Freie Universität Berlin
FB Mathematik und Informatik
Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Ralf Borndörfer
Stephan Schwartz

Lineare Algebra 2 (Lehramt)

Übungsblatt 1

Abgabe: bis Mi, 25.10.2017, 12:15 Uhr

Auf diesem Übungszettel sollen die zentralen Aussagen aus der Linearen Algebra I wiederholt werden. Sie stellen die Grundlage für die in dieser Vorlesung vorkommenden Themen dar. Insbesondere die Zusammenhänge zwischen linearen Abbildungen, gewählten Basen und der resultierenden darstellenden Matrix sind von Bedeutung.

Für die Beweise auf diesem Übungsblatt sollten Sie die Methode des Ringschlusses verwenden (i $\Longrightarrow$ ii $\Longrightarrow$ iii $\Longrightarrow$ i).

Sei $f : V \to W$ ein Homomorphismus zwischen $\mathbb{R}$-Vektorräumen V und W und sei $A := {}_CM_B(f) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die darstellende Matrix zu gegebenen Basen $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ von V und $C := \{c_1, \dots, c_m\}$ von W.

Aufgabe 1.1 — 10 Punkte

Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) $\forall w \in W\ \exists v \in V : \quad f(v) = w \qquad (f \text{ ist surjektiv})$

ii) $\{f(b_i) : b_i \in B\}$ ist ein Erzeugendensystem von W.

iii) Für $y \in \mathbb{R}^m$ hat $Ax = y$ mindestens eine Lösung

Aufgabe 1.2 — 10 Punkte

Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) $\forall x, y \in V : \quad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y \qquad (f \text{ ist injektiv})$

ii) $ker(f) = \{0\}$

iii) Die Menge $\{f(b_i) : b_i \in B\}$ ist linear unabhängig.

Abgabe in Übungsgruppen von zwei bis drei Studierenden (entweder in den Tutorenfächern (A3) oder vor Beginn der Vorlesung im ZIB-Hörsaal).

Homepage zu dieser Veranstaltung: http://www.zib.de/ws17_Lineare_Algebra_II