Freie Universität Berlin
FB Mathematik und Informatik
Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Ralf Borndörfer
Vanessa Schreck

Lineare Algebra 2 (Lehramt)

Übungsblatt 12

Abgabe: bis Mi, 24.01.2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 12.1 **10 Punkte**

Sei V ein euklidischer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum mit $\{0\} \neq U \neq V$. Dann gilt $V = U \oplus U^\perp$, d.h. insbesondere kann jedes Element $v \in V$ eindeutig als Summe $v = u + w$ dargestellt werden, wobei $u \in U$ und $w \in U^\perp$.
Wir betrachten die Abbildung $f : U \oplus U^\perp \to U \oplus U^\perp$ mit $u + w \mapsto u - w$, wobei $u + w$ oben genannte eindeutige Darstellung ist. Zeigen Sie, dass f eine orthogonale Abbildung ist.

Aufgabe 12.2 **5+5 Punkte**

Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $A = B^T B$. Zeigen Sie:

a) A ist positiv semidefinit (das heißt $v^T A v \geq 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n$) und symmetrisch.

b) Wenn B invertierbar ist, dann ist A positiv definit.

Aufgabe 12.3 **5+5 Punkte**

Betrachten Sie den $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und den Endomorphismus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $(a, b, c)^T \mapsto (2a - c, 3b, -a + 2c)^T$.

a) Zeigen Sie, dass f selbstadjungiert ist.

b) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von f.

Aufgabe 12.4 **5+5 Punkte**

Gegeben der $\mathbb{R}^2$ mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, für das die Vektoren $\binom{1}{1}$ und $\binom{1}{2}$ orthonormal sind. Ferner sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

b) Für welche Werte t ist A selbstadjungiert bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$?