Freie Universität Berlin
FB Mathematik und Informatik
Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Ralf Borndörfer
Vanessa Schreck

Lineare Algebra 2 (Lehramt)

Übungsblatt 11

Abgabe: bis Mi, 17.01.2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 11.1 — 10 Punkte

Betrachten Sie den $\mathbb{R}^2$ mit dem Skalarprodukt $\langle \binom{x_1}{x_2}, \binom{y_1}{y_2} \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$ sowie die Vektoren $w_1 = \binom{1}{3}$ und $w_2 = \binom{9}{2}$. Orthonormalisieren Sie die beiden Vektoren nach dem Verfahren von Gram-Schmidt.

Aufgabe 11.2 — 5+5 Punkte

Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ dient dazu, einen Vektor $v \neq 0$ zu finden, der bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal auf zwei gegebenen linear unabhängigen Vektoren steht. Es ist wie folgt definiert:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ -x_1y_3 + x_3y_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $x \perp (x \times y)$ und $y \perp (x \times y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$.

b) Berechnen Sie die folgenden Kreuzprodukte:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 11.3 — 10 Punkte

Gegeben eine Menge von Städten $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ und eine Matrix

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 73 & 456 & 269 \\ 73 & 0 & 477 & 196 \\ 456 & 477 & 0 & 583 \\ 269 & 196 & 583 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definiert $d : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ mit $d(S_i, S_j) = a_{ij}$ eine Metrik auf $\mathcal{S}$? In anderen Worten: Ist A eine sinnvolle Abstandsmatrix zwischen den Städten?

Aufgabe 11.4 — 10 Punkte

Im $\mathbb{R}^3$ mit Standardskalarprodukt seien $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ a \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$ und $p = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben. Berechnen Sie den Abstand zwischen der Geraden G und dem Punkt p.