi_{f|_U}(x) = x^l$, $l \leq k$, $U \subset V$.

Bew.:

a) $v \in \mathrm{Eig}(f, \lambda) \Rightarrow f^k(v) = \lambda^k v = 0 \Rightarrow v = 0 \vee \lambda = 0$

b) Kor. M. 36 a)

c) Kor. M. 36 c) $\square$

M 45 Def. (Jordankasten): Sei $f: V \to V$ nilpotent, $\dim V = n$, $v \in V$, $l = \deg \varphi_{f,v}(x)$.

$\{v, f(v), \dots, f^{l-1}(v)\}$ – Jordankasten von V bzgl. f.

M. 46 Lemma (Jordankasten): Jeder Jordankasten ist lin. unabhängig.

Bew.: Sei $\{f^i(v)\}_{i=1}^{l-1}$ ein Jordankasten von V bzgl. der nilpotenten Abb. $f: V \to V$.

Ann.: $\sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i f^i(v) = 0$, $\alpha \neq 0$. Sei

$r := \min\{\alpha_i \neq 0\}$, $s := (l-1) - r$.

$$\Rightarrow f^s\left(\sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i f^i(v)\right) = f^s\left(\sum_{i=r}^{l-1} \alpha_i f^i(v)\right)$$

$= \sum_{i=r}^{\ell-1} \alpha_i f^{i+s}(v) = \sum_{i=\ell-1+s}^{\ell-1} \alpha_i f^{i}(v) = f^{\ell-1}(v) = 0$

$\Rightarrow \deg \varphi_{f,v}(\lambda) \leq \ell - 1$ ↯ □

M.47 Def. (Jordanbasis): Sei $f: V \to V$ ein, $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=1}^{n}$ Basis von V. Dann heißt

$\{v_i\}_{i=1}^{n}$ Jordanbasis von V bzgl. f :

$\Leftrightarrow f(v_i) \in \{v_{i-1}, 0\}, \quad i = n, \dots, 2.$

M.48 Kor. (über Jordanbasen): Sei $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=1}^{n}$ Jordanbasis von V bzgl. $f: V \to V$.

a) $f(v_1) = 0$ — Folgerung: nilpotent ist!

b) $\{v_i, v_{i-1}, \dots, v_{i-(\ell-1)}\}$, $\ell = \deg \varphi_{f,v}(\lambda)$, ist Jordankette von V bzgl. f

c) $\exists\, A_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & s_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & s_{n-1} \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad s_i \in \{1, 0\}.$

Bew.:

a) $f(v_1) \in \{0\}$

b) $f(v_i) \in \{v_{i-1}, 0\}$

$f^{j}(v_i) = v_{i-j} \neq 0, \quad j = 0, \dots, \ell - 1.$

c) ↙ □

M.49 Satz (über Jordanbasen nilpotenter Endomorph.): Jeder nilpotente Endomorphismus hat eine Jordanbasis.

Bew.: Sei $f: V \to V$ nilpotent, $b = \deg \varphi_f(\lambda)$. Dann gilt:

$V = \underbrace{\ker f^{k}}_{=V_k} \supsetneq \underbrace{\ker f^{k-1}}_{=V_{k-1}} \supsetneq \dots \supsetneq \underbrace{\ker f^{1}}_{=V_1} \supsetneq \underbrace{\ker f^{0}}_{=V_0} = \{0\}$

$\Rightarrow V_k = V_{k-1} \oplus W_k = V_{k-2} \oplus W_{k-1} = \dots = V_0 \oplus W_1$ für gewisse W_i, $i = k, \dots, 1$

$\Rightarrow V_{k-1} = V_{k-2} \oplus f(W_k) \oplus W_{k-1} = \dots = V_0 \oplus f(W_k) \oplus \dots \oplus W_1$ für gewisse W_i, $i = k-1, \dots, 1$

Beh.: $f(V_i) \subseteq V_{i-1}, \quad i = 1, \dots, k$

Beg.: $v \in V_i \Leftrightarrow f^{i}(v) = 0 \Leftrightarrow f^{i-1}(f(v)) = 0 \Leftrightarrow f(v) \in V_{i-1}$. ◇

Beh.: $f: W_i \to V_{i-1}$ ist injektiv und $f(W_i) \cap V_{i-2} = \{0\}$.

Beg.: Sei $0 \neq w \in W_i \Rightarrow w \notin V_{i-1} \Leftrightarrow 0 \neq f^{i-1}(w) = f^{i-2}(f(w))$. ◇

$V = V_k = V_{k-1} \oplus W_k = V_{k-2} \oplus W_{k-1} \oplus W_k = V_{k-3} \oplus W_{k-2} \oplus W_{k-1} \oplus W_k = \dots$

Setze $U_k := W_k$

$= V_0 \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} \bigoplus_{j=0}^{i-1} f^j(U_i)$ $\quad V_0 = \{0\}$, $f^j(U_i) = \langle v_e^i \rangle_{e=1}^{k_i}$

$= \bigoplus_{i=1}^{k} \bigoplus_{j=0}^{i-1} \langle f^j(v_e^i) \rangle_{e=1}^{k_i}$

$= \bigoplus_{i=1}^{k} \bigoplus_{j=1}^{i-1} \langle f^j(v_e^i) \rangle_{e=1}^{k_i}$

$= \bigoplus_{i=1}^{k} \bigoplus_{e=1}^{k_i} \langle \underbrace{f^{i-1}(v_e^i), f^{i-2}(v_e^i), \dots, f(v_e^i), v_e^i}_{\text{Jordanketten}} \rangle$ $\square$

M.SO Bsp (Jordanbasen mit polarer Endomorphismen):

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta \neq 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\ker A^3 \quad \ker A^2 \quad \ker A^1 \quad \ker A^0$

$V \quad \supsetneq \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \supsetneq \quad \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \supsetneq \quad \{0\}$

Wähle $v_1^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker A^3$, $\quad W_3 = U_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$= \ker A^2 \oplus U_3$

$= W_2$

$= \ker A^1 \oplus \underbrace{f(U_3) \oplus U_2}_{} \oplus U_3$

$= \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{= \ker A^2} \oplus \langle 0 \rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$= \underbrace{\ker A^0 \oplus f(U_2) \oplus U_1}_{= \ker A^1} \oplus f(U_3) + U_3$

$= \ker A^0 \oplus f^2(U_3) \oplus U_1 \oplus f(U_3) \oplus U_3$

$= \langle 0 \rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Jordanblöcken

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = [v_i]_{i=1}^4$$

$$\rightarrow {}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}(A) = \left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & & & \\ \hline & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ \hline & & & 0 \end{array}\right) = \mathcal{B}^{-1} A \mathcal{B}$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{A} & E \\ \uparrow \mathcal{B} & & \downarrow \mathcal{B}^{-1} \\ B & \xrightarrow[A']{} & B \end{array}$$

11. Übung (Jordanketten, Hilbertbasis, Cayley-Hamilton):

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & -6 & -2 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = 0$

i) $V = \ker A^2 \oplus U_3 = \langle e_1 + e_2, e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle \oplus \langle e_1 \rangle$

$\ker A^2$:

$\left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow e_1 \in \ker A^2$, $=: V_1^3$

$\Rightarrow$ Jordankette $\{A^2 e_1, A e_1, e_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, Normalform $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \\ \hline & & 0 \\ & & 0 \end{array}\right)$

$= A^2 e_1 \quad A e_1 \quad = e_1$

ii) $V = \ker A \oplus [f(U_3) \oplus U_2] \oplus U_3$

$= \ker A \oplus [\langle A e_1 \rangle \oplus U_2] \oplus \langle e_1 \rangle$

$\ker A$:

$\left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & -6 & -2 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$,

Gesucht: $V_1^2 \subset \ker A^2 \setminus (\ker A \oplus \langle A e_1 \rangle)$

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \equiv \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \ni e_1 + e_6$, $= V_1^2$.

$\Rightarrow$ Jordanbasis $\left\{ A(e_1+e_6), \ldots, e_1+e_6 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1\\2\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\}$

Normalform $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$

iii) $V = \left(\ker A^2 \right) \oplus \langle e_1 \rangle$

$= \left(\ker A \right) \oplus \left(\langle Ae_1 \rangle + \langle e_1+e_6 \rangle \right) \oplus \langle e_1 \rangle$

$= \left(\langle A^2 e_1 \rangle \oplus \langle A(e_1+e_6) \rangle \oplus U_1 \right) \oplus \left(\langle Ae_1 \rangle + \langle e_1+e_6 \rangle \right) \oplus \langle e_1 \rangle$

genau: $V_1^* \in \ker A \setminus \left(\langle A^2 e_1 \rangle \oplus \langle A(e_1+e_6) \rangle \right)$

$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0\\ -1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & 1\\ 0 & 2\\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \not\ni \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-1\\-1\\1 \end{pmatrix} = e_1 - e_4 - e_5 + e_6$

iv) $V = \ker A^2$

$\ker A$

$\{0\} \oplus \left(\langle A^2 e_1 \rangle \oplus A(e_1+e_6) \oplus \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-1\\-1\\1 \end{pmatrix} \right) \oplus \left(\langle Ae_1 \rangle \oplus \langle e_1+e_6 \rangle \right) \oplus \langle e_1 \rangle$

$S = \left(A^2 e_1, Ae_1, e_1, A(e_1+e_2), e_1+e_6, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-1\\-1\\1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A' \colon \mathbb{R}^6_S \to \mathbb{R}^6_S$

$\mathbb{R}^6_E \to \mathbb{R}^6_E$ (A), S, S^{-1}

$\Rightarrow A' = S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$.

11.81 Def (verallg. Jordanbasis): Sei $f: V \to V$ lin., $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=1}^n$ eine Basis von V. Dann heißt

$\{v_i\}_{i=1}^n$ (verallg.) Jordanbasis von V (bzgl. f)

$\Leftrightarrow \exists A_{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{diag}_{i=1}^{k} J_i$, $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$, $i = 1, \dots, k$, $\lambda_i \in K$

J_i, $i = 1, \dots, k$ — Jordanblock

$\operatorname{diag}_{i=1}^{k}(J_i)$ — Jordansche Normalform der Darstellungsmatrix von f

Schreibweise: $\operatorname{diag}_{i=1}^{k}(J_i) = JNF(f)$

11.82 Satz (Jordansche Normalform): Sei $f: V \to V$ lin. Dann gilt:

$\exists$ verallg. Jordanbasis von $f \Leftrightarrow \chi_f(x) = \prod_{\lambda \in \Lambda(f)} (x - \lambda)^{k_\lambda}$

d.h. die Darstellungsmatrix von f bzgl. einer Basis kann genau dann auf Jordansche Normalform gebracht werden, wenn das charakteristische Polynom in Potenzen von Linearfaktoren zerfällt.

Bew.: Sei $\Lambda(f) = \{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$

"$\Leftarrow$": Sei $\chi_f(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{k_i}$

Spaltdarst. $\Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^{k} \underbrace{\ker(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{k_i}}_{=: V_i}$, $f(V_i) \subseteq V_i$, $i = 1, \dots, k$

$\Rightarrow f_i := f|_{V_i} = \lambda_i \mathrm{id}_{V_i}$ wohldef. und linear

Satz 11.39

$\Rightarrow \exists$ Jordanbasis $\mathcal{B}_i = \{v_j\}_{j=1}^{k_i}$

Setze $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$. Dann ist

$\exists A_{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{diag} J_i$, $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & s_{12} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & s_{k_i - 1, k_i} \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$, $s_{ij} \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, k$

$= \operatorname{diag}_{i=1}^{k} J_i'$,

$J_i' = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & s_{12} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & s_{k_i - 1, k_i} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \exists A_{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{diag}_{i=1}^{k} J_i \Rightarrow \chi_f(x) = \prod_{\lambda \in \Lambda(f)} (x - \lambda)^{\text{wie rang } J_i : J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & \lambda \end{pmatrix}}$ $\square$

11.50 Exp. (Jordansche Normalform):

a) $A = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} -1/2-x & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2-x & -1/2 \\ -1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & 1-x & 0 \\ 1/2 & 1/2-x & -1/2 \\ -1 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= -x\left(\tfrac{1}{2}-x\right)(1-x) - (1-x)\left[\tfrac{1}{2}(1-x) - \tfrac{1}{2}\right]$$

$$= (-x)(1-x)\left[\tfrac{1}{2}-x-\tfrac{1}{2}\right] = x^2(1-x)$$

$\ker A$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \chi_A(x) = x^2(x-1) \Rightarrow \mathrm{Jnf}(A) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ \hline & & 1 \end{array}\right)$$

$\ker A^2$ $\quad \ker(A-1\cdot I)$

$$V = \left(\ker A^2 \right) \left(\ker(A-I)\right)$$

$$= \left(\ker A \oplus \langle v_1^0 \rangle\right) \oplus \left(\langle v_1^1 \rangle\right)$$

$$= \left(\langle Av_1^0 \rangle \oplus \langle v_1^0 \rangle\right) \oplus \left(\langle v_1^1 \rangle\right)$$

i) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$\ker A^2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: v_1^0} \in \ker A^2 \setminus \ker A$$

$$\Rightarrow B_0 = \left\{ Av_1^0, \; v_1^0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ii) $A - I = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\ker(A-I)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

iii) $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad | \cdot S^{-1} \quad S^{-1}AS = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \\ \hline & & 1 \end{array}\right)$.

b)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 3 & -3 & -2 & 2 \\ -1 & -x & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2-x & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 1-x & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & 3 & 0 & -2 & 0 \\ -1+x & -x & 1-x & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -x & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1-x & -1-x \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -x & 3 & -x & -2 & 0 \\ -1+x & -x & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -x & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1-x & -2-x \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1+x & -x & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -x & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -x & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= (-x) \begin{vmatrix} -x & 1 & -1 & -1 \\ -1+x & -x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -x & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = (-x) \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & -1 \\ -1+x & -x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -x & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & -1 \\ x & -x & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -x & -2 \\ -1+x & -1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} (-x) = -x^2 \begin{vmatrix} 0 & -x & 0 \\ 1 & 0 & -x \\ -2+x & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -x^3 \begin{vmatrix} 1 & -x \\ -2+x & 1 \end{vmatrix} = -x^3 \left[1 + x(-2+x)\right] = x^3\left[1 - 2x + x^2\right]$$

$$= x^3 (x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Jnf}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

i) $\ker A$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 3 & -3 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Q}_A(x) = x^3(x-1)^2$$

$\ker A^2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$= A^2$

$\ker A^3$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 4 & -4 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V = \left(\ker A^3\right) \oplus \ker (A-I)^3$$

$$= \left(\ker A^2 \oplus U_3^0\right) \oplus$$

$$= \left(\ker A \oplus f(U_3^0) \oplus U_3^0\right) \oplus$$

$$= f^2(U_3^0) \oplus f(U_3^0) \oplus U_3^0 \oplus \ker (A-I)^3$$

genau: $v_1^0 \in \ker A^3 \setminus \ker A^2$, wähle $v_1^0 = e_2 + e_3$

$$\Rightarrow \left\{ A^2(e_2+e_3),\ A(e_2+e_3),\ e_2+e_3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ii) $\ker A - I$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -3 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\ker (A-I)^2 \qquad \Rightarrow q_f(x) = x^3(x+1)^2$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & -3 & 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 5 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 5 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x \in \left\langle \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ +1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V = \left(A^2(e_2+e_3) \oplus \langle A(e_2+e_3), e_2+e_3 \rangle\right) \oplus \left(\ker (A-I) \oplus U_2^1\right)$$

genau: $v_1^1 \in \ker (A-I)^2 \setminus \ker (A-I)$, wähle $v_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left\{ (A-I)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{I}_1$$

$A-I$ $A-I$ $A-I$ $A-I$

$$V = \Big(\underbrace{\langle A^2(e_2+e_3)\rangle \oplus \langle A(e_2+e_3)\rangle}_{A} \oplus (e_2+e_3)\Big) \oplus \Big(\underbrace{(A-I)(e_1+e_2-e_4)}_{A-I} \oplus \langle e_1+e_2-e_4\rangle\Big)$$

iii) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (B_0 | B_1)

$\mathbb{R}^5 \xrightarrow{\text{proj}(A)} \mathbb{R}^5_B \xrightarrow{B} \mathbb{R}^5_E$, $A: \mathbb{R}^5_E \to \mathbb{R}^5_E$

$\text{proj}(A) = B^{-1}AB$

3, 4.16 (34) + (40)

4.54 Satz (Fundamentalsatz der Algebra, Gauß [1799]): Sei $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \in \mathbb{C}[z]$ ein komplexes, nichtkonstantes, ganzrationales Polynom. Dann gibt es (nicht notwendig verschiedene) $z_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, n$, so daß

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k),$$

d.h. jedes komplexe Polynom vom Grad ≥ 1 zerfällt in (Linearfaktoren und) Nullstellen.

Bew.: Wir zeigen, daß $p(z)$ eine Nullstelle z_n besitzt, d.h.

$p(z_n) = 0 \Rightarrow p(z) = (z - z_n) q(z)$, $\deg q(z) = n-1$. Die Beh. des Satzes folgt dann durch Induktion über n.

Beh. 1: $\exists\, r > 0 : |p(z)| \geq r \quad \forall\, z \in \mathbb{C} : |z| \geq r$.

Beweis: Setze $r := 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \geq 1$. Dann gilt für $|z| \geq r \geq 1 > 0$:

$$\begin{aligned} |p(z)| &= \Big| z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \Big| \\ &\geq |z|^n - \Big| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \Big| \geq |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^{k \leq n-1} \\ &= |z|^n - |z|^{n-1} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|z|^{n-1-k}} \geq |z|^n - |z|^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \\ &\quad \text{(since } |z|^{n-1-k} \geq |z|\text{)} \qquad \text{(since } k \leq n-1\text{)} \qquad \text{(since } \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| = r-1\text{)} \\ &= |z|^n - |z|^{n-1}(r-1) \\ &\geq |z|^n - |z|^{n-1}(|z|-1) \\ &\geq |z|^{n-1} \geq r^{n-1} \geq r. \quad \diamond \end{aligned}$$

Beh. 2: $|p(z)|$ nimmt auf $U_r(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ ein globales Minimum an, o.E.d.A. bei $z_0 = 0$.

Beweis: $|p(\cdot)| : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig, $\overline{U_r(0)} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ kompakt

$\Rightarrow \exists\, z_0 \in \overline{U_r(0)} : |p(z_0)| \leq |p(z)| \quad \forall\, z \in \overline{U_r(0)}$.

$|p(0)| = |a_0| < r$, $|p(z)| \geq r$ für $|z| \geq r$

$\Rightarrow |p(z_0)| < r \overset{\forall |z| \geq r}{\Rightarrow} |p(z_0)| \leq |p(z)| \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$.

