Freie Universität Berlin
FB Mathematik und Informatik
Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Ralf Borndörfer
Stephan Schwartz

Lineare Algebra 2 (Lehramt)

Übungsblatt 6

Abgabe: bis Mi, 29.11.2017, 12:00 Uhr

Aufgabe 6.1 — 6+4 Punkte

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spaltenstochastisch mit $a_{ij} > 0 \; \forall i, j$.

a) Zeigen Sie: $v \in Eig(A, 1) \Longrightarrow v_i > 0 \; \forall i$ oder $v_i < 0 \; \forall i$.

b) Folgern Sie, dass $dim(Eig(A, 1)) = 1$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $|\sum_i v_i| < \sum_i |v_i|$ falls v Komponenten mit verschiedenen Vorzeichen besitzt.

Aufgabe 6.2 — 4+3+3 Punkte

Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus und sei $\lambda \in \Lambda(f)$ mit algebraischer Vielfachheit $\nu(f, \lambda) = r$. Wir definieren $Hau(A, \lambda) := \{v \in V \;:\; (f - \lambda Id)^r(v) = 0\}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) $Hau(A, \lambda)$ ist ein Unterraum von V mit $Eig(A, \lambda) \subseteq Hau(A, \lambda)$.

b) $f \circ (f - \lambda Id) = (f - \lambda Id) \circ f$.

c) $f\,(Hau(f, \lambda)) \subseteq Hau(f, \lambda)$.

Aufgabe 6.3 — 10 Punkte

Berechnen Sie eine Jordanbasis B des $\mathbb{R}^3$ bezüglich

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.4 **5*2 Punkte**

Die Folge der Fibonacci-Zahlen gilt als eine der "schönsten" Folgen der Mathematik und ist rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \qquad \text{für } n \geq 2 \end{aligned}$$

In vielen Fällen ist man jedoch an einer *geschlossenen Form* der Folge interessiert, das bedeutet, dass man zum Beispiel f_{50} direkt mit einer Formel berechnen kann, ohne die Zahlen $f_{49}, f_{48}, f_{47}, \ldots, f_2$ vorher zu berechnen. Diese Form herauszufinden, ist das Ziel dieser Aufgabe.

Die Fibonacci-Zahlen sind nicht nur wichtig in der Mathematik, sondern finden sich auch vielfach in der Kunst oder der Natur. Die Zahlenfolge führt nämlich auf den *goldenen Schnitt*, ein Verhältnis, das als sehr ästhetisch angesehen wird. Der goldene Schnitt ist $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618034$ und in dieser Aufgabe brauchen Sie auch die Zahl $\psi := 1 - \varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

a) Berechnen Sie f_i sowie $\frac{f_i}{f_{i-1}}$ für $i \in \{2, \ldots, 10\}$ (als Dezimalzahl).

b) Sei nun $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Beweisen Sie: $A^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$.

c) Zeigen Sie: $\Lambda(A) = \{\varphi, \psi\}$ und $\begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \in Eig(A, \varphi)$ sowie $\begin{pmatrix} -1/\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \in Eig(A, \psi)$.

d) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine reguläre Matrix S mit $D = S^{-1}AS$.

e) Geben Sie mithilfe von (b) und (d) eine direkte (nicht rekursive) Berechnungsvorschrift für f_n an.