Freie Universität Berlin
FB Mathematik und Informatik
Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Ralf Borndörfer
Vanessa Schreck

# Lineare Algebra 2 (Lehramt)

## Probeklausur

**Aufgabe 1** **10 Punkte**

Wahr oder falsch? Ein Punkt pro richtiger Antwort, ein weiterer für eine kurze Begründung bzw. ein Gegenbeispiel.

| Wahr | Falsch | |
|---|---|---|
| ☐ | ☐ | Für jedes Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ im $\mathbb{R}^2$ gilt $\langle \binom{1}{0}, \binom{0}{1} \rangle = 0$. |
| ☐ | ☐ | Sei $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Dann ist $dim(Eig(A,1)) \geq 1$. |
| ☐ | ☐ | Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann haben $A$ und $A^T$ die gleichen Eigenwerte. |
| ☐ | ☐ | Ist eine Matrix $A$ diagonalisierbar, so ist $A^2$ auch diagonalisierbar. |
| ☐ | ☐ | Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist orthogonal. |

**Aufgabe 2** **5+5 Punkte**

Geben Sie jeweils ein Beispiel an und begründen Sie **kurz**, dass Ihr Beispiel die geforderten Eigenschaften erfüllt.

a) Geben Sie ein Beispiel für zwei Matrizen $A$ und $B$ mit dem gleichen charakteristischen Polynom, wobei $A$ diagonalisierbar ist und $B$ nicht.

b) Geben Sie ein Beispiel für einen Endomorphismus des $\mathbb{R}^3$, der nicht diagonalisierbar ist.

**Aufgabe 3** **5+5 Punkte**

Geben Sie Rechenwege an und begründen Sie Ihre Antworten.

a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\varphi_A(\lambda)$ von $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Bestimmen Sie $Eig(A, -2)$ für $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

**Aufgabe 4** **10 Punkte**

Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(A)$ an.

**Aufgabe 5** **4+6 Punkte**

Sei $V$ ein euklidischer Vektorraum und $a \in V, a \neq 0$ sowie $f_a(v) = -v + \langle a, v \rangle a$.
Zeigen Sie:

a) $a$ ist ein Eigenvektor von $f_a$,

b) $f_a$ ist selbstadjungiert.

**Aufgabe 6** **10 Punkte**

Sei $V$ ein $n$-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $\{x_1, \ldots x_k\}$ ein Orthonormalsystem von $V$. Zeigen Sie, dass

$$\|v\|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} \langle v, x_i \rangle^2 \qquad \forall v \in V.$$