Falls $z_0 \neq 0$, setze $z' = z - z_0$ und betrachte $p(z')$. $\diamond$

Bem 3: $p(0) = a_0 = 0$ (erster Koeff. $a_\ell \neq 0$, $\ell \geq 1$)

Beg.: Ann.: $a_0 \neq 0 \Rightarrow p(z) = a_0 + a_\ell z^\ell + \dots + a_n z^n$ ($\deg p(z) \geq 1$)

Sei $w \in \mathbb{C}$, $|w| = 1$, beliebig, aber fest, und $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$|p(tw)|^2 - |p(0 \cdot w)|^2 = \underbrace{p(tw)\overline{p(tw)}}_{\in \mathbb{R}[t]} - \underbrace{p(0)\overline{p(0)}}_{\in \mathbb{R}}$$

(reelles Polynom in t)

$$= \left(a_0 + a_\ell t^\ell w^\ell + \sum_{k=\ell+1}^{n} a_k t^k w^k\right)\left(\overline{a_0} + \overline{a_\ell} t^\ell \overline{w}^\ell + \sum_{k=\ell+1}^{n} \overline{a_k} t^k \overline{w}^k\right) - a_0 \overline{a_0}$$

$$= \underbrace{\left(\overline{a_0} a_\ell w^\ell + a_0 \overline{a_\ell} \overline{w}^\ell\right)}_{= 2\mathrm{Re}(a_0 \overline{a_\ell} \overline{w}^\ell) =: \alpha \in \mathbb{R}} t^\ell + t^{\ell+1} \cdot \underbrace{q(t)}_{\in \mathbb{R}[t]}$$

$$= \alpha t^\ell + t^{\ell+1} q(t) \geq 0$$

$t > 0$:
$$\Rightarrow \quad \alpha + t \cdot q(t) \geq 0$$

$t \searrow 0$:
$$\Rightarrow \quad \alpha \geq 0$$

aber für $a_0 \overline{a_\ell} = v_0 e^{i\varphi_0}$ setze $\overline{w}^\ell = e^{i(-\varphi_0 + \pi)}$, d.h. $w = e^{i\frac{\pi - \varphi_0}{\ell}}$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}\left(a_0 \overline{a_\ell} \overline{w}^\ell\right) = \mathrm{Re}\left(v_0 e^{i\varphi_0 - \varphi_0 + \pi}\right) = \mathrm{Re}\left(v_0 e^{i\pi}\right)$$

$$= -v_0 < 0 \quad \lightning \quad \Delta \quad \square.$$

MSS Kor. (Jordansche Normalform für endlichdimensionale komplexe Vektorräume): Sei V ein Vektorraum über $K = \mathbb{C}$, $f: V \to V$ lin. Dann kann die Darst.matrix von f immer auf Jordansche Normalform gebracht werden.

Bew.: $\chi_f(z) \in \mathbb{C}[z]$ ist komplexes, normiertes, nicht konstantes Polynom, das nach dem FdA in Faktoren von Linearfaktoren zerfällt. Nach Satz 11.2 kann die Darst.matrix auf JNF gebracht werden. $\square$

s. 12.16 (13)

MSS Kor. (Reelle Jordansche Normalform für endlichdimensionale reelle Vektorräume): Sei V ein Vektorraum über $K = \mathbb{R}$, $f: V \to V$ lin. Dann kann die Darst.matrix von f auf folgende reelle Jordansche Normalform gebracht werden:

$$DA_J(f) = \mathrm{diag}(J_1, \dots, J_k), \quad J_i = \begin{cases} \mathrm{diag}\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}, \lambda_i \in \mathbb{R}, \text{ oder} \\ \mathrm{diag}\begin{pmatrix} \Delta_i & I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ & & & \Delta_i \end{pmatrix}, \Delta_i := \begin{pmatrix} \alpha_i & -\beta_i \\ \beta_i & \alpha_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \beta_i > 0 \end{cases}$$

(111)

Bew.: Sei $B = \{v_i\}_{i=1}^n$ eine Basis von V, $V' = \langle B \rangle_{\mathbb{C}} = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i : \alpha_i \in \mathbb{C} \right\}$,
$f' : V' \to V'$, $v' = \sum_{i=1}^n x_i v_i \mapsto \sum_{i=1}^n x_i f(v_i)$ die komplexe Erweiterung von
V, f. Dann ist $\exists A_B(f) = \exists A_B(f') \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\chi_f(z) = \chi_{f'}(z) \in \mathbb{R}[z] \subseteq \mathbb{C}[z]$
$\overset{\text{FdA}}{\Rightarrow} \chi_f(z) = \chi_{f'}(z) = \prod_{\lambda \in \Delta(f')} (z - \lambda)$

Sei $\Delta(f') = \underbrace{\Delta_{\mathbb{R}}(f')}_{= \Delta(f') \cap \mathbb{R} = \Delta(f')_{\mathbb{R}}} + \underbrace{\Delta_{\mathbb{C}}(f)}$

Beh. 1: $p(z) = (z-\lambda)^k q(z) \Rightarrow p(z) = (z-\lambda)^k (z-\overline{\lambda})^k q'(z)$.

Beg.: $p(z) = (z-\lambda)^k q(z)$
$\Rightarrow p(\overline{z}) = \overline{p(z)} = (z-\lambda)^k q(z) = (\overline{z} - \overline{\lambda})^k \cdot \overline{q}(\overline{z})$. $\diamondsuit$

Beh. 2: $\lambda \in \Delta_{\mathbb{C}}(f') \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \Delta_{\mathbb{C}}(f')$.

Beh. 3: $\{v_j\}_{j=0}^{\ell-1}$ Basis zu $\mathrm{Jblock}\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix} \Leftrightarrow \{\overline{v}_j\}_{j=0}^{\ell-1}$ Basis zu $\mathrm{Jblock}\begin{pmatrix} \overline{\lambda} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$.

Beh. 4: Sei $\lambda_i \in \Delta_{\mathbb{C}}(f')$ und $\{v_j\}_{j=0}^{\ell-1}$ Basis zum $\mathrm{Jblock}\begin{pmatrix} \lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i \end{pmatrix}$
von f', $V_i := \langle v_j \rangle_{j=0}^{\ell-1}$, $\overline{V_i} := \langle \overline{v}_j \rangle_{j=0}^{\ell-1}$.

$f_i' : V_i \oplus \overline{V_i} \to V_i \oplus \overline{V_i}$, $v' \mapsto f'(v')$,

$v_j^{i1} := \frac{1}{2}(v_j + \overline{v}_j)$, $j = 0, \dots, \ell-1$

$v_j^{i2} := -\frac{1}{2} i (v_j - \overline{v}_j)$, $j = 0, \dots, \ell-1$

$B_i := \{ v_{\ell-1}^{i1}, v_{\ell-1}^{i2}, \dots, v_0^{i1}, v_0^{i2} \}$

Dann gilt:

i) f_i' ist wohldef.

ii) $B_i \subseteq V$, d.h. B_i ist reell

iii) B_i ist eine Basis von $V_i \oplus \overline{V_i}$

iv) B_i ist lin. unabh. bzgl. $V = \mathbb{R}$.

Beg.:

i) V_i und $\overline{V_i}$ sind invariant.

ii) $v_j^{i1} = \frac{1}{2}(v_j + \overline{v}_j) = \mathrm{Re}\, v_j$

$v_j^{i2} = -\frac{1}{2} i (v_j - \overline{v}_j) = \mathrm{Im}\, v_j$

iii) $v_j = v_j^{i1} + i v_j^{i2} = \frac{1}{2}(v_j + \overline{v}_j) - \frac{1}{2} i^2 (v_j - \overline{v}_j)$

$\overline{v}_j = v_j^{i1} - i v_j^{i2} = \frac{1}{2}(v_j + \overline{v}_j) + \frac{1}{2} i^2 (v_j - \overline{v}_j)$.

iv) ✓ ◇

Teo. 5: $B_i A_{B_i}(f) = \begin{pmatrix} \Delta_i & I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \Delta_i & I_2 \\ & & & \Delta_i \end{pmatrix}$, $\Delta_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}$, $\lambda_i = \alpha_i + \beta_i i$

Dem.:

Sea $\lambda_i = \alpha_i + \beta_i i$

i) $j = 0$

$$f(v_0^{i1}) = A\left(\tfrac{1}{2}(v_0^i + \overline{v_0^i})\right) = \tfrac{1}{2}(Av_0^i + A\overline{v_0^i})$$
$$= \tfrac{1}{2}(\lambda_i v_0^i + \overline{\lambda_i}\,\overline{v_0^i}) = \mathrm{Re}(\lambda_i v_0^i)$$
$$= \alpha_i \mathrm{Re}\, v_0^i - \beta_i \mathrm{Im}\, v_0^i$$
$$= \alpha_i v_0^{i1} - \beta_i v_0^{i2}$$

$$f(v_0^{i2}) = A\left(-\tfrac{1}{2}i(v_0^i - \overline{v_0^i})\right) = -\tfrac{1}{2}i(Av_0^i - A\overline{v_0^i})$$
$$= -\tfrac{1}{2}i(\lambda_i v_0^i - \overline{\lambda_i}\,\overline{v_0^i}) = \mathrm{Im}(\lambda_i v_0^i)$$
$$= \beta_i \mathrm{Re}\, v_0^i + \alpha_i \mathrm{Im}\, v_0^i$$
$$= \beta_i v_0^{i1} + \alpha_i v_0^{i2}$$

ii) $j \geq 1$

$$f(v_j^{i1}) = A\left(\tfrac{1}{2}(v_j^i + \overline{v_j^i})\right) = \tfrac{1}{2}(Av_j^i + A\overline{v_j^i})$$
$$= \tfrac{1}{2}(\lambda_i v_j^i + v_{j-1}^i + \overline{\lambda_i}\,\overline{v_j^i} + \overline{v_{j-1}^i})$$
$$= \tfrac{1}{2}(\lambda_i v_j^i + \overline{\lambda_i}\,\overline{v_j^i}) + \tfrac{1}{2}(v_{j-1}^i + \overline{v_{j-1}^i})$$
$$= \alpha_i v_j^{i1} - \beta_i v_j^{i2} + v_{j-1}^{i1}$$

$$f(v_j^{i2}) = A\left(-\tfrac{1}{2}i(v_j^i - \overline{v_j^i})\right) = -\tfrac{1}{2}i(Av_j^i - A\overline{v_j^i})$$
$$= -\tfrac{1}{2}i(\lambda_i v_j^i - \overline{\lambda_i}\,\overline{v_j^i}) - \tfrac{1}{2}i(v_{j-1}^i - \overline{v_{j-1}^i})$$
$$= \beta_i v_j^{i1} + \alpha_i v_j^{i2} + v_{j-2}^{i2}. \quad \square$$

M. 56 Esp (Reales) (UNT): Ver Esp. del Prop 11.17.

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3/2 & 1 & 1 & 0 \\ -1/4 & 3/2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1/4 & 3/2 \end{array}\right), \quad \chi_A(\lambda) = \left[\lambda - \left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{i}{2}\right)\right]^2 \left[\lambda - \left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{i}{2}\right)\right]^2$$

Ver Prop 11.17

$$A - \left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{i}{2}\right) I_4 = \begin{pmatrix} -i/2 & 1 & 1 & 0 \\ -1/4 & +i/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1/4 & -i/2 \end{pmatrix}, \quad \ker\left(A - \left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{i}{2}\right) I_4\right) = \left\langle \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A - \left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{i}{2}\right) I_4 = \begin{pmatrix} i/2 & 1 & 1 & 0 \\ -1/4 & i/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1/4 & i/2 \end{pmatrix}, \quad \ker A - \left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{i}{2}\right) I = \left\langle \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

M3

$$\left[A-\left(\tfrac{3}{2}+\tfrac{i}{2}\right)\mathbb{1}_4\right]^2 = \begin{pmatrix} +1/2 & -i & +i & 2 \\ i/4 & -1/2 & +1/2 & i \\ 0 & 0 & -1/2 & -i \\ 0 & 0 & i/4 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \ker\left(A-\left(\tfrac{3}{2}+\tfrac{i}{2}\right)\mathbb{1}_4\right) = \left\langle \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\ker\left[A-\left(\tfrac{3}{2}-\tfrac{i}{2}\right)\mathbb{1}_4\right] = \left\langle \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Wähle $v_0^{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker\left[A-\left(\tfrac{3}{2}+\tfrac{i}{2}\right)\mathbb{1}_4\right]^2 \setminus \ker\left[A-\left(\tfrac{3}{2}+\tfrac{i}{2}\right)\mathbb{1}_4\right]$

$$\left[A-\left(\tfrac{3}{2}+\tfrac{i}{2}\right)\mathbb{1}_4\right]\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1^{11}$$

$$\Rightarrow \quad v_0^{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1^{12} = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \left[\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\Rightarrow B_1 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$\Rightarrow \quad {}_{B_1}A_{B_1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4_{B_1} & \xrightarrow{A'} & \mathbb{R}^4_{B_1} \\ {\scriptstyle B_1}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle B_1} \\ \mathbb{R}^4_E & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^4_E \end{array}$$

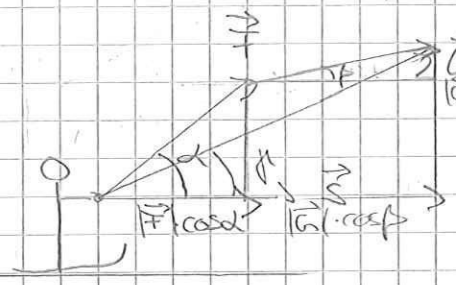
$$A = B_1 A' B_1^{-1}$$

$$\hookrightarrow B_1^{-1} A B_1 = A'$$

5.12.16

12. Vektorräume mit Skalarprodukt

12.1 Bsp. (Physikalische Motivation des Skalarproduktes):



Arbeit = Kraft in Bewegungsrichtung · Weg

$= |\vec{F}| \cdot \cos\alpha \cdot |\vec{s}|$

$= |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\alpha$

$=: \vec{F} \cdot \vec{s}$ Skalarprodukt

Folgerungen:

i) $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$: $\vec{F}\cdot\vec{G} = |\vec{F}|\cdot|\vec{s}|\cos(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$ $\vec{F}, \vec{s}$ orthogonal

ii) $\vec{F} = \vec{s} \neq 0$: $\vec{F}\cdot\vec{F} = |\vec{F}||\vec{F}|\cos 0 = |\vec{F}|^2 \geq 0$ positiv definit (wenn $\vec{F} \neq 0$)

iii) $\vec{F} = 0$: $\vec{F}\cdot\vec{s} = |\vec{0}|\,|\vec{s}|\cdot\cos\alpha = 0$

iv) $\vec{F} \leftrightarrow \vec{G}$: $\vec{s}\cdot\vec{F} = |\vec{s}||\vec{F}|\cdot\cos\alpha = \vec{F}\cdot\vec{s}$ Kommutativität

v) $\lambda\vec{F}$, $\lambda\in\mathbb{R}$: $(\lambda\vec{F})\cdot\vec{s} = |\lambda\vec{F}||\vec{s}|\cdot\cos\alpha$

(mit $\mathbb{R}\geq 0$) $= \lambda|\vec{F}|\cdot|\vec{s}|\cos\alpha = \lambda\vec{F}\cdot\vec{s}$ Homogenität

vi) $\vec{F}+\vec{G}$: $(\vec{F}+\vec{G})\cdot\vec{s} = |\vec{F}+\vec{G}||\vec{s}|\cos\varphi = (|\vec{F}|\cos\alpha + |\vec{G}|\cos\beta)\cdot|\vec{s}|$

$= |\vec{F}||\vec{s}|\cos\alpha + |\vec{G}||\vec{s}|\cos\beta = \vec{F}\cdot\vec{s} + \vec{G}\cdot\vec{s}$ Additivität

vii) $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, $\vec{G} = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$: $\vec{F}\cdot\vec{G} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i e_i\right)$

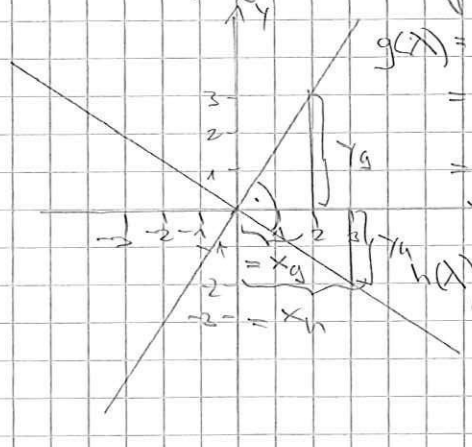
$= \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j \underbrace{e_i\cdot e_j}_{\begin{cases} 0, i\neq j & \text{nach i)} \\ |e_i|^2, & \text{nach ii)} \end{cases}}$

$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i |e_i|^2$

$|e_i| = 1$: $= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ Standard-Skalarprodukt

viii) $|\vec{F}\cdot\vec{s}|$: $|\vec{F}\cdot\vec{s}| = |\vec{F}||\vec{s}||\cos\alpha| \leq |\vec{F}||\vec{s}|$ Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

12.2 Bsp. (Elementargeometrische Motivation des Skalarproduktes im $\mathbb{R}^2$):



$g \perp h \Leftrightarrow m_g \cdot m_h = -1$

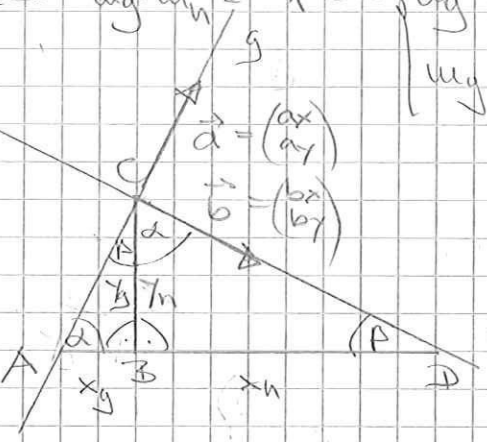
$\Leftrightarrow \frac{y_g}{x_g}\cdot\frac{y_h}{x_h} = -1$

$\Leftrightarrow x_g x_h = -y_g y_h$

$\Leftrightarrow x_g x_h + y_g y_h = 0$.

Bem 1: $g \perp h \Leftrightarrow m_g \cdot m_h = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} m_g = -\frac{1}{m_h}, & m_h \neq 0 \\ m_g = \pm\infty, & m_h = 0 \end{cases}$.

Beweis:



$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ Innenwinkelsatz

$\triangle ABC$, $\triangle BCD$ ähnlich

$$\Rightarrow \frac{x_g}{y_h} = \frac{y_g}{x_h}$$

$$= m_g \quad = -m_h$$

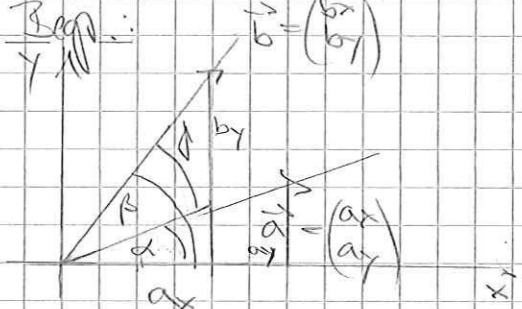
$$\Rightarrow m_g = -\frac{1}{m_h}. \quad \diamond$$

Bem 2: $\vec{a}, \vec{b} \perp \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y = 0$

Beweis: $g(\lambda) = \lambda \vec{a}$, $h(\lambda) = \lambda \vec{b}$ $\overset{\text{Bem 1}}{\Rightarrow}$ $m_g = -\frac{1}{m_h} \Leftrightarrow \frac{a_x}{a_y} = -\frac{1}{\frac{b_x}{b_y}} = -\frac{b_y}{b_x}$. $\diamond$

Bem 3: $a_x b_x + a_y b_y = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos\varphi$

Beweis:



$\Leftrightarrow \varphi = \beta - \alpha$

$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha$, $a_y = |\vec{a}| \sin\alpha$

$b_x = |\vec{b}| \cos\beta$, $b_y = |\vec{b}| \cdot \sin\beta$

$$\Rightarrow a_x b_x + a_y b_y = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\alpha \cos\beta + |\vec{a}||\vec{b}| \sin\alpha \sin\beta$$

$$= |\vec{a}||\vec{b}| \underbrace{\cos(\alpha - \beta)}_{=\cos(\beta - \alpha)}$$

$$= |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi. \quad \diamond$$

P3 Def (Skalarprodukt, Euklidischer Vektorraum): Sei V ein reeller Vektorraum (also $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Dann heißt eine Abb.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

Skalarprodukt, wenn gilt:

i)	$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$	$\forall v, w \in V$	Kommutativität
ii)	$\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$	$\forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$	Homogenität
iii)	$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$	$\forall u, v, w \in V$	Assoziativität
iv)	$\langle v, v \rangle > 0$	$\forall v \in V \setminus \{0\}$	Pos. Definitheit

Cauchy-/Schwarz:

v) $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Euklidischer Vektorraum

vi) $\langle v,w\rangle = 0$ — v,w orthogonal

vii) $\sqrt{\langle v,v\rangle} =: \|v\|$ (durch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte) Norm von V

viii) $\left\|\frac{v}{\|v\|}\right\| = 1$ — V normiert

12.4 Bsp (Skalarprodukt):

i) $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(v,w) \mapsto v^T w$ — Standard Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

$= \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n v_i w_i$

$\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \sqrt{\langle v,v\rangle}$ — Euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$

$= \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$

ii) $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(v,w) \mapsto v^T \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} v =: v^T A v$

Bem.: $\langle v,w\rangle = v^T A w$ def. ein Skalarprodukt (12.3 i)-iii) ✓ iv):

Beweis: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} =: B A B^{-1} = B A \frac{B^T}{\det B}$

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{B^{-1}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{B} \mathbb{R}^2$, $E \to E \to E$

$\Rightarrow v^T A v = v^T B A' B^T v / \det B$

$= (B^T v)^T A' (B^T v) / \det B$, $B^T v =: v'$

$= v'^T A' v' = (v'_1)^2 + 2(v'_2)^2 > 0 \quad \forall v' \neq 0$ ($v' \neq 0 \Leftrightarrow v \neq 0$)

iii) $\langle\cdot,\cdot\rangle : C^0[a,b] \times C^0[a,b] \to \mathbb{R}$, $(f,g) \mapsto \int_a^b f(x)g(x)\,dx$

Bem.: $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ def. ein Skalarprodukt

Beweis: (12.3 i)-iii) ✓ iv):

$\langle f,f\rangle = \int_a^b (f(x))^2\,dx > 0 \quad \forall f \neq 0$ ✓ ◇.

iv) $U \subseteq_{\mathbb{R}} V$ UnterVektorraum des euklid. Vektorraums V

$\langle\cdot,\cdot\rangle : U \times U \to \mathbb{R}$, $(v,w) \mapsto \langle v,w\rangle$ ($(v,w) \in U^2$; $\langle v,w\rangle$ Skalarprodukt in V)

Bem.: $\langle\cdot,\cdot\rangle$ def. ein Skalarprodukt in U

Beweis: ✓ ◇

D.5 Kor. (Rechenregeln für die Norm): Sei V ein euklid. Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Für die durch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Norm $\|\cdot\|$ gilt:

i) $\|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|$

ii) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Bew.:

i) $\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v,v\rangle} = |\lambda| \|v\|$.

ii) "$\Rightarrow$": $\|v\| = 0$. Ann.: $v \neq 0 \Rightarrow \|v\|^2 = \langle v,v\rangle > 0 \Rightarrow \|v\| = 0$ ↯.

"$\Leftarrow$": $v = 0 \Rightarrow \|v\| = \|0\| = \|0 \cdot 0\| = 0 \cdot \|0\| = 0$. □ (50) (16) p.12

2.6 Satz (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung): Sei V ein euklidischer Vektorraum. Dann gilt:

i) $|\langle v,w\rangle| \leq \|v\| \|w\|$

ii) $|\langle v,w\rangle| = \|v\| \|w\| \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}: tv = w \Leftrightarrow v,w$ lin. abh.

Bew.: Für $v = 0$ ✓. Sei $v \neq 0$ und $t \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt:

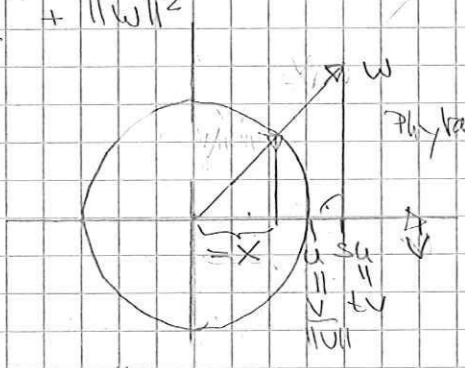
$$0 \leq \|tv - w\|^2 = \langle tv - w, tv - w\rangle$$
$$= t^2 \|v\|^2 - 2t\langle v,w\rangle + \|w\|^2$$

Mit $t = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|^2}$ folgt weiter

$$0 \leq \frac{\langle v,w\rangle^2}{\|v\|^4} \|v\|^2 - 2\frac{\langle v,w\rangle^2}{\|v\|^2} + \|w\|^2$$
$$= -\frac{\langle v,w\rangle^2}{\|v\|^2} + \|w\|^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\langle v,w\rangle^2}{\|v\|^2} = \|w\|^2$$
$$\Leftrightarrow \langle v,w\rangle^2 = \|v\|^2 \|w\|^2$$

und $0 = \|tv - w\|^2 \Leftrightarrow tv = w$. □



Bem.: Hat man $x = \langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|}\rangle$

$\Rightarrow \frac{s}{\|w\|} = x \Rightarrow s = \|w\| x$

$s = t\|v\| \Rightarrow t = \frac{\|w\|}{\|v\|} \langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|}\rangle = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|^2}$.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt.

2.7 Def. (Winkel zwischen zwei Vektoren im euklidischen VRaum):

Sei V ein euklidischer VRaum mit Skalarprodukt $\langle \cdot,\cdot\rangle$, $v,w \in V \setminus \{0\}$.

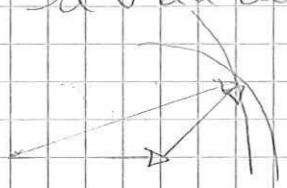
Dann heißt

$\angle(v,w) := \arccos \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\|w\|}$ Winkel zwischen v und w

Bem.: Wegen $|\langle v,w\rangle| \overset{\text{CSU}}{\leq} \|v\|\|w\| \Leftrightarrow \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\|w\|} \in [-1,1]$

ist $\angle(v,w)$ wohldef.

2.8 Kor. (Δ-Ungleichung für die Norm): Sei V ein euklid. $\mathbb{R}$-Raum. Dann gilt



i) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

ii) $\|v+w\| = \|v\| + \|w\| \Leftrightarrow |\langle v,w\rangle| = \|v\|\|w\| \Leftrightarrow \angle(v,w) = 0$

Bew.:

i) $\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \underbrace{\langle v,v\rangle}_{=\|v\|^2} + 2\underbrace{\langle v,w\rangle}_{\overset{CSU}{\leq}\|v\|\|w\|} + \underbrace{\langle w,w\rangle}_{=\|w\|^2}$

$\overset{(*)}{\leq} \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$.

ii) (*) hält mit $= \Leftrightarrow \langle v,w\rangle = \|v\|\cdot\|w\| \Leftrightarrow \angle(v,w) = 0$ □

2.9 Satz (Kosinussatz, Satz des Pythagoras): In ΔABC mit Innenwinkeln α, β, γ und Seiten $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ gilt:

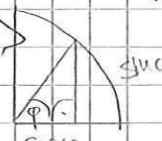


i) $a^2 + b^2 = c^2 - 2ab\cos\gamma$

ii) $a^2 + b^2 = c^2$, falls $\gamma = \frac{\pi}{2}$, i.w.s.

iii) $(\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1 \quad \forall\, \varphi \in [0, 2\pi]$.

Bew.: Mit $u = \overrightarrow{CA}$, $v = \overrightarrow{CB}$, $w = \overrightarrow{AB}$ ist $\gamma = \angle(u,v)$. Dann gilt:

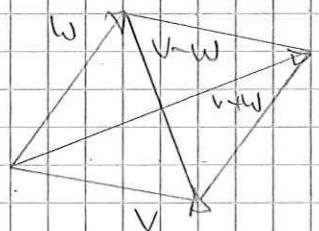


$\|w\|^2 = \|v-u\|^2 = \langle v-u, v-u\rangle = \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle$

$= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\gamma$. □

2.10 Satz (Parallelogrammgleichung): In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der vier Seiten gleich der Summe der Quadrate über den Diagonalen.

Bew.: Sei das Parallelogramm von den Vektoren v, w aufgespannt.



Dann gilt:

$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle + \langle v-w, v-w\rangle$

$= 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 + 2\langle v,w\rangle - 2\langle v,w\rangle = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$. □

2.11 Satz (Handwerkerregel): Ein Parallelogramm ist ein ... Rechteck genau dann, wenn die Diagonalen gleich lang sind.

Bew.:

$\|v+w\| = \|v-w\| \Leftrightarrow 2\langle v,w\rangle = -2\langle v,w\rangle \Leftrightarrow \langle v,w\rangle = 0$. □

12.12 Satz (Additionstheoreme): Es gilt:

i) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \forall \alpha,\beta \in [0,\pi]$, IR

ii) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \quad \forall \alpha,\beta \in [0,\pi]$, IR

Bew.:

ii) $v = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}\cos\beta\\ -\sin\beta\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \angle(v,w) = \begin{cases} 2\pi-(\alpha+\beta) \\ \alpha+\beta \end{cases}$

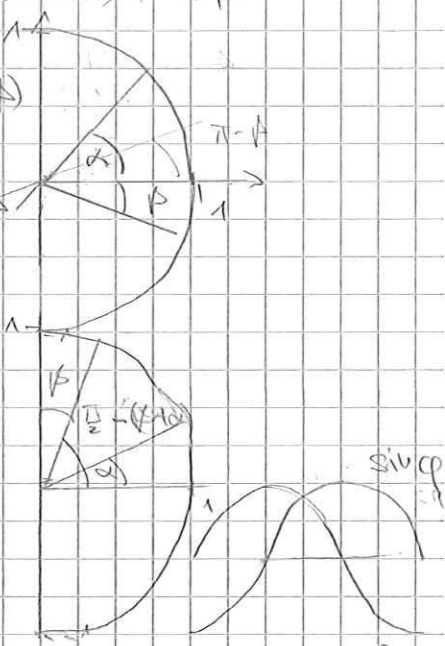
$\Rightarrow \langle v,w\rangle = \|v\|\|w\|\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

i) $v = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}\cos(\frac{\pi}{2}-\beta)\\ \sin(\frac{\pi}{2}-\beta)\\ (\alpha+\beta)-\frac{\pi}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\beta\\ \cos\beta\end{pmatrix}$

$\angle(v,w) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}-\beta-\alpha = \frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta) \end{cases}$

$\Rightarrow \langle v,w\rangle = \|v\|\|w\|\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right] = \sin(\alpha+\beta)$

$= \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$. □



12.13 Def (Orthogonales Komplement):

Sei V ein euklid. VRaum, $u,v \in V$, $U \subseteq_D V$ ein (euklidischer) UVR von V.

i) $u \perp v :\Leftrightarrow \langle u,v\rangle = 0 \Leftrightarrow u,v$ orthogonal $\Leftrightarrow u$ steht senkrecht auf v.

ii) $U^\perp := \{v \in V : v \perp u \ \forall u \in U\}$ orthogonales Komplement von U

12.14 Satz (Orthogonales = Komplement): Sei V ein euklid. VRaum, $X,Y \subseteq V$ Teilmengen von V. Dann gilt:

i) $X^\perp$ ist ein (abgeschlossener) UVR von V.

ii) $X \subseteq Y \Rightarrow Y^\perp \subseteq X^\perp$

iii) $X^\perp = \langle X\rangle^\perp$

iv) $X \subseteq X^{\perp\perp}$

v) $X^\perp = X^{\perp\perp\perp}$

Bew.:

i) $0 \perp x \ \forall x \in X \Rightarrow 0 \in X^\perp \neq \emptyset$

$v \in X^\perp \Leftrightarrow \langle v,x\rangle = 0 \ \forall x \in X \Leftrightarrow \langle \lambda v, x\rangle \ \forall x \in X \Leftrightarrow \lambda v \in X^\perp$

$v,w \in X^\perp \Leftrightarrow \langle v,x\rangle = \langle w,x\rangle = 0 \ \forall x \in X \Leftrightarrow \langle v+w,x\rangle = 0 \ \forall x \in X \Rightarrow v+w \in X^\perp$

ii) $v \in Y^\perp \Leftrightarrow \langle v,y\rangle = 0 \ \forall y \in Y \Rightarrow \langle v,x\rangle = 0 \ \forall x \in X \Rightarrow v \in X^\perp$

iii) $\langle X\rangle^\perp \subseteq X^\perp$; ii) ✓

$X^\perp \subseteq \langle X\rangle^\perp$: $v \in X^\perp \Leftrightarrow \langle v, x\rangle = 0 \ \forall x \in X$

$\Rightarrow \langle v, \sum \alpha_i x_i\rangle = 0 \ \forall \sum \alpha_i x_i \in \langle X\rangle \Rightarrow v \in \langle X\rangle^\perp$.

iv) $x \in X \Rightarrow \langle v, x\rangle = 0 \ \forall v \in X^\perp \Rightarrow x \in X^{\perp\perp}$

v) $X^{\perp\perp\perp} \subseteq X^\perp$: iv) $X \subseteq X^{\perp\perp}$

$X^\perp \subseteq X^{\perp\perp\perp}$: iv) $X^\perp \subseteq (X^\perp)^{\perp\perp} = X^{\perp\perp\perp}$. □

← 12.15

14.12.16

(28)

12.16 Def. (Orthonormalsystem, Orthonormalbasis): Sei V ein euklidisches Vektorraum.

i) $\{v_i\}_{i=1}^k$ heißt Orthonormalsystem (ONS) von V, wenn gilt

$$\langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad i,j = 1,\dots,k,$$

d.h. $\|v_i\| = 1$, $i = 1,\dots,k$ und $v_i \perp v_j$ $\forall i \neq j$.

ii) $\{v_i\}_{i=1}^k$ heißt Orthonormalbasis von V (ONB), wenn $\{v_i\}_{i=1}^k$ ein ONS ist und $k = \dim V$ gilt.

12.17 Satz (Lin. Unabh. von Orthonormalsystemen): Ein Orthonormalsystem ist lin. unabh.

Bew.: Sei $\{v_i\}_{i=1}^k$ ein ONS. Ann.: $\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = 0$. ($\alpha_i$: Koordinaten von 0 bzgl. $\{v_i\}$)

$$\Rightarrow 0 = \langle v_j, \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i\rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i \underbrace{\langle v_j, v_i\rangle}_{=\begin{cases}0, & i \neq j \\ 1, & i = j\end{cases}} = \alpha_j, \quad j = 1,\dots,k. \ \square$$

12.18 Satz (Koordinaten bzgl. einer Orthonormalbasis) (und Def.): Sei V ein endl. VRaum mit ONB $B = \{v_i\}_{i=1}^n$. Dann gilt:

i) $v = \sum_{i=1}^n \underbrace{\langle v, v_i\rangle}_{\text{Koordinate von } v \text{ bzgl. } v_i \in \text{ONB } B} v_i \quad \forall v \in V$

ii) $\left.\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \\ w &= \sum_{i=1}^n \beta_i v_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow \langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\begin{pmatrix}\beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n\end{pmatrix}$ (*)

Bew.:

i) $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \Rightarrow \langle v, v_i\rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, v_i\rangle = \alpha_i$.

ii) Nachrechnen. □

(*) d.h. man berechnet das Skalarprodukt zweier Vektoren als Standardskalarprodukt der Koordinatendarstellungen bzgl. einer ONB.

12.19 Bsp. (ONB):

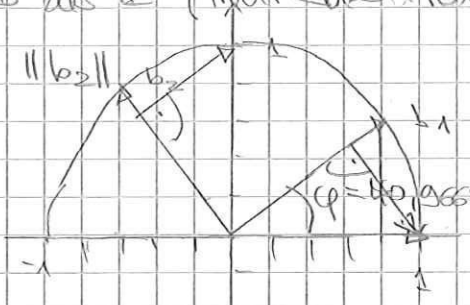
i) $\{e_i\}_{i=1}^{4}$ ist eine ONB von $\mathbb{R}^4$

ii) $\{b_i\}_{i=1}^{2} = \left\{ \left(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}\right)^T, \left(-\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}\right)^T \right\}$ ist eine ONB des $\mathbb{R}^2$ (mit Std.S.Prod.)

$\|b_1\| \overset{12.12 ii)}{=} \sqrt{\left(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}\right)\begin{pmatrix}4/5\\3/5\end{pmatrix}} = \sqrt{\tfrac{16}{25} + \tfrac{9}{25}} = 1 = \|b_2\|$

$\langle b_1, b_2 \rangle = \left(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}\right)\begin{pmatrix}-3/5\\4/5\end{pmatrix} = -\tfrac{12}{25} + \tfrac{12}{25} = 0$

$b_1 = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$



Darstellung von e_i bzgl. b_1, b_2:

$\langle e_1, b_1 \rangle = \tfrac{4}{5}, \quad \langle e_1, b_2 \rangle = -\tfrac{3}{5} \Rightarrow e_1 = \tfrac{4}{5}\begin{pmatrix}4/5\\3/5\end{pmatrix} - \tfrac{3}{5}\begin{pmatrix}-3/5\\4/5\end{pmatrix}$ (vgl. Fadenkreuz)

$\langle e_2, b_1 \rangle = \tfrac{3}{5}, \quad \langle e_2, b_2 \rangle = \tfrac{4}{5} \Rightarrow e_2 = \tfrac{3}{5}\begin{pmatrix}4/5\\3/5\end{pmatrix} + \tfrac{4}{5}\begin{pmatrix}-3/5\\4/5\end{pmatrix}$ (" ")

iii) $\{b_i\}_{i=1}^{3} = \left\{ \tfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\}$ ist eine ONB des $\mathbb{R}^3$ (mit Std.S.Prod.)

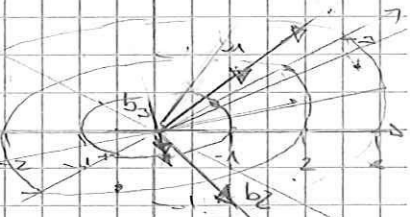
$$B = (b_i)_{i=1}^{3} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^T B = \langle b_i, b_j \rangle_{i,j=1}^{3} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_3$$

Darst. von $v = (1,2,3)^T$ bzgl. $\{b_i\}$:

$$B^T v = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/\sqrt{3} \\ -3/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v = B\begin{pmatrix} 6/\sqrt{3} \\ -3/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$



iv) $\left\{ \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \cos(kx), \sin(kx) \right\}_{k=1}^{\infty}$ ist eine ONS von $\left\{ f \in \mathcal{C}^1[-\pi,\pi] : f(-\pi) = f(\pi) \right\}$
2π-periodisch, stetig diff'bare Fkten

mit $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx$

Bew.: $\cos(kx)\cos(\ell x) = \tfrac{1}{2}\cos[(k+\ell)x] + \tfrac{1}{2}\cos[(k-\ell)x]$

$\sin(kx)\sin(\ell x) = \tfrac{1}{2}\cos[(k-\ell)x] - \tfrac{1}{2}\cos[(k+\ell)x]$ $\quad \forall\, k,\ell \in \mathbb{N}_0$

$\sin(kx)\cos(\ell x) = \tfrac{1}{2}\sin[(k+\ell)x] + \tfrac{1}{2}\sin[(k-\ell)x]$

Bem.: Nachrechnen mit Add.theoremen $\Rightarrow$

Bew.2: $\langle \cos(kx), \cos(\ell x) \rangle = \begin{cases} 2, & k=\ell=0 \\ 1, & k=\ell\neq 0 \\ 0, & k\neq\ell \end{cases} \quad k,\ell \in \mathbb{N}_0$ (Euler-Fourier-Formeln)

$\langle \sin(kx), \sin(\ell x) \rangle = \begin{cases} 1, & k=\ell\neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad k,\ell \in \mathbb{N}_0$

$\langle \sin kx, \cos(\ell x) \rangle = 0, \quad \forall\, k,\ell \in \mathbb{N}_0$

Beh.:
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(lx)\,dx = \begin{cases}2, & k=l=0\\ 1, & k=l\neq 0\\ 0, & k\neq l\end{cases}$$

Add.th.
$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos[(k+l)x]\,dx}_{=\begin{cases}0, & \text{falls } k+l>0\\ 1, & \text{falls } k=l=0\end{cases}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos[(k-l)x]\,dx}_{=\begin{cases}0, & \text{falls } k\neq l\\ 1, & \text{falls } k=l\end{cases}}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\sin(lx)\,dx$$

Add.th.
$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos[(k-l)x]\,dx}_{=\begin{cases}0, & \text{falls } k\neq l\\ 1, & \text{falls } k=l\end{cases}} - \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos[(k+l)x]\,dx}_{=\begin{cases}0, & \text{falls } k+l>0\\ 1, & \text{falls } k=l=0\end{cases}} = \begin{cases}1, & k=l\neq 0\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(lx)\,dx$$

Add.th.
$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin[(k+l)x]\,dx}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin[(k-l)x]\,dx}_{=0} = 0 \quad \diamondsuit$$

Darstellung von f bzgl. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(kx), \sin kx\right\}$:

$$a_0' := \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, f\right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}f(x)\,dx$$

$$a_0 := \sqrt{2}\,a_0' \quad\Rightarrow\quad a_0'\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a_0}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a_k := \langle \cos(kx), f(x)\rangle, \quad b_k := \langle \sin(kx), f(x)\rangle \quad k\in\mathbb{N}$$

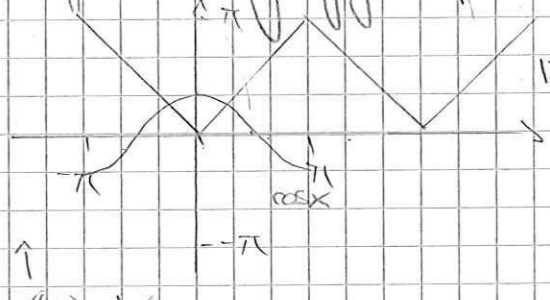
Fourier-koeff. von f

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right]$$ Fourierreihe von f

Satz (von Dirichlet [1829]): Die Fourierreihe einer stetig diffbaren 2π-periodischen Funktion f konvergiert gleichmäßig gegen f.

Anwendung: Dreiecksschwingung:

$f: [-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, x\mapsto |x|$.



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx = \pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos(kx)\,dx$$

Part.int.
$$= \frac{2}{\pi}\left[\underbrace{\frac{x}{k}\sin kx\Big|_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi}\frac{1}{k}\sin(kx)\,dx\right]$$

$$= +\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{k^2}\cos kx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2}\underbrace{\left[\cos(k\pi)-1\right]}_{=\begin{cases}-2, & k \text{ ungerade}\\ 0, & k \text{ gerade}\end{cases}} = \begin{cases}-4/k^2\pi, & k \text{ ungerade}\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{|x|}_{\text{gerade}}\underbrace{\sin kx}_{\text{ungerade}}\,dx = 0, \quad k\in\mathbb{N}$$

Satz von Dirichlet
$$\Rightarrow |x| = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\cos[(2k-1)x]$$

12.16 Def. (Folgerung, Orthogonalsystem): Sei V ein euklid. $\mathbb{K}$-Raum. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

iii) $\{v_i\}_{i=1}^k$ heißt Orthogonalsystem (OGS), wenn gilt

$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \iff v_i \perp v_j \quad \forall i \neq j$

ii) $\{v_i\}_{i=1}^k$ heißt Orthonormalsystem (ONS), wenn $\{v_i\}_{i=1}^k$ ein OGS und $\|v_i\| = 1 \quad \forall i$

12.20 Satz (Gram-Schmidt-Verfahren, Schmidt [1907], Gram [1883], Laplace [1812], Cauchy [1837, 1847], ...): Sei $\{v_i\}_{i=1}^k$ beliebig, aber fest, linear unabh. Folge in einem euklid. $\mathbb{K}$-Raum V. Def. induktiv

$$a_j := v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, a_i \rangle}{\langle a_i, a_i \rangle} a_i \qquad \left(= v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle v_j, b_i \rangle b_i \right) \quad \text{Koordinaten bzgl. } b_i$$

$$b_j := a_j / \|a_j\| \qquad \left(\|a_i\|^2 \right)$$

$\Big\}$, $j = 1, \dots, k$

Dann ist $\{a_i\}_{i=1}^k$ ein OGS und $\{b_i\}_{i=1}^k$ ein ONS und $\langle v_i \rangle_{i=1}^k = \langle a_i \rangle_{i=1}^k = \langle b_i \rangle_{i=1}^k$.

Die Berechnung von $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ heißt (Gram-)Schmidtsches $\begin{Bmatrix} \text{OG} \\ \text{ON} \end{Bmatrix}$-Verfahren

Bew.:

a) $\{a_i\}_{i=1}^k$ ist ein OGS. Bew. durch Ind. über k.

Ind. Anf. $k = 1$: $a_1 = v_1$ ✓

Ind. Vor.: $\{a_i\}_{i=1}^k$ ist ein OGS

Ind. Schluß $k \to k+1$: $a_{k+1} := v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle v_{k+1}, a_j \rangle a_j / \|a_j\|^2$

$$\langle a_{k+1}, a_i \rangle = \langle v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle v_{k+1}, a_j \rangle a_j / \|a_j\|^2 , a_i \rangle$$

$$= \langle v_{k+1}, a_i \rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle v_{k+1}, a_j \rangle \underbrace{\langle a_j, a_i \rangle}_{\text{Ind. Vor.} = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ \|a_i\|^2, & j = i \end{cases}} / \|a_j\|^2$$

$$= \langle v_{k+1}, a_i \rangle - \langle v_{k+1}, a_i \rangle$$

$$= 0 \quad , \quad i = 1, \dots, k.$$

b) $\{b_i\}_{i=1}^k$ ist ein ONS. $\|b_i\| = \left\| a_i / \|a_i\| \right\| = \|a_i\| / \|a_i\| = 1 \quad , i = 1, \dots, k$

c) $\langle a_i \rangle_{i=1}^k = \langle v_i \rangle_{i=1}^k$ Bew. durch Ind. über k

Ind. Anf. $k = 1$: $\langle a_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$.

Ind. Vor.: $\langle a_i \rangle_{i=1}^k = \langle v_i \rangle_{i=1}^k$

Ind. Schluß $k \to k+1$:

$$a_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\langle v_{k+1}, a_j \rangle}_{\text{Ind. Vor.} \in \langle v_i \rangle_{i=1}^k} a_j / \|a_j\| \in \langle v_i \rangle_{i=1}^{k+1}$$

$$v_{k+1} = a_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \langle v_{k+1}, a_j \rangle a_j / \|a_j\|^2 \in \langle a_i \rangle_{i=1}^{k+1}.$$

d) $\langle a_i \rangle_{i=1}^k = \langle b_i \rangle_{i=1}^k$ ✓ □

12.21 Kor. (Orthonormalisierung): In einem endl. dim. VR kann jedes {OGS, ONS} zu einer {OGB, ONB} ergänzt werden.

Bew.: Sei $\{v_i\}_{i=1}^k$ ein {OGS, ONS} von $V \Rightarrow \{v_i\}_{i=1}^k$ ist lin. unabh.
$\Rightarrow \{v_i\}_{i=1}^k$ kann zu einer Basis $\{v_i\}_{i=1}^n$ von V ergänzt werden.
Orthonormalisiere $\{a_i\}_{i=1}^n$ mit dem Schmidt'schen Satz 12.20:
$\Rightarrow \begin{cases} a_i = v_i \\ b_i = v_i \end{cases}$, $i = 1, \dots, k$, d.h. $\{v_1, \dots, v_k, a_{k+1}, \dots, a_n\}$ ist {OGB, ONB} von V. □

12.22 Kor. (orthogonales Komplement III): Sei V ein endl. dim. endl. VR, $U \subseteq_k V$ ein Unterraum, $v \in V$ beliebig. Dann gilt:

i) $V = U \oplus U^\perp$ insbes. dann $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$
ii) $\exists!\, u \in U, w \in U^\perp : v = u + w$ d.h. v läßt sich bzgl. U und $U^\perp$ eindeutig darstellen.
iii) $U = U^{\perp\perp}$



Bew.:

i) Sei $\{u_i\}_{i=1}^k$ ONB von U, ergänze zu ONB $\{u_i\}_{i=1}^n$ von V
$\Rightarrow u_j \in U^\perp \quad \forall j = k+1, \dots, n$
Sei $v \in V$ beliebig $\Rightarrow v = \underbrace{\sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle u_i}_{\in U} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^n \langle v, u_i \rangle u_i}_{\in U^\perp}$

ii) Sei $v = u + w$, $u \in U$, $w \in U^\perp$.
$$\Rightarrow \begin{cases} u = \sum_{i=1}^k \langle u, u_i \rangle u_i = \sum_{i=1}^k \langle u+w, u_i \rangle u_i = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i \\ w = \sum_{i=k+1}^n \langle w, u_i \rangle u_i = \sum_{i=k+1}^n \langle u+w, u_i \rangle u_i = \sum_{i=k+1}^n \langle v, u_i \rangle u_i \end{cases}$$

iii) $U \subseteq U^{\perp\perp}$ (aus Satz 12.14 i/ii)
$V = U^\perp \oplus U^{\perp\perp} \Rightarrow \dim U^{\perp\perp} = \dim U$. □

und Kor.

12.23 Def. (Orth. Projektion): Sei V ein endl. dim. endl. VR, $U \subseteq_k V$ ein Unterraum mit ONB $\{b_i\}_{i=1}^k$.

i) Sei $v = u + w$, $u \in U$, $w \in U^\perp$ (wie in 12.22)
$\pi_U(v) := u$ (orthogonale) Projektion von V auf U
$\pi_{U^\perp}(v) := w$ — " — $U^\perp$ — "

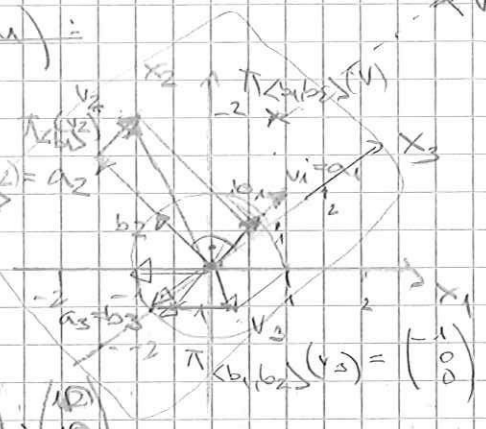
ii) $\pi_U(v) = \sum_{i=1}^k \langle v, b_i \rangle b_i$.

12.24 Bem. (praktisches Orthonormalisieren): Im Schmidt'schen Satz

$$a_i = v_i - \pi_{\langle b_1, \dots, b_{i-1} \rangle}(v_i), \quad i = 1, \dots, k$$

Bsp (Gram-Schmidt-Verfahren, orth. Projektion):

i) $V = \mathbb{R}^3$, $\{v_i\}_{i=1}^3 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$



$a_1 = v_1$

$b_1 = a_1/\|a_1\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$a_2 = v_2 - \langle v_2, b_1\rangle b_1 = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} - (-1,2,0)\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3/2\\3/2\\0\end{pmatrix}$

$b_2 = a_2/\|a_2\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$a_3 = v_3 - \langle v_3, b_1\rangle b_1 - \langle v_3, b_2\rangle b_2$

$= \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - (1,0,-1)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\frac{1}{2} - (1,0,-1)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\frac{1}{2}$

$= \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

$b_3 = a_3/\|a_3\| = a_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \{b_i\}_{i=1}^3 = \left\{ \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$ ONB von $\mathbb{R}^3$.

ii) Computergraphik. Sei unser 2D-Bildschirm $\langle b_1, b_2\rangle$ (aus i)).

Geg.: $v = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. Ges.: $\pi_{\langle b_1,b_2\rangle}(v)$.

$\pi_{\langle b_1,b_2\rangle}(v) = (1,2,3)\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} b_1 + (1,2,3)\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} b_2$

$= \frac{3}{\sqrt{2}} b_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} b_2$

Im Bildschirmkoordinaten sind $\begin{pmatrix}3/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

iii) $V = \mathcal{C}^0[-1,1]$, $\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx$

$\{v_i(x)\}_{i=1}^{\infty} = \{x^i\}_{i=0}^{\infty}$

$a_0(x) \equiv v_0(x) \equiv 1$

$\|a_0(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2$

$b_0(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{p_0(x)}_{p_0(1) \neq 1}$

$p_0(x) \equiv 1$

$a_1(x) = x - \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} x \, dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = x$

$\|a_1(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$, $\|a_1(x)\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$b_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x$

$p_1(x) = x$

$a_2(x) = x^2 - \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} x^2 dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}} x^3 dx \sqrt{\frac{3}{2}} x$

$= x^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^{1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} x^4 \Big|_{-1}^{1}$

$= x^2 - \frac{1}{3}$

$\|a_2(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} \left[x^2 - \frac{1}{3}\right]^2 dx = \int_{-1}^{1} \left[x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right] dx = \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{9}$

$= \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{18-10}{5\cdot 9} = \frac{8}{45}$, $\|a_2(x)\| = \sqrt{\frac{8}{45}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$

$b_2(x) = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)$

$p_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

$\vdots$

$b_3(x) = \sqrt{\frac{7}{2}}\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right)$

$p_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$

$p_i(x)$, $i = 0,1,2,\ldots$ heißen Legendre-Polynome

Man kann folgende Rekursionsformel zeigen:

$(n+1)p_{n+1}(x) = (2n+1)x\,p_n(x) - n\,p_{n-1}(x)$, $n = 1,2,\ldots$

iv) Ausgleichsrechnung

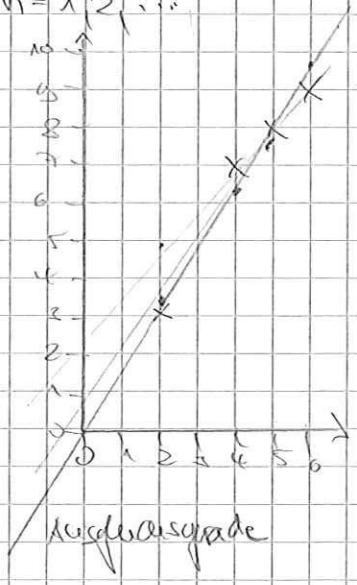
$\{p_i\}_{i=1}^{4} = \left\{\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x_i\\y_i\end{pmatrix}\right\}_{i=1}^{4}$

$y_i = \alpha x_i + \beta$?

$y = \alpha x + \beta \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3\\7\\8\\9\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\4\\5\\6\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow y \approx \alpha x + \beta \cdot 1$

$\Rightarrow T_{2,1,x}(y) = \alpha x + \beta \cdot 1$



$\{v_1, v_2\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\5\\6\end{pmatrix}\right\} = \{1, x\}$

$a_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\|a_1\|^2 = 4$, $\|a_1\| = 2$

$b_1 = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$

$a_2 = \begin{pmatrix}2\\4\\5\\6\end{pmatrix} - (2,4,5,6)\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\5\\6\end{pmatrix} - \frac{17}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9/4\\-1/4\\3/4\\7/4\end{pmatrix}$

$\|a_2\|^2 = \frac{81+1+9+49}{16} = \frac{140}{16} = \frac{70}{8} = \frac{35}{4}$, $\|a_2\| = \frac{\sqrt{35}}{2}$

$b_2 = \frac{2}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}-9/4\\-1/4\\3/4\\7/4\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{35}}(-9/2, -1/2, 3/2, 7/2)$

(46)

(47)

$$\pi_{\langle b_1,b_2\rangle}(y) = \langle y,b_1\rangle b_1 + \langle y,b_2\rangle b_2$$

$$= \langle y,a_1\rangle \frac{a_1}{\|a_1\|^2} + \langle y,a_2\rangle \frac{a_2}{\|a_2\|^2}$$

$$= \frac{\langle y,a_1\rangle}{\|a_1\|^2} \mathbb{1} + \frac{\langle y,a_2\rangle}{\|a_2\|^2}\left(X - \frac{17}{4}\mathbb{1}\right)$$

$$= \frac{(3,7,8,9)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{(3,7,8,9)\begin{pmatrix}-9/14\\-1/14\\3/14\\7/14\end{pmatrix}}{35/4}\left[\begin{pmatrix}2\\4\\5\\6\end{pmatrix} - \frac{17}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{27}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{4}{35}\cdot\frac{-27-7+24+63}{4}\left[\begin{pmatrix}2\\4\\5\\6\end{pmatrix} - \frac{17}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$= \left(\frac{27}{4} - \frac{53}{35}\cdot\frac{17}{4}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{53}{35}\begin{pmatrix}2\\4\\5\\6\end{pmatrix}$$

$$= \frac{35\cdot 27 - 53\cdot 17}{4\cdot 35}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{53}{35}\begin{pmatrix}2\\4\\5\\6\end{pmatrix}$$

$$= \frac{44}{4\cdot 35}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{53}{35}\begin{pmatrix}2\\4\\5\\6\end{pmatrix}$$

$$= \frac{11}{35}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{53}{35}\begin{pmatrix}2\\4\\5\\6\end{pmatrix} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix}117\\223\\276\\341\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3.342857143\\6.371428571\\7.885714286\\9.742857143\end{pmatrix}$$

$$= 0,3142857\ldots\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + 1,514285\ldots\begin{pmatrix}2\\4\\5\\6\end{pmatrix}$$

$$= \frac{11}{35}\mathbb{1} + \frac{53}{35}X$$

iv) QR-Zerlegung. Mit iv) haben wir berechnet:

$$b_1 = a_1/\|a_1\| = v_1/\|v_1\|$$

$$\Rightarrow v_1 = \|v_1\| b_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

$$b_2 = a_2/\|a_2\| = \left(v_2 - \langle v_2,b_1\rangle b_1\right)/\|a_2\|$$

$$\Rightarrow v_2 = \langle v_2,b_1\rangle b_1 + \|a_2\| b_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\4\\5\\6\end{pmatrix} = \frac{17}{2}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix} + \frac{35}{2}\cdot\frac{2}{35}\begin{pmatrix}-9/14\\-1/14\\3/14\\7/14\end{pmatrix}$$

Im GSV gilt allgemein:

$$v_i = \sum_{j=1}^{i-1}\langle v_i,b_j\rangle b_j + \|a_i\| b_i$$

$$= \underbrace{(b_1,\ldots,b_i)}_{\text{Matrix}}\underbrace{\begin{pmatrix}\langle v_i,b_1\rangle\\\vdots\\\langle v_i,b_{i-1}\rangle\\\|a_i\|\end{pmatrix}}_{\text{Vektor}} \quad i=1,\ldots,k$$

$$\Rightarrow \underbrace{(v_i)_{i=1}^k}_{=:A} = \underbrace{(b_i)_{i=1}^k}_{=:Q}\underbrace{\begin{pmatrix}\|a_1\| & \langle v_2,b_1\rangle & \langle v_3,b_1\rangle & \cdots & \langle v_k,b_1\rangle\\ & \|a_2\| & \langle v_3,b_2\rangle & & \langle v_k,b_2\rangle\\ & & \|a_3\| & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \langle v_k,b_{k-1}\rangle\\ & & & & \|a_k\|\end{pmatrix}}_{=:R}$$

obere Δ-Matrix

Matrix mit linear unabh. Spalten

Matrix mit orthonormalen Spalten

$\Rightarrow A = QR$ — QR-Zerlegung.

b) ii):

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -9/\sqrt{4\cdot 35} \\ 1/2 & -1/\sqrt{4\cdot 35} \\ 1/2 & 3/\sqrt{4\cdot 35} \\ 1/2 & 7/\sqrt{4\cdot 35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 17/2 \\ 0 & \sqrt{35}/2 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow y \doteq A\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = QR\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \pi_{\langle A \rangle}(y) = QR\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$\langle A \rangle = \langle Q \rangle$

$$\Rightarrow \pi_{\langle Q \rangle}(y) = QQ^T y = QR\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{Q^TQ}_{=I_2} Q^T y = \underbrace{Q^TQ}_{=I_2} R\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow Q^T y = R\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -9/\sqrt{4\cdot 35} & -1/\sqrt{4\cdot 35} & 3/\sqrt{4\cdot 35} & 7/\sqrt{4\cdot 35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27/2 \\ 53/\sqrt{4\cdot 35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 17/2 \\ 0 & \sqrt{35}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$27 - 17\cdot\frac{53}{35}$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 17/2 & 27/2 \\ 0 & \sqrt{35}/2 & 53/2\sqrt{35} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 17 & 27 \\ 0 & 35 & 53 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 17 & 27 \\ 0 & 1 & \frac{53}{35} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 44/35 \\ 0 & 1 & 53/35 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 11/35 \\ 0 & 1 & 53/35 \end{array}\right) \Rightarrow \alpha = \frac{11}{35},\ \beta = \frac{53}{35}.$$

12.26 Def (Orthogonale Matrix, Orthogonale Abb.): Sei V ein n-dim. eukl. $\mathbb{R}$-Raum:

a) $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal $\Leftrightarrow$ Spalten von Q bilden ONB von V

b) $f: V \to V$ orthogonal $\Leftrightarrow \langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle \ \forall v, w \in V$.

12.27 Bem (Orth. Matrizen): Es gilt:

a) Q orth. $\Leftrightarrow Q^TQ = I \Leftrightarrow Q^{-1} = Q^T = QQ^T = I$,

$\Leftrightarrow$ Spalten von Q bilden ONB $\Leftrightarrow$ Zeilen von Q bilden ONB.

b) Q orth. $\Rightarrow \det Q^T = \det Q \in \{-1, +1\}$

c) Die orth. $n\times n$-Matrizen bilden bzgl. $\circ$ eine Gruppe, die orth. Gruppe $O(n)$.

12.28 Bem (Polarisierung): Sei V ein eukl. $\mathbb{R}$-Raum. Dann gilt

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{2}\left(\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v-w\|^2\right),$$

d.h. man kann das Skalarprodukt aus der Norm gewinnen.

Bew.: $\|v-w\|^2 = \langle v-w, v-w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v, w\rangle$. □

12.29 Satz (Orth. Abb.): Sei $f: V \to V$ ein Endomorphismus des n-dim. $\mathbb{R}$-Raums V. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ (winkeltreu)

ii) $\|f(v) - f(w)\| = \|v - w\| \quad \forall v, w \in V$ (abstandserhaltend)

iii) $\|f(v)\| = \|v\| \quad \forall v \in V$ (längenerhaltend)

iv) $Q \triangleq a(f)$ orthogonal $\forall Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal,

d.h. die Bilder einer ONB unter einer orth. Abb. bilden selbst eine ONB, d.h. eine orth. Abb. bildet eine ONB in eine ONB ab.

v) $\langle f^{-1}(v), f^{-1}(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ (Umkehrabb ist orth.)

Bew.:

i) $\Rightarrow$ ii) $\|f(v) - f(w)\|^2 = \|f(v-w)\|^2 = \langle f(v-w), f(v-w)\rangle$
$\overset{\text{Def. 12.26 ii)}}{=} \langle v-w, v-w\rangle = \|v-w\|^2$

ii) $\Rightarrow$ iii) $\|f(v)\| = \|f(v) - f(0)\| = \|v - 0\| = \|v\|$

iii) $\Rightarrow$ i) $\langle v, w\rangle \overset{\text{Pol.}}{=} \frac{1}{2}\left(\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v-w\|^2\right)$
$= \frac{1}{2}\left(\|f(v)\|^2 + \|f(w)\|^2 - \underbrace{\|f(v-w)\|^2}_{= \|f(v)-f(w)\|^2}\right)$
$\overset{\text{Pol.}}{=} \langle f(v), f(w)\rangle$.

i) $\Leftrightarrow$ iv): Sei $\{v_i\}_{i=1}^n$ ONB von V, dann gilt:

$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij} \Rightarrow \langle f(v_i), f(v_j)\rangle = \delta_{ij} \quad \forall i,j$

iv) $\Leftrightarrow$ v): $\square$

11.30 Kor. (Eigenwerte einer orth. Abb / Matrix):

a) Eine orth. Abb / Matrix hat als einzige mögliche Eigenwerte ± 1.

b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer orth. Abb / Matrix sind orth.

Bew.:

a) $\|f(v)\| = \|\lambda v\| = \|v\| \Rightarrow |\lambda| = 1$.

b) $f(v) = v$, $f(w) = -w \leftrightarrow \langle v, w\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, -w\rangle = -\langle v, w\rangle = 0$. $\square$

11.31 Bsp (Orth. Abb):

a) vgl. Bsp. 12.25 i): $\mathcal{B} = Q = \{e_i\}_{i=1}^3$:

$$Q \triangleq a(f) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Drehung um $\frac{\pi}{4}$ in e_1-e_2-Ebene; Spiegelung in e_3-Gerade

b) Spiegelung $f^2 = \mathrm{I} \Leftrightarrow f = f^{-1}$.

Sei $f(v) = f^{-1}(v) = w \Leftrightarrow v = f^{-1}(w) = f(w)$

$\Rightarrow \langle f(v), f(w)\rangle = \langle f(f(w)), f(f(v))\rangle = \langle w, v\rangle = \langle v, w\rangle$,

d.h. Spiegelungen sind orthogonal.

c) Orthogonale Spiegelung. Sei $V = U \oplus U^\perp$ und

$f: U \oplus U^\perp \to U \oplus U^\perp$, $u+w \mapsto u-w$ ist orthogonal.

d) Orthogonale 2×2-Matrizen. Sei $Q = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O(2)$

$$\Rightarrow Q^T Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \exists\, \varphi, \psi \in [0, 2\pi[:\ a = \cos\varphi,\ b = \sin\varphi,\ c = \sin\psi,\ d = \cos\psi$

$\Rightarrow 0 = ac + bd = \cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi = \sin(\varphi+\psi) = 0$

$\Rightarrow \varphi + \psi \in \{0, \pi, 2\pi, 3\pi\}$

i) $\varphi + \psi \in \{0, 2\pi\} \Rightarrow \varphi = \psi = 0 \ \vee\ \psi = 2\pi - \varphi$

$\Rightarrow \sin\psi = -\sin\varphi,\ \cos\psi = \cos\varphi \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

ii) $\varphi + \psi \in \{\pi, 3\pi\}$

$\Rightarrow \sin\psi = \sin\varphi,\ \cos\psi = -\cos\varphi \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$

<u>II.30 Satz</u> (Normalform von orth. Endomorphismen eines 2-dim V'Raumes):

Jede orth. Endomorphismus-Matrix eines 2-dim. euk. V'Raumes kann bzgl. einer geeigneten ONB Q mit Hilfe der folgenden Matrizen diagonalisiert werden:

$$Q^T A_Q(f) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

<u>Bew.:</u> Bzgl. einer ONB Q hat $Q^T A_Q(f)$ nach Bsp. II.29 d) die Form $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ ✓ oder $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$. Im zweiten Fall ist das char. Polynom

$$\chi_f(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi - \lambda \end{vmatrix} = -(\cos\varphi - \lambda)(\cos\varphi + \lambda) - (\sin\varphi)^2$$

$$= -\left((\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2\right) + \lambda^2 = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$$

$\Rightarrow \Lambda(f) = \{-1, +1\}$ $\overset{\text{Kor. II.30}}{\Rightarrow}$ $\exists$ EVen v_1, v_2 zum EW $+1, -1$ resp.

$\Rightarrow v_1 \perp v_2 \Leftrightarrow$ Zugeh. ONB $\{v_1, v_2\} = Q$ ist $Q^T A_Q(f) = \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ☐

<u>II.31 Satz</u> (Normalform von orth. Endomorphismen): Sei $f: V \to V$ ein orth. Endomorphismus des n-dim. euk. V'Raumes V. Dann gibt es eine ONB Q von V, so daß gilt:

$$Q^T A_Q(f) = \begin{pmatrix} I_{e_{-1}} & & \\ & I_m & \\ & & \operatorname{diag}_{i=1}^{k} D_k \end{pmatrix},\quad D_i = \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & \sin\varphi_i \\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix},\ i = 1, \dots, k$$

Länge und Abstand von Vektoren

Welche Lösungen hat das LGS (in $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} 2x+y &= -2 \\ x+y &= 3 \\ x+2y &= 0 \end{aligned} \quad ?$$ Keine Lösung.

Ausprobieren: $x=2, y=2 \rightsquigarrow$ rechte Seite $\begin{pmatrix} 2\cdot 2+2 \\ 2+2 \\ 2+2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ statt $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x=1, y=1 \rightsquigarrow$ rechte Seite $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ statt $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist „besser" als $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Aber für welches $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ kommen wir dem Punkt $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ am nächsten?

Welche Punkte können wir erreichen? Alle Punkte $x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x,y \in \mathbb{R}$.

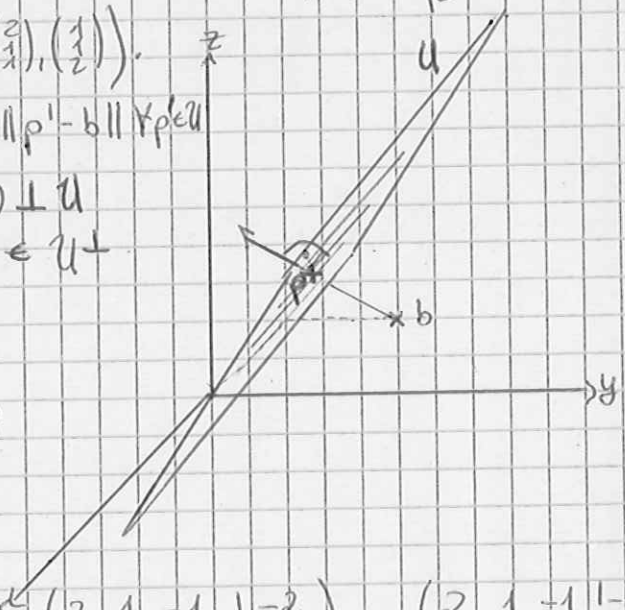
Also alle Punkte in $\mathcal{U} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

Suche $p \in \mathcal{U}$, sodass $\|p-b\| \leq \|p'-b\| \; \forall p' \in \mathcal{U}$

Brauchen offensichtlich $(p-b) \perp \mathcal{U}$

$p-b \in \mathcal{U}^\perp$

$\mathcal{U}^\perp \overset{\text{Kreuzprodukt}}{=} \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$



$p = b + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ für ein $t \in \mathbb{R}$

$p = x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ für $x,y \in \mathbb{R}$

Löse

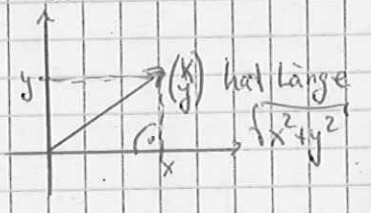
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & +2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 22 & 22 \end{array}\right)$$

Also $t=1$, $y=1$, $x=-1$.

Also $p = (-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ führt auf eine rechte Seite, die dem Punkt b am nächsten ist.

Der Abstand $\|p-b\|$ ist $\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11}$.

Im $\mathbb{R}$ / $\mathbb{R}^2$ / $\mathbb{R}^3$ sind Längen und Abstände sehr anschaulich (Satz des Pythagoras).



Was ist mit anderen Vektorräumen?

Def (Norm auf $\mathbb{R}$) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung

$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Norm, wenn

N1) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \forall x \in V$

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall x \in V$

N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$

Bsp a) $V = \mathbb{R}^2$: $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2+y^2}$ ist eine Norm.

Bew: N1: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, o.Bd.A $x \neq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq x^2 > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} > 0$.

N2: $\left\| \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(\alpha x)^2 + (\alpha y)^2} = \sqrt{\alpha^2 (x^2+y^2)} = |\alpha| \sqrt{x^2+y^2}$

N3: $\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} = \ldots$ nachrechnen

b) $V = \mathbb{R}^n$ $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sum x_i^2}$ ist eine Norm.

c) V mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dann ist $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ eine Norm

Aber: Nicht jede Norm ist von einem Skalarprodukt induziert.

Def (Metrik auf $\mathbb{R}$). Sei V ein Vektorraum. Eine Abbildung

$d : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Metrik, wenn

M1) $d(v,w) = 0 \Leftrightarrow v = w \quad \forall v, w \in V$

M2) $d(v,w) = d(w,v) \quad \forall v, w \in V$

M3) $d(v,x) \leq d(v,w) + d(w,x) \quad \forall v, w, x \in V$

Bsp V mit Norm $\|\cdot\|$. Dann ist $d(v,w) = \|v-w\|$ eine Metrik

M1) $d(v,v) = \|0\| = \|0 \cdot 0\| = |0| \cdot \|0\| = 0$

und $\|v-w\| = 0 \overset{N1}{\Rightarrow} v - w = 0 \Rightarrow v = w$

M2) $d(v,w) = \|v-w\| = \|(-1)(w-v)\| = |-1| \, \|w-v\| = \|w-v\| = d(w,v)$

M3) $d(v,x) = \|v-x\| = \|v+w+w-x\| \overset{N3}{\leq} \|v-w\| + \|w-x\|$

Skalarprodukt $\rightsquigarrow$ Norm $\rightsquigarrow$ Metrik

$\langle v, w \rangle$ $\quad$ $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ $\quad$ $d(v,w) = \|v-w\|$

„irgendwas mit Winkel" $\quad$ „Länge" $\quad$ „Abstand"

Typische Fragestellung:

Gegeben einen Vektorraum V, einen (affinen) Unterraum U, einen Punkt $b \in V \setminus U$ sowie eine Metrik d auf V.

Finde $p \in U$ mit $d(p,b) \leq d(u,b) \quad \forall u \in U$.

Bsp für Anwendungen
- Abstand Punkt–Ebene
- Annäherung komplizierter Funktionen durch einfache Fkt.
- statistische Verfahren z.B. für machine learning

Und wie löst man das?

Satz Ist die Metrik von einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induziert, dann gilt

$p \in U, \quad b - p \in U^\perp \Rightarrow \quad d(p,b) \leq d(u,b) \; \forall u \in U.$

Bew: Sei $p \in U$ mit $b - p \in U^\perp$ und sei $u \in U$ beliebig sowie $w = u - p$.

Dann
$$d(u,b)^2 = \|u-b\|^2 = \|w+p-b\|^2 = \langle w+p-b, w+p-b\rangle$$
$$= \langle w,w\rangle + \langle w, p-b\rangle + \langle p-b, w\rangle + \langle p-b, p-b\rangle$$
$$= \|w\|^2 + 2\underbrace{\langle p-b, w\rangle}_{=0,\ \text{da } w\in U \text{ und } p-b\in U^\perp} + \|p-b\|^2 \geq \underbrace{\|p-b\|^2}_{d(p,b)^2}$$
($\|w\|^2 \geq 0$)

Und da $d(x,y) \geq 0 \; \forall x,y$ folgt die Aussage. ∎

Bem Im obigen Satz gilt auch die Rückrichtung der Aussage.

Die Lösung p der Bestapproximation ist also charakterisiert durch $p \in U$ und $b - p \in U^\perp$.

Mithilfe von adjungierten Abbildungen können wir p bestimmen.

Adjungierte Abbildungen

Def Sei V euklid. VR und $f: V \to V$ linear. Eine Abbildung $f^{ad}: V \to V$ heißt Adjungierte von f, wenn

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^{ad}(w)\rangle \quad \forall v,w \in V$$

Bsp: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ St.Sk.pr.
$$\langle Av, w\rangle = (Av)^T w = v^T A^T w = v^T (A^T w) = \langle v, A^T w\rangle$$

Def f heißt selbstadjungiert, wenn $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle \; \forall v,w \in V$.

Bsp Symmetrische Matrizen sind selbstadjungiert ($A^T = A$) bzgl. St.Sk.pr.

Bem Es gibt höchstens eine adjungierte Abbildung zu $f \in End(V)$.

Bew: Ang. es gibt $g \neq h \in End(V)$ mit

$\langle f(v), w\rangle = \langle v, g(w)\rangle = \langle v, h(w)\rangle \quad \forall v, w \in V$

Dann $\langle v, g(w) - h(w)\rangle = 0 \quad \forall v, w \in V$. Da $g \neq h$: $\exists w \in V: g(w) \neq h(w)$

und damit $\langle g(w) + h(w), g(w) - h(w)\rangle = 0$ aber $g(w) - h(w) \neq 0$ ↯

Satz: Sei V endl. dim. eukl. VR. Dann hat jeder Endomorphismus $f: V \to V$ eine Adjungierte.

Bew: Da V endl. dim. hat V eine ONB $\{b_1, \dots, b_n\}$

Nach 12.18: $v = \sum_i \langle v, b_i\rangle b_i \quad \forall v \in V$

Dann $f(v) = \sum_i \langle v, b_i\rangle f(b_i) \quad \forall v \in V$

Sei $f^{ad}(w) := \sum_i \langle w, f(b_i)\rangle b_i \quad \forall w \in V$.

Dann ist $\langle f(v), w\rangle = \left\langle \sum_i \langle v, b_i\rangle f(b_i), w \right\rangle = \sum_i \langle v, b_i\rangle \langle f(b_i), w\rangle$

$= \sum_i \langle v, b_i\rangle \langle w, f(b_i)\rangle = \sum_i \langle v, \langle w, f(b_i)\rangle b_i\rangle$

$= \left\langle v, \sum_i \langle w, f(b_i)\rangle b_i \right\rangle = \langle v, f^{ad}(w)\rangle$ ☐

16.1.17

Bem $(f^{ad})^{ad} = f$

Bew $\langle f^{ad}(v), w\rangle = \overline{\langle w, f^{ad}(v)\rangle} = \langle v, (f^{ad})^{ad}(w)\rangle \quad \forall v, w$

$\langle w, f^{ad}(v)\rangle = \langle f(w), v\rangle = \langle v, f(w)\rangle$ ☐

Satz $\ker f^{ad} = (\operatorname{im} f)^{\perp}$

Bew $v \in \ker f^{ad} \iff f^{ad}(v) = 0 \iff \langle f^{ad}(v), w\rangle = 0 \ \forall w \in V$

$\iff \langle v, f(w)\rangle = 0 \ \forall w \in V \iff v \in (\operatorname{im} f)^{\perp}$ ☐

Satz 12.8 Sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ ONB des euklid. VR V (endl. dim) und $f \in End(V)$.

Nun sei A die darst. Matrix von f bzgl. B.

Dann ist A^T die darst. Matrix von f^{ad} bzgl. B.

Bew: Sei $A = (\alpha_{ij})$ und sei $A^{ad} = (\beta_{ij})$ darst. Matrix von f^{ad} bzgl. B

Wegen darst. Matrix: $f(b_j) = \sum_k \alpha_{kj} b_k$ und $f^{ad}(b_j) = \sum \beta_{kj} b_k$.

Dann ist $\beta_{ij} \overset{B\ ONB}{=} \sum_k \beta_{kj} \langle b_k, b_i \rangle = \langle \sum_k \beta_{kj} b_k, b_i \rangle = \langle f^{ad}(b_j), b_i \rangle$

$= \langle b_j, f(b_i) \rangle = \langle b_j, \sum_k \alpha_{ki} b_k \rangle = \alpha_{ji}$ ☐

Zusammenfassung: Im reellen mit Std Skalpr ist A^T die Adjungierte zu A.

Zurück zur Bestapproximation

Haben LGS $Ax = b$ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, $b \in \mathbb{R}^m$, Standard Skal.prod. $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Suche $x^* \in \mathbb{R}^n$, sodass $\|Ax^* - b\| \leq \|Ax - b\| \ \forall x \in \mathbb{R}^n$. $U = \operatorname{im} A$

Suche $p \in \operatorname{im} A$: $\|p - b\|$ minimal $\Leftrightarrow$ $p - b \in (\operatorname{im} A)^\perp$

Da $(\operatorname{im} A)^\perp = \ker A^{ad} = \ker A^T$ suchen wir $p \in \operatorname{im} A$ mit

$p - b \in \ker A^T \Leftrightarrow A^T p = A^T b \Leftrightarrow A^T A x^* = A^T b$

und falls A Rang n hat : $x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$

Lemma $\operatorname{rang} A^T A = \operatorname{rang} A$ $(A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ m \geq n)$

Bew $\operatorname{rang} BA \leq \operatorname{rang} A$ gilt immer (Hintereinanderausführung lin. Abb)

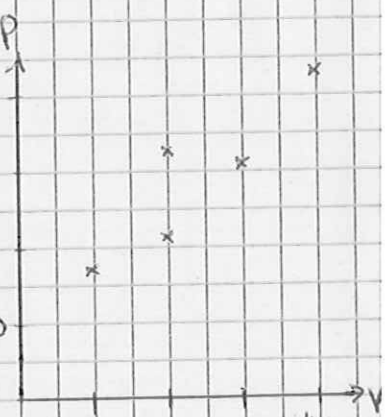
Zeige also $\ker A^T A \leq \ker A$, Dann mit Dim.formel $\operatorname{rang} A^T A \geq \operatorname{rang} A$

Sei $x \in \ker A^T A$. Dann ist $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, A^T A x \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$

also $Ax = 0$ und damit $x \in \ker A$. ☐

Bsp Methode der kleinsten Quadrate

Vorbereitung in Stunden	10	20	20	30	40
Punkte in Klausur	17	22	33	31	43



Wir unterstellen affin linearen Zshg:

$\underset{\text{Punkte}}{y} = m \cdot \underset{\text{Vorb.z.}}{x} + n$, $m, n \in \mathbb{R}$

$A \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 20 & 1 \\ 20 & 1 \\ 30 & 1 \\ 40 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 17 \\ 22 \\ 33 \\ 31 \\ 43 \end{pmatrix}$

Suche $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$, sodass $\|A \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} - b\|$ minimal

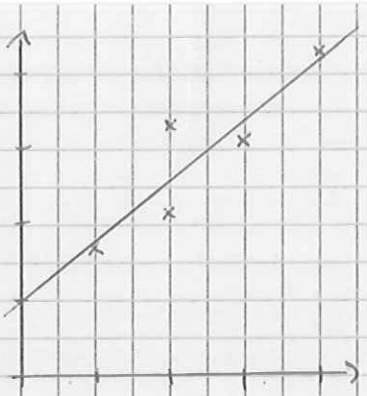
$$= \sqrt{\sum_i \underbrace{(a_{i1} m + a_{i2} - b)^2}_{\text{Fehlerquadrate}}}$$

„Summe der kleinsten Fehlerquadrate"

Lösung: $A^TA = \begin{pmatrix} 3400 & 120 \\ 120 & 5 \end{pmatrix}$

$(A^TA)^{-1}A^Tb = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 10 \end{pmatrix}$

↑ Computer



Bem: Bei affinen UR zunächst Translation.

Satz 12.39 Sei V endl. dim. und euklid. VR und $f \in End(V)$ selbstadjungiert. Dann gilt:

i) f hat nur reelle Eigenwerte

ii) Es existiert eine ONB von V aus Eigenvektoren

Bew: i) Sei B eine Basis von V und $A := M_B^B(f)$ die zugeh. darst. Matrix. Wir fassen A als Abbildung $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ auf ($z \mapsto Az$), dann gibt es $v \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $Av = \lambda v$.

Außerdem gilt wegen $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$ $\forall x,y \in \mathbb{C}$, dass ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$) $A\overline{v} = \overline{A}\,\overline{v} = \overline{Av}$

$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$ (f selbstadj.) $= \overline{\lambda v} = \overline{\lambda}\,\overline{v}$.

Also $\lambda \langle v, \overline{v} \rangle = \langle \lambda v, \overline{v} \rangle = \langle Av, \overline{v} \rangle = \langle v, A\overline{v} \rangle = \langle v, \overline{\lambda}\,\overline{v} \rangle = \overline{\lambda} \langle v, \overline{v} \rangle$

Wegen $v \neq 0$ gilt $\langle v, \overline{v} \rangle = |v_1|^2 + \dots + |v_n|^2 \neq 0$, also $\lambda = \overline{\lambda}$ und daher $\lambda \in \mathbb{R}$.

$Av = \lambda v$, $A\overline{v} = \lambda\overline{v} \Rightarrow A(v+\overline{v}) = \lambda(v+\overline{v})$ und $v + \overline{v} \in \mathbb{R}^n$. Es gibt also einen reellen Eigenvektor zum reellen EW λ.

Da dies für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{C}^n$ mit $Av = \lambda v$ gilt, hat A nur reelle EW.

ii) Induktion nach der Dimension n von V.

IA: $n = 1$: f (bzw. A) ist diagonal ✓

IV: Es gibt eine ONB aus Ev für jeden selbstadj. Endo auf V mit dim $n-1$

IS: Sei V n-dim und f selbstadj. Endo. Nach Beweis in i) finden wir $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$: $f(v) = \lambda v$. Sei $U = \text{span}(v)$ und $x \in U^\perp$. Dann ist $\langle v, f(x) \rangle = \langle f(v), x \rangle = \lambda \langle v, x \rangle = 0$, da $x \in U^\perp$. Insbesondere folgt $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$ und wir betrachten den Endomorphismus $f|_{U^\perp} : U^\perp \to U^\perp$, $u \mapsto f(u)$. Der ist natürlich selbstadj. und $\dim(U^\perp) = n-1$.

Nach IV existiert eine ONB von $U^\perp$ aus Ev von $f|_{U^\perp}$

und zusammen mit normiertem v erhalten wir eine ONB von V aus Ev von f. □

Kor: Symmetrische Matrizen ($\mathbb{R}^{n \times n}$) sind diagbar.

18.1.17

Bsp $A^T = A^{ad}$?

Betrachte das Skalarprodukt

$$\langle x,y\rangle = x^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} y \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^2$$

und die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ist A selbstadj. bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$?

$\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle \quad \forall v,w$?

$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\langle Av, w\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = (1\ 2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1\ 2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\langle v, Aw\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = (0\ 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$$

Nein, A ist nicht selbstadj. (obwohl $A = A^T$).

Die Aussage $A^{ad} = A^T$ gilt für das Standardskalarprodukt! und nur dafür!

Bilinearformen

Def 12.40 Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. $s: V \times V \to \mathbb{R}$ heißt Bilinearform, falls

i) $s(v+v', w) = s(v,w) + s(v',w)$ und $s(\lambda v, w) = \lambda s(v,w)$

ii) $s(v, w+w') = s(v,w) + s(v,w')$ und $s(v, \lambda w) = \lambda s(v,w)$

$\forall v,w,v',w' \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

s ist symmetrisch, falls $s(v,w) = s(w,v) \ \forall v,w \in V$

s ist alternierend, falls $s(v,w) = -s(w,v) \ \forall v,w \in V$

s heißt positiv definit, falls $s(v,v) > 0 \ \forall v \neq 0$

Bem Ein Skalarprodukt ist eine symm. und pos. def. Bilinearform.

Erinnerung: Lineare Abbildung $\rightsquigarrow$ Basis wählen $\rightsquigarrow$ darst. Matrix

Bilineare Abbildungen: Sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V

Die Matrix $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = s(b_i, b_j)$ heißt darstellende Matrix von s bzgl. B.

Es gilt: Für $v,w \in V \quad v = \sum_i \lambda_i b_i, \ w = \sum_j \mu_j b_j$ ist

$$\begin{aligned} s(v,w) &= s\Big(\textstyle\sum \lambda_i b_i, \sum \mu_j b_j\Big) = \sum \lambda_i \, s\big(b_i, \textstyle\sum \mu_j b_j\big) \\ &= \sum \lambda_i \sum \mu_j \, s(b_i, b_j) = \sum \lambda_i \sum \mu_j \, a_{ij} \\ &= (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \, A \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A heißt auch Gramsche Matrix von s bzgl. B.

Wie auch bei linearen Abbildungen, können wir zu einer Basis $\mathcal{B}$ suchen, sodass die darst. Matrix $M_{\mathcal{B}}(s)$ von s besonders „schön" ist.

Prop Ist s ein Skalarprodukt und $\mathcal{B}$ eine ONB von V bzgl. s, dann ist $M_{\mathcal{B}}(s) = E_n$ (Einheitsmatrix).

Bew: $\left(M_{\mathcal{B}}(s)\right)_{ij} = s(b_i, b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$, da ONB.

Satz 12.41 Ist s eine Bilinearform auf V und $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Dann

i) s symmetrisch $\Leftrightarrow$ $M_{\mathcal{B}}(s)$ symm.

ii) s pos. def $\Leftrightarrow$ $M_{\mathcal{B}}(s)$ pos. def.

Bew $M_{\mathcal{B}}(s) = A$

i) „$\Rightarrow$" $s(v,w) = s(w,v) \;\forall v,w \Rightarrow s(b_i, b_j) = s(b_j, b_i) \;\forall b_i, b_j \in \mathcal{B}$

$\Rightarrow a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j \Rightarrow A = A^T$

„$\Leftarrow$" $v, w \in V$ $v = \sum \lambda_i b_i$, $w = \sum \mu_j b_j$, $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$

$s(v,w) = \lambda^T A \mu = (\lambda^T A \mu)^T$

$= \mu^T A^T \lambda \underset{A = A^T}{=} \mu^T A \lambda = s(w,v)$

ii) $v \neq 0$, $v = \sum \lambda_i b_i$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$, $v \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 0$

Dann $s(v,v) = \lambda^T A \lambda$

s pos def $\Leftrightarrow s(v,v) > 0 \;\forall v \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^T A \lambda > 0 \;\forall \lambda \neq 0 \Leftrightarrow A$ pos. def. ∎

Korollar 12.42 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$\langle x, y \rangle := x^T A y$ definiert ein Skalarprodukt genau dann wenn A symm. und pos. def

Bem Es genügt nicht positive Definitheit auf einer Basis zu prüfen.

$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $s(x,y) = x^T A y$

$s\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = (1\;0)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1\;0)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$

$s\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = (0\;1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

} pos. def auf Basis

$s\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = (1\;-1)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1\;-1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{-2}$ aber nicht pos. def.

Satz 12.43 Eine Symm. Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte positiv sind.

Bew: „⇒" Sei $v \neq 0$ $Av = \lambda v$. Da A pos. def. ist $v^TAv > 0$. Dann

$0 < v^TAv = v^T\lambda v = \lambda v^T v$ und da $v \neq 0 \Rightarrow v^Tv \neq 0$ folgt $\lambda > 0$.

„⇐" Nach Satz 12.39 finden wir eine ONB $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ vom $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A (ONB bzgl. StSkp.)

Dann $Ab_i = \mu_i b_i$, $\mu_i > 0$.

Sei $v \neq 0$, $v = \sum \lambda_i b_i$. Dann ist $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \neq 0$ und

$$v^TAv = \left(\sum \lambda_i b_i\right)^T A \left(\sum \lambda_j b_j\right) = \left(\sum \lambda_i b_i\right)^T \left(\sum \lambda_j Ab_j\right)$$

$$= \left(\sum \lambda_i b_i^T\right)\left(\sum \lambda_j \mu_j b_j\right) = \sum_i \lambda_i \sum_j \lambda_j \mu_j b_i^T b_j$$

$$\overset{B \text{ ONB bzgl StSkp}}{=} \sum_i \lambda_i \lambda_i \mu_i = \sum_i \lambda_i^2 \mu_i > 0$$

$\Leftarrow \lambda_i \neq 0$ für ein i, $\mu_i > 0 \ \forall i$ ☐

Die darstellende Matrix einer Bilinearform hängt von der Wahl der Basis ab. Wie auch bei linearen Abbildungen können wir die darst. Matrix mithilfe der Basiswechselmatrix transformieren:

Satz 12.44 Sei s eine Bilinearform auf V und seien A und B Basen von V sowie $M_A(s)$ und $M_B(s)$ die zugehörigen darst. Matrizen. Dann ist

$$M_A(s) = \left(T_B^A\right)^T M_B(s)\, T_B^A, \text{ wobei}$$

T_B^A die Basiswechselmatrix von A nach B ist.

Bew Seien $v, w \in V$ beliebig $v = \sum \lambda_i a_i$, $w = \sum \mu_i a_i$ bzgl Basis A

$v = \sum \lambda_i' b_i$, $w = \sum \mu_i' b_i$ — B

Dann Es gilt $T_B^A \lambda = \lambda'$ und $T_B^A \mu = \mu'$.

Dann ist $s(v,w) = \lambda'^T M_B(s) \mu' = \left(T_B^A \lambda\right)^T M_B(s) \left(T_B^A \mu\right)$

$$= \lambda^T \left(T_B^A\right)^T M_B(s)\, T_B^A\, \mu.$$

Da dies für alle $v, w \in V$ bzw $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$ gilt, ist $M_A(s) = \left(T_B^A\right)^T M_B(s) T_B^A$. ☐

12.45 Bsp (Bilinearformen):

i) $V = \mathbb{R}^2$ $\quad s: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto x_1y_2 - x_2y_1$ $\quad B = \{e_1, e_2\}$

$s(e_1,e_1) = 0 \quad s(e_1,e_2) = 1$

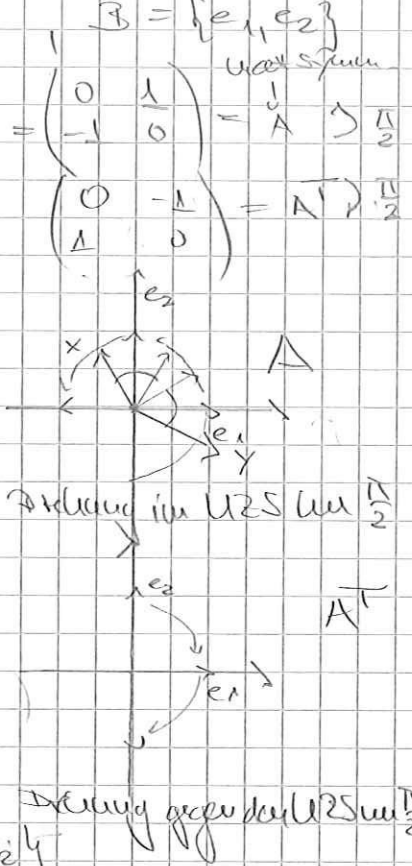
$s(e_2,e_1) = -1 \quad s(e_2,e_2) = 0$ $\Rightarrow M_B(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A$

$e_1^T A e_1 = (1,0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1,0)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$e_1^T A e_2 = (1,0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$

$e_2^T A e_1 = (0,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0,1)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1$

$e_2^T A e_2 = (0,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$



α) $s(x,y) = x^T A y = x^T(Ay) = (A^T x)^T y$

β) $s(x,x) = x^T A x = x_1x_2 - x_1x_2 = 0$

$\Rightarrow$ zur Bilinearform (BLF) s gehörige quadratische Form (QF).

γ) gibt es eine Basistransformation von $B = \{e_1, e_2\}$ zu einer Basis $B' = \{b_1, b_2\}$, so daß $M_{B'}(s)$ Diagonalform hat, d.h. mit $T = A_{BB'}(id(\mathbb{R}^2))$ gilt

$T^T A T = D = \operatorname{diag}(\lambda_i)$?

$i := 1,2$

$B = \{e_1,e_2\}$ $\quad B' = \{b_1,b_2\}$

$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \xleftarrow{T} (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

$A \downarrow \mathbb{R}$ $\qquad D = T^T A T \downarrow \mathbb{R}$

Für diese Basis müßte gelten:

$s(b_i,b_i) = \lambda_i = 0 \Rightarrow s \equiv 0$ ↯

Andere Möglichkeit: Ansatz $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad T^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$\Rightarrow T^T A T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ac - ac & ad - bc \\ -ad + bc & bd - bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \det A \\ \det A & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_i)$

$\Rightarrow T^T A T = 0$

$\Rightarrow s \equiv 0$ ↯.

ii) $V = \mathbb{R}^2$, $\quad s: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto x^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y$, $\quad B = \{e_1, e_2\}$

$s(e_2,e_1) = (0,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0,1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$s(e_1,e_2) = (1,0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$,

d.h. es gilt i.a. nicht $s(x,y) = s(y,x)$.

iii) $V = \mathbb{K}^n$, $s: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $(x,y) \mapsto x^T A y$ $A = A^T$ symm.

$\Rightarrow s(x,y) = x^T A y = (x^T A y)^T = y^T A^T x = y^T A x = s(y,x)$.

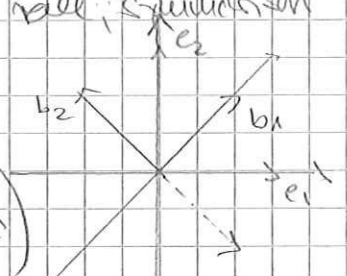
$A^T = A$

iv) $V = \mathbb{R}^2$ mit Std Prod, $s: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y$

$A \begin{cases} \text{orthogonal} \\ \text{reell} \\ \text{symm.} \end{cases} \Rightarrow \exists$ ONB $\mathcal{B}' = \{b_1, b_2\}$ aus EVen zu EWen ± 1

orthogonal reell symmetrisch

$\mathcal{B}' = \{b_1, b_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$



$${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}(\mathbb{R}^2)) = T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad T^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der WH

$$\Rightarrow T^T A T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D$$

$\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ $\xrightarrow{T}$ $\mathcal{B}' = \{b_1, b_2\}$

$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \leftarrow (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

$A \downarrow \mathbb{R}$ $\quad$ $\downarrow T^T A T = D$

$\mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{R}$

v) $V = \mathbb{R}^n$ mit Std Prod, $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\Rightarrow \exists$ ONB $\mathcal{B}' = \{b_1, \dots, b_n\}$ aus EVen von A zu EWen λ_i, $i = 1, \dots, n$

Satz 2.39 $\Rightarrow T^T A T = {}_{\mathcal{B}'}A_{\mathcal{B}'} = \mathrm{diag}(\lambda_i) = D$

$\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$ $\quad$ $\mathcal{B}' = \{b_i\}$

$(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ $\quad$ $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

$A \downarrow$ $\quad$ $\downarrow T^T A T = D$

$\mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{R}$

vi) $V = \mathbb{R}[x]$, $U = \langle 1, x, \dots, x^n \rangle$, $\mathcal{B} = \{x^i\}_{i=0}^n$

$c: U \times U \to \mathbb{R}$, $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$

$s(x^i, x^j) = \int_0^1 x^i x^j\, dx = \frac{1}{i+j+1}$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & & \\ \frac{1}{3} & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ \frac{1}{n+1} & & \cdots & & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix}$$

Hilbertmatrix der Ordnung n

vii) $V = \mathbb{R}^2$, $s(x,y) = x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y$ nicht pos. def.

$\Rightarrow s(x,x) = x_1^2 - x_2^2 = 0 \iff x \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cup \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

2 gerade, kein Untervektorraum

$\{x \in \mathbb{R}^2 : s(x,x) < 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_2| > |x_1|\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow s$ induziert kein Skalarprodukt

R.46 Def. (Hauptachsenproblem einer symm. BLF (SBLF)):

Sei $s: V \times V \to \mathbb{K}$ eine SBLF.

a) $V_0(s) := \{v \in V : s(v,w) = 0 \ \forall w \in V\}$ Ausartungsraum von s

b) $V_0(s) = \{0\] \Leftrightarrow$: s nicht entartet

12.47 Bem (Ausartungsraum einer SBLF): Für eine SBLF $s: V \times V \to K$ gilt:

i) $V_0(s) = \{v \in V : s(w,v) = 0\}$, d.h. die Def. des Ausartungsraums ist unabh. von der Reihenfolge der Argumente.

ii) $V_0(s) \leq_K V$, d.h. $V_0(s)$ ist ein Untervektorraum von V.

Bew.: i) s ist symm. ii) s ist bilinear, $0 \in V_0(s)$. □

12.48 Def. (Rang einer SBLF): Sei $s: V \times V \to K$ eine SBLF. Dann heißt

$$\operatorname{rang}(s) := \dim V - \dim V_0(s)$$ Rang von s.

12.49 Bsp. (Rang einer SBLF):

$V = \mathbb{R}^3$, $s(x,y) = x^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$

$$x^T A = (x_1+x_2, x_1-x_2, 0)$$

$$x^T A y = (x_1+x_2, x_1-x_2, 0)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^3$$

$\Rightarrow x_1+x_2 = x_1-x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$

$\Rightarrow V_0(s) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \operatorname{rang}(s) = 2 = \operatorname{rang} A$.

12.50 Satz (Rang einer SBLF): Sei $s: V \times V \to K$ eine SBLF, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V. Dann gilt:

$$\operatorname{rang}(s) = \operatorname{rang} M_B(s)$$

Bew.: Sei $T: K^n \to V$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n x_i b_i$. T ist ein Isomorphismus.

Wir zeigen: $V_0(s) = T(\ker M_B(s))$.

Sei $v = Tx$, $w = Ty \in V$.

$$\Rightarrow s(v,w) = \underbrace{x^T M_B(s)}_{= x^T} y = x^T y = 0 \ \forall y \in K^n \Rightarrow x^T = 0^T$$

$$\Rightarrow \{x \in K^n : x^T M_B(s) y = 0 \ \forall y \in K^n\}$$

$$= \{x \in K^n : x^T \underbrace{M_B(s)}_{\text{symm.}} = 0^T\} = \{x \in K^n : M_B(s) x = 0\}$$

$$= \ker M_B(s).$$ □

D 5.1 Def. (Quadratische Form): Sei $s: V \times V \to K$ eine SBLF. Dann heißt

$q_s: V \to K, \quad x \mapsto s(x,x)$ zu s gehörige quadratische Form (QF)

D. 5.2 Lem. (Polarisierung): Sei $s: V \times V \to K$ eine SBLF, $\mathrm{char}\, K \neq 2 \iff 1+1 \neq 0$. Dann gilt:

$$s(x,y) = \frac{1}{2}\left(q_s(x+y) - q_s(x) - q_s(y)\right) \quad \forall x,y \in V.$$

Bew: $q_s(x+y) = s(x+y, x+y) = s(x,x) + s(x,y) + s(y,x) + s(y,y)$

$$= s(x,x) + \underbrace{s(x,y) + s(y,x)}_{\stackrel{!}{=} 0} + s(y,y)$$

$$= q_s(x) + 2s(x,y) + q_s(y). \quad \square$$

D. 5.3 Kor. (Die QF bestimmt die SBLF): Sei $s: V \times V \to K$ eine SBLF, $q_s: V \to K$ die zug. QF. Dann gilt:

$$q_s \equiv 0 \Rightarrow s \equiv 0.$$

D. 4.5 Bsp. (zu SBLFen):

viii) $V = K^2$, char $K = 2 \iff 1+1=0$, $s(x,y) = x^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y$, Dieg. ? Symm.

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad T^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T^T A T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overbrace{ac + ac}^{=0} & ad + bc \\ ad + bc & \underbrace{bd + bd}_{=0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ad+bc \\ ad+bc & 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \mathrm{diag}(x_i)$$

$\Rightarrow T^T A T = 0 \Rightarrow s \equiv 0$ ↯.

25.04.17

D. 5.4 Def. (s-orthogonalität): Sei $s: V \times V \to K$ eine SBLF, $v_i \in V$, $i = 1, \dots, k$.

a) $s(v,w) = 0 \iff: v, w$ s-orthogonal $\iff: v \perp_s w$

b) $\{v_i\}_{i=1}^k$ s-orthogonal $:\iff v_i \perp_s v_j \quad \forall i,j = 1, \dots, n, \ i \neq j$

c) $(v_i)_{i=1}^k$ s-orthogonal $:\iff \{v_i\}_{i=1}^k$ s-orthogonal

usw.

D. 5.5 Satz (Diagonalisierung von SBLFen): Sei $s: V \times V \to K$ eine SBLF, $\dim V < \infty$, char $K \neq 2$. Dann gibt es eine s-ONB $\mathcal{B} = \{b_i\}_{i=1}^n$ von V, so daß $M_{\mathcal{B}}(s)$ eine Diagonalmatrix

IR, dh. mit $T = (v_i)_{i=1}^n$ gilt.

$$T^T A T = D = \operatorname{diag}_{i=1}^n(\lambda_i), \quad \lambda_i \in \mathbb{K}, \ i = 1, \dots, n.$$

O.B.d.A. gilt

$$\lambda_i \neq 0, \ i = 1, \dots, \operatorname{rang}(s)$$
$$\lambda_i = 0, \ i = \operatorname{rang}(s)+1, \dots, n$$

Für die quadratische Form gilt für $v = Tx$, $x \in \mathbb{K}^n$,

$$q_s(v) = x^T D x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

Ab. es haben eine gewünschte Form darf.

Bew.: Ind über $n = \dim V$.

Ind.-Anf.: $n = 0, 1$ ✓

Ind.-Vor.: Satz 12.55 gelte für $i = 0, \dots, n$

Ind.-Schluß: $n \to n+1$

Fall

1) $q_s \equiv 0 \Rightarrow s \equiv 0$ ✓

2) $q_s \not\equiv 0 \Rightarrow \exists v_{n+1} \in V : q_s(v_{n+1}) = s(v_{n+1}, v_{n+1}) = \lambda_{n+1} \neq 0.$

Betrachte den Unterraum

$$W := \{ w \in V : s(v_{n+1}, w) = 0 \} = \langle v_{n+1} \rangle^{\perp_s}.$$

Beh. 1: $V = \langle v_{n+1} \rangle \oplus W = \langle v_{n+1} \rangle \oplus \langle v_{n+1} \rangle^{\perp_s}$.

Beweis: Sei $v \in V$ beliebig. Setze

$$w := v - \frac{s(v_{n+1}, v)}{\underbrace{s(v_{n+1}, v_{n+1})}_{\neq 0}} v_{n+1} \quad \left(\text{s-gram-schmidt}\right)$$

$$\Rightarrow s(v_{n+1}, w) = s\left(v_{n+1}, v - \frac{s(v_{n+1}, v)}{s(v_{n+1}, v_{n+1})} v_{n+1}\right)$$

$$= s(v_{n+1}, v) - \frac{s(v_{n+1}, v)}{s(v_{n+1}, v_{n+1})} \cancel{s(v_{n+1}, v_{n+1})}$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow w \in W \text{ und } v = \frac{s(v_{n+1}, v)}{s(v_{n+1}, v_{n+1})} v_{n+1} + w \in \langle v_n \rangle \oplus W.$$

Zus.: $\langle v_{n+1} \rangle \cap W \neq \{0\} \Rightarrow v = \lambda v_{n+1} \in W$

$$\Rightarrow s(v_{n+1}, \lambda v_{n+1}) = \lambda \underbrace{s(v_{n+1}, v_{n+1})}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \quad \lightning \diamond$$

Also gilt: $\dim W = n+1$. Betrachte $s|_W$

$$s|_W : W \times W \to \mathbb{K}, \ (v, w) \mapsto s(v, w).$$

(1457)

Wd. Aus

$\Rightarrow$ $\exists$ s-ONB $B' = \{v_1, \dots, v_n\}$ von W, d.h.

$s(v_i, v_j) = 0 \quad \forall i,j = 1, \dots, n, \ i \neq j$

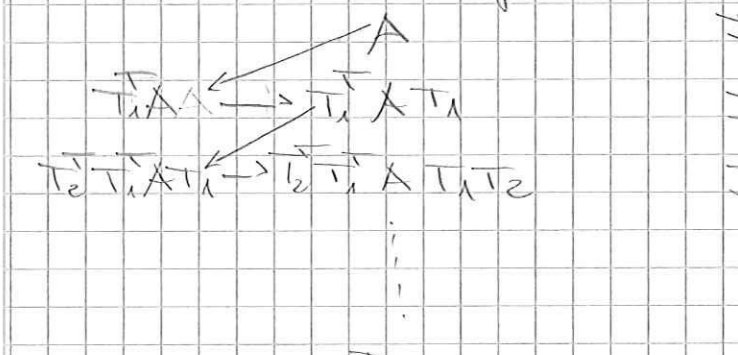
$s(v_{m+1}, v_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\Leftrightarrow$ $B = B' \cup \{v_{m+1}\}$ ist s-ONB von V. $\square$

D.56 Bem (Diag. von SEIF): Dem Bew. von Satz 12.55 folgend kann man eine SEIF diag., indem man ein s-Gram-Schmidt-Verfahren durchführt. Es geht aber auch einfacher, wie das folgende Bsp zeigt.

D.57 Bsp (Diag. einer SEIF durch Spalten- und Zeilenumformungen):

Wir transformieren $M_B(s)$ durch simultane Zeilen- und Spaltenumformungen auf Diagonalform:





D

	0	1
	1	0
1	1	2
1	0	1
2	1	1
0	-1/2	0

T

1	0
0	1
1	0
1	1
1	-1/2
1	1/2

a) + (2)

(2) − ½(1)

i)

Probe: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

ii)

	-1	-2	1
	-2	-3	-2
	1	-2	15
-1	-2	1	-1	0	1
0	1	-4	0	1	-4
1	-2	15	1	-4	15
-1	0	1	-1	0	0
0	1	-4	0	1	-4
0	-4	16	0	-4	16
-1	0	0	-1	0	0
0	1	-4	0	1	0
0	0	0	0	0	0

1	0	0
0	1	0
0	0	1
1	-2	0
0	1	0
0	0	1
1	-2	1
0	1	0
0	0	1
1	-2	-7
0	1	4
0	0	1

(2) − 2·(1)

Hauptachsentransformation

Wie sieht folgende Menge aus?

1. $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \right\}$



und

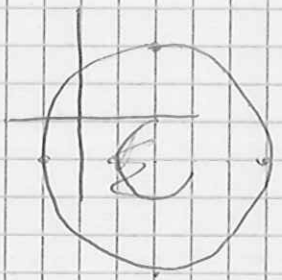
2. $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \right\}$

quadrat. Ergänzung $(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 2y + 1) - 1 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 - 9 = 0$

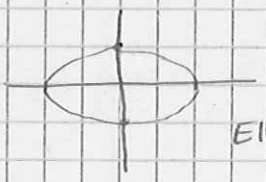
Kreis um Punkt $(2, -1)$ mit Radius 3

(Einheitskreis gestreckt und verschoben)



und

3. $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \right\}$?



Ellipse

und

4. $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 + 5y^2 - 6xy = 8 \right\}$?

Wir wollen den gemischten Term eliminieren. Betrachte dazu

$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ Es ist $(x\,y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5x^2 + 5y^2 - 6xy$.

~~Finden wir eine Basis, sodass A diagonal ist,~~

Wir wollen eine neue Basis des $\mathbb{R}^2$ finden und A diagonalis.

Berechne $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \end{pmatrix}$. Wähle $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$

und ~~wähle~~ ~~also~~ $S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = S^T A S$

und S ist orthogonal, also $S^T = S^{-1}$. Setze $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$,

dann $(x\,y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\alpha\,\beta) S^T A S \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (\alpha\,\beta) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$= 2\alpha^2 + 8\beta^2$

Bezüglich der neuen Basis $\mathcal{B}$ lösen wir also

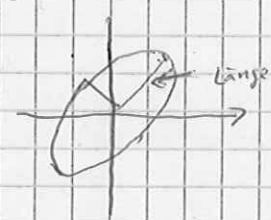
$\rightarrow \frac{1}{4}\alpha^2 + \beta^2 = 1$

S ist eine Drehung um $\frac{\pi}{4}$ ~~45°~~ bzw. $45°$.

Daher hat die Menge folgende Form:

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$



Wir betrachten im $\mathbb{R}^2$ Mengen der Form

$$\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 : \alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2+\delta x+\varepsilon y+\zeta=0\right\}.$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 : (x\ y)^T\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha & \beta/2\\ \beta/2 & \gamma\end{pmatrix}}_{=A\ll\text{symm!}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\underbrace{(\delta\ \varepsilon)}_{=b}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\underbrace{\zeta}_{=c}=0\right\}$$

$$=\{z\in\mathbb{R}^2 : z^TAz+b^Tz+c=0\}$$



Kegelschnitte

Schnittmengen zwischen Doppelkegel und einer Ebene dargestellt als Lösung einer quadratischen Gleichung

$a,b>0$

- ∘ Punkt $\quad a^2x^2+b^2y^2=0$
- | Gerade $\quad a^2x^2=0$
- X zwei schneidende Ger. $\quad 1/a^2\,x^2-1/b^2\,y^2=0$
- ⬭ Ellipse $\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (Sonderfall Kreis)
- ∪ Parabel $\quad a^2x^2-2y=0$
-)(Hyperbel $\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Reine Kegelschnitte: (Grenzfall Doppelkegel → Zylinder)

- || zwei parallele Geraden $\quad a^2x^2=1$
- ∅ leere Menge $\quad a^2x^2=-1$

Idee: Überführe eine quadratische Gleichung durch Koordinatentransformation in eine der obigen Normalformen.

Dieses Verfahren funktioniert auch in höheren Dimensionen.

Def Sei $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $b\in\mathbb{R}^n$, $c\in\mathbb{R}$ (A sei oBdA symm.)

Dann heißt $\{z\in\mathbb{R}^n : z^TAz+2b^Tz+c=0\}$ **Quadrik**.

Satz (Hauptachsentransformation): Sei H eine Quadrik in $\mathbb{R}^n$.

Dann gibt es eine orthogonale Matrix Q, eine Translation P und ein $k\le n$ sowie $\alpha\in\mathbb{R}^k$, sodass genau eine der Aussagen gilt:

(1) $PQ(H)=\{x\in\mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i^2=1\}$

(2) $PQ(H)=\{x\in\mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i^2=0\}$

(3) $PQ(H)=\{x\in\mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i^2-2x_{k+1}=0\}$ (und $k<n$)

Bew Nach Satz 12.39 existiert T orthog. mit $T^TAT = \operatorname{diag}_{i=1}^{n} \alpha_i =: D$.

Sei $y = T^{-1}x = T^Tx$, $d = T^Tb$. Dann

$$y^TDy + 2d^Ty + c = x^T\underbrace{T}_{=I_n}\underbrace{T^T}A\underbrace{T}_{=I_n}\underbrace{T^T}x + 2b^T\underbrace{T}_{=I_n}\underbrace{T^T}x + c$$

$$= x^TAx + 2b^Tx + c$$

Sei $Q(H) = T^T(H) = \{y \in \mathbb{R}^n : y^TDy + 2d^Ty + c = 0\}$

$$= \{y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^2 + 2\sum_{i=1}^n d_i y_i + c = 0\}$$

OBdA seien $\alpha_1, \dots, \alpha_k \neq 0$, $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n = 0$. Dann

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^2 + 2\sum_{i=1}^n d_i y_i + c$$

$$= \sum_{i=1}^k \alpha_i \left[y_i^2 + \frac{2d_i}{\alpha_i} + \left(\frac{d_i}{\alpha_i}\right)^2 \right] + 2\sum_{i=k+1}^n d_i y_i + c - \sum_{i=1}^k \alpha_i \left(\frac{d_i}{\alpha_i}\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^k \alpha_i \underbrace{\left(y_i + \frac{d_i}{\alpha_i} \right)^2}_{=z_i,\ i=1\dots k} + 2\sum_{i=k+1}^n d_i \underbrace{y_i}_{\substack{=z_i \\ i=k+1,\dots,n}} + \underbrace{c - \sum_{i=1}^k \frac{d_i^2}{\alpha_i}}_{=e}$$

$$= \sum_{i=1}^k \alpha_i z_i + 2\sum_{i=k+1}^n d_i z_i + e$$

Betrachte also $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $y \mapsto \begin{cases} y_i + \frac{d_i}{\alpha_i}, & i = 1 \dots k \\ y_i, & i = k+1, \dots n \end{cases}$ Translation

Dann

$$f(Q(H)) = \{z \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^k \alpha_i z_i + 2\sum_{i=k+1}^n d_i z_i + e = 0\}$$

OBdA $e \in \{-1, 0\}$ (durch normieren)

Fall 1 $d_{k+1} = \dots = d_n = 0 \Rightarrow$ (1) oder (2) mit $P = f$

Fall 2 $(d_{k+1}, \dots, d_n) \neq (0, \dots, 0)$

~~Betrachte $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$~~

~~Dann~~

Wähle $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ als eine Translation mit $g(z_i) = z_i$ $i < k+1$,

$g(2\sum_{i=k+1}^n d_i z_i + e) = 2z_{k+1}$, $g(z_i) = 0$ $i > k+1$.

Dann $g(f(Q(H))) = \{z' \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^k \alpha_i z_i^2 + 2z_{k+1} = 0\}$

Das ist Form (3)

Resultat: Wir können eine Quadrik also mittels HAT auf eine der Normalformen zurückführen und die „Form" dann ablesen. □

Welche Formen gibt es im $\mathbb{R}^2$? o.B.d.A. $\alpha_1 > 0$

Form	k	α_2		
(1)	1	~~$=0$~~	a^2x^2 ~~$+b^2y^2$~~ $= 1$	| |
(1)	2	>0	$a^2x^2 + b^2y^2 = 1$	⬭
(1)	2	<0	$a^2x^2 - b^2y^2 = 1$	⨯
(2)	1		$a^2x^2 = 0$	|
(2)	2	>0	$a^2x^2 + b^2y^2 = 0$	•
(2)	2	<0	$a^2x^2 - b^2y^2 = 0$	X
(3)	1		$a^2x^2 - 2y = 0$	∪
$\alpha_1 < 0$:			$a^2x^2 = -1$	

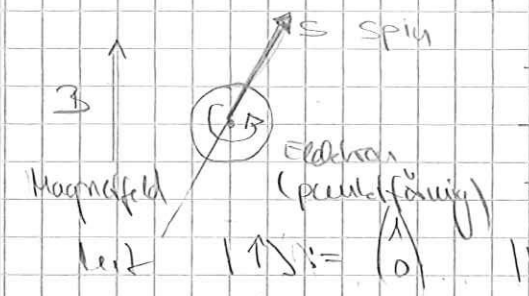
Anwendungen der Hauptachsentransformation (engl. PCA):

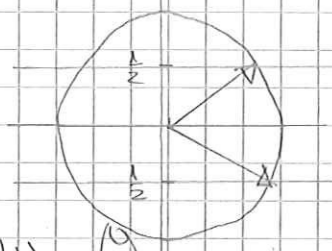
- Erkennung von hoher Korrelation in Daten
  „Wer Schuhe der Marke x kauft, mag Kleider der Marke y"

- ~~Gesichtserkennung~~
- Mustererkennung und Klassifizierung
  - Gesichtserkennung
  - Stimmerkennung
  - medizinische Diagnose

13. Unitäre Vektorräume

13.1 Bsp. (Qubit):





$|\uparrow\rangle$ up

$|\downarrow\rangle$ down

Z-Achse $|\uparrow\rangle := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $|\downarrow\rangle := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Quantenmechanik: Weitere Einschränkungen werden gelassen, aber auch die Quantenlehre besagt sich das Elektron in einem Zustand $|\psi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, wobei $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ misst $\{|\alpha|^2, |\beta|^2\}$ gemessen wird.

$$|\psi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle \hat{=} \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r_0 e^{i\varphi_0}\\ r_1 e^{i\varphi_1}\end{pmatrix} \quad r_0, r_1 \geq 0,\ r_0^2 + r_1^2 = 1$$

Qubit := komplexe Linearkombination aus 2 komplexen Zuständen

"Unterschied"

$$\delta = \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2}$$ – globale Phase

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$$ – relative Phase

$\psi \in [0, 4\pi[$

$$= e^{i\delta} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\cos\frac{\psi}{2} \\ e^{i\varphi/2}\sin\frac{\psi}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{e^{i(\delta-\varphi/2)}\cos\tfrac{\psi}{2}}_{=\alpha} \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{=|\uparrow\rangle} + \underbrace{e^{i(\delta+\varphi/2)}\sin\tfrac{\psi}{2}}_{=\beta} \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{=|\downarrow\rangle}$$

$P(|\uparrow\rangle) = |\alpha|^2 = \left(\cos\frac{\psi}{2}\right)^2$ Wkeit der Messung von $|\uparrow\rangle$

$P(|\downarrow\rangle) = |\beta|^2 = \left(\sin\frac{\psi}{2}\right)^2$ — " — $|\downarrow\rangle$

Spaltenweise: $|\psi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ "ket"

$\langle\psi| = \bar{\alpha}|\uparrow\rangle^T + \bar{\beta}|\downarrow\rangle^T = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}^T = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in \mathbb{C}^{2*}$ "bra"

$\varphi = \begin{pmatrix}\gamma\\\delta\end{pmatrix}$, $\langle\psi|\varphi\rangle := \langle\psi\,||\,\varphi\rangle = (\bar{\alpha}, \bar{\beta})\begin{pmatrix}\gamma\\\delta\end{pmatrix} = \bar{\alpha}\gamma + \bar{\beta}\delta \in \mathbb{C}$ "braket"

Es gilt:

$|0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1,0) = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

$|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0,1) = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

$|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = I_2 = \sigma_0$

$|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \sigma_1$

$-i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} = \sigma_2$

$|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = \sigma_3$

} Pauli-Matrizen

Es gilt:

i) $\sigma_i^* = \sigma_i$ "Hermitesch"

ii) $\sigma_i^2 = \sigma_i\sigma_i = \sigma_i\sigma_i^* = I_2$ "unitär"

"unital"

$\langle\sigma_i\rangle_{i=1}^4 = \mathbb{C}^{2\times 2}$ Basis

$A = A^* \in \mathbb{C}^2$ "observable"

$\Lambda(A)$ mögliche Messwerte

$E_A(|\psi\rangle) = \langle\psi|A|\psi\rangle$ Erwartungswert der Messung von Zustand $|\psi\rangle$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Lambda(A) = \{0,1\}$, $\psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

$P_\psi(0) = |\alpha|^2$, $P_\psi(1) = |\beta|^2$

$E_\psi(|\psi\rangle) = (\bar\alpha, \bar\beta)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \bar\beta\beta = |\beta|^2 = \left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(1-\cos\vartheta)$

$\vartheta = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\pi \\ \pi \end{matrix} \right\} \Rightarrow E_\psi(|\psi\rangle) = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \right\}$.

1.32 Def. (Unitärer Vektorraum): Sei V ein $\mathbb{C}$-VRaum

i) Ein Skalarprodukt auf V ist eine Abb.

$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$

mit folgenden Eigenschaften:

α) $\langle v,w\rangle = \overline{\langle w,v\rangle}$ $\forall v,w \in V$ hermitesch

β) $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v,w\rangle$ $\forall v,w \in V, \lambda \in \mathbb{C}$ lin. in 1. Arg.

$\langle v+v', w\rangle = \langle v,w\rangle + \langle v',w\rangle$ $\forall v,v',w \in V$

γ) $\langle v,v\rangle \in \mathbb{R}_{>0}$ $\forall v \in V \setminus \{0\}$ pos. def.

Schreib/Sprechweise: $\overline{\langle v,w\rangle} = \langle w,v\rangle = \begin{cases} \langle v,w\rangle \\ \langle v,w\rangle \end{cases}$ $\forall v,w \in V, \lambda \in \mathbb{C}$ Sesquilinear

ii) $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ unitärer VRaum

iii) $\langle v,w\rangle = 0 \Leftrightarrow v \perp w \Leftrightarrow v,w$ orthogonal $\forall v,w \in V$

iv) $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$ $\forall v \in V$ (durch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte) Norm auf V

Analoges def man Normierung, Orthonormalbasis und Projektion, ONS, ONB, ONS, ONB, ONSV

v) $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}} := \mathrm{Re}\,\langle\cdot,\cdot\rangle$

$\angle(v,w) = \arccos \frac{\langle v,w\rangle_{\mathbb{R}}}{\underbrace{\|v\|_{\mathbb{R}}}_{=\|v\|} \underbrace{\|w\|_{\mathbb{R}}}_{=\|w\|}}$ $\forall v,w \in V$ Winkel zwischen v und w

vi) $Q^* = \overline{Q}^T$ $\forall Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ adjungierte Matrix

vii) $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär $\Leftrightarrow Q^*Q = \mathbb{1} \Leftrightarrow QQ^* = \mathbb{1} \Leftrightarrow Q^* = Q^{-1}$

Anwendung des Fundamentalsatzes der Algebra: Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle

viii) $f: V \to V$ unitär $\Leftrightarrow \langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle \quad \forall v, w \in V$

ix) $(\langle b_i, b_j\rangle)_{i,j=1,\dots,n}$ in Gram-Matrix von $\langle \cdot,\cdot\rangle$ bzgl. Basis $\{b_i\}_{i=1}^n$

x) $f^*: V \to V$ adjungierte Abb zu $f: V \to V$

$\Leftrightarrow \langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle \quad \forall v, w \in V$

xi) $A^* = \overline{A}^T$ adjungierte Matrix $\forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}$

xii) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hermitesch $\Leftrightarrow A = A^*$

13.3 Satz (Unitärer Vektorraum): Unitäre VRäume haben bezüglich die obigen eigenschaften wie euklidische:

i) Die Fortsetzung für die Norm, die CSU, die Δ-Ungleichung gelten. (und Abstand)

ii) $\operatorname{Re}\langle v, w\rangle = \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right)$ Polarisierung

iii) Im ONS ist Vu. wrt. ONB / OND ex. und können mit dem GSV berechnet werden. Koordinaten bzgl. ONB / OND berechnen wie im euklid. Fall. Lagerung und Sind unabhängig. Fortsetzungen für $\perp$ und $\pi_U(v)$ übertragen sich.

iv) Unitäre Abb. sind abstandserhaltend und längenerhaltend, und haben ± 1 als mögliche Eigw. Sie bilden ONB auf ONB ab. (bzgl. ONBen)
Die Darstellungsmatrizen unitärer Abb sind genau die unitären Matrizen (in endl. dim. Fall)

v) Zu jeder lin. Abb ex. genau eine adjungierte Abb. Die Darst. matrix der adj. Abb ist die adj. Matrix.

vi) $v = Dx$, $w = Dy$, $A = B^*B$, B Basis von V. Dann ist $\langle v, w\rangle = x^T A \bar{y}$

Umgekehrt def. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ durch $\langle x, y\rangle := x^T A \bar{y}$ ein Skalarprodukt genau dann, wenn A hermitesch und pos. def.

19.

13.4 Bsp (Unitärer Vektorraum):

i) $\langle \cdot,\cdot\rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \langle v, w\rangle \mapsto v^T \bar{w}$ Std-Prod. im $\mathbb{C}^n$

ii) Die Pauli-Matrizen σ_i, $i = 1,2,3$ sind hermitesch und unitär.

iii) $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $|\sigma_2 - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + i^2 = \lambda^2 - 1$

$= (\lambda - 1)(\lambda + 1) \Rightarrow \exists T \in \mathbb{C}^2 : TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (153)

$A A^* = A^* A = I_2$

iv) $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ | $|A - \lambda I| = \lambda^2 - i^2 = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$

$\Rightarrow \exists T \in \mathbb{C}^{2\times 2}: TAT^{-1} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ | $AA^* = A^*A = \mathbb{1}$ | $A \neq A^*$

v) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ | $|A - \lambda I| = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$

$\Rightarrow \exists T \in \mathbb{C}^{2\times 2}: TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ | $AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \neq A^*A = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

13.5 Def. (normale Endomorphismen, normale Matrizen): Sei V ein unitärer n-dim. $\mathbb{C}$-Raum.

i) $f: V \to V$ *normal* $:\Leftrightarrow f^* \circ f = f \circ f^*$.

ii) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *normal* $:\Leftrightarrow A^*A = AA^*$

13.6 Bsp. (normale End. / Matrizen): Sei V ein n-dim unitärer $\mathbb{C}$-Raum.

a) $f: V \to V$ unitär $\Rightarrow f$ normal

b) $f: V \to V$ hermitesch $\Rightarrow f$ normal

c) f normal $\Rightarrow \exists$ Basis $\mathcal{B}$ von V, $A_{\mathcal{B}}(f)$ normal

Bew.:

a) f unitär $\Rightarrow f^*f = id_V = ff^*$.

b) f hermitesch $\Leftrightarrow f^* = f \Rightarrow f^*f = ff = ff^*$.

c) $\exists A_{\mathcal{B}}(f) = A \Rightarrow \exists A_{\mathcal{B}}(f^*f) = A^*A = AA^* = \exists A_{\mathcal{B}}(ff^*)$. ☐

13.7 Satz (Diagonalisierbarkeit): Sei V ein n-dim unitärer $\mathbb{C}$-Raum, $f: V \to V$. Dann gilt:

a) f normal $\Leftrightarrow \exists$ ONB $\mathcal{B}$ von V aus EVen von f.

b) f hermitesch $\Leftrightarrow f$ normal und $\Delta(f) \subseteq \mathbb{R}$, d.h. alle EWe sind reell

c) f unitär $\Leftrightarrow f$ normal und $\Delta(f) \subseteq \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$, d.h. alle EWe haben Betrag 1.

Bew.:

a) "$\Rightarrow$"

Ind.-Anf. $n = \dim V$

Ind.-Anf. $n = 0, 1$ ✓

Ind.-Ann.: gelte die Aussage für $0 \leq k \leq n$

Ind.-Schluß $n \to n+1$.

Sei $\lambda \in \Delta(f) \neq \emptyset$ und $U = \operatorname{Eig}(f, \lambda)$, $\dim U = k \geq 1$.

Sei $\mathcal{B} = \{b_i\}_{i=1}^{k}$ ONB von U,

Sei $g = f - \lambda \mathrm{id}_V$

$\Rightarrow g^* = (f - \lambda \mathrm{id}_V)^* = f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}_V$

$\Rightarrow g^* g = g g^* \Leftrightarrow g$ ist Normal

Bem: $\operatorname{Eig}(f, \lambda) = \operatorname{Eig}(f^*, \overline{\lambda})$.

Beg.: $v \in \operatorname{Eig}(f, \lambda) \Leftrightarrow g(v) = 0 \Leftrightarrow \langle g(v), g(v) \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \langle v, g^*(g(v)) \rangle = \langle v, g(g^*(v)) \rangle = 0 = \langle g(g^*(v)), v \rangle$

$\Leftrightarrow \langle g^*(v), g^*(v) \rangle = 0 \Leftrightarrow g^*(v) = 0 \Leftrightarrow v \in \operatorname{Eig}(f^*, \overline{\lambda})$ ◇

Bem.: $f(U), f^*(U) \subseteq U$ ✓, $f(U^\perp), f^*(U^\perp) \subseteq U^\perp$

Beg.: Sei $v \in U^\perp$, $w \in U = \operatorname{Eig}(f, \lambda)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \langle w, v \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle \lambda w, v \rangle = \langle \lambda w, v \rangle = \langle f^*(w), v \rangle = \langle w, f(v) \rangle \\ 0 = \langle w, v \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle \lambda w, v \rangle = \langle \lambda w, v \rangle = \langle f(w), v \rangle = \langle w, f^*(v) \rangle \end{cases}$$ ◇

Also ist $f|_{U^\perp}$ wohldef und normal. Wegen Ind.-Ann. ex.

ONB $\{b_{k+1}, \dots, b_n\}$ von $U^\perp$ aus EVen von $f|_{U^\perp}$.

$\{b_i\}_{i=1}^{n}$ ist dann die gesuchte ONB.

"$\Leftarrow$": Sei $\{b_i\}_{i=1}^{n}$ ONB aus EVen von f

$\Rightarrow \exists_{\mathcal{B}} \Delta_{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{diag}(\lambda_i)_{i=1}^{n} = \Delta$, $\Delta_{\mathcal{B}}(f^*) = \operatorname{diag}(\overline{\lambda_i}) = \Delta^* \Rightarrow \Delta\Delta^* = \Delta^*\Delta$

b) "$\Rightarrow$": Sei $\lambda \in \Delta(f)$, $v \in \operatorname{Eig}(f, \lambda) \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle f(v), v \rangle = \langle v, f(v) \rangle = \overline{\lambda} \langle v, v \rangle$

$\langle v, v \rangle \neq 0$

$\Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$.

"$\Leftarrow$" Sei $\mathcal{B}$ ONB von V aus EVen von f

$\Rightarrow \exists_{\mathcal{B}} \Delta_{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{diag}(\lambda_i)_{i=1}^{n} = \Delta \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow \Delta = \Delta^*$

c) "$\Rightarrow$": Sei $\lambda \in \Delta(f)$, $v \in \operatorname{Eig}(f, \lambda) \setminus \{0\}$.

$\Rightarrow 0 \neq \langle v, v \rangle = \langle v, f^*(f(v)) \rangle = \langle f(v), f(v) \rangle = \lambda \overline{\lambda} \langle v, v \rangle$.

"$\Leftarrow$" Wie b) mit $\lambda_i \overline{\lambda_i} = 1$. □