Freie Universität Berlin
FB Mathematik und Informatik
Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Ralf Borndörfer
Stephan Schwartz

# Lineare Algebra 2 (Lehramt)

## Übungsblatt 8

Abgabe: bis Mi, 13.12.2017, 12:00 Uhr

### Aufgabe 8.1 — 10 Punkte

Zeigen Sie, dass die Abbildung $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\psi(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_2y_1 - x_2y_3 + x_1y_2 - x_3y_2$ ein Skalarprodukt definiert.

### Aufgabe 8.2 — 10 Punkte

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Zeigen Sie:

$$x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \iff \lambda > 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda(A).$$

*Bemerkung:* Die Matrix $A$ heißt in diesem Fall *positiv definit*.

### Aufgabe 8.3 — 2+4+4 Punkte

Betrachten Sie den $\mathbb{R}^3$ mit dem Skalarprodukt aus Aufgabe 8.1. Bestimmen Sie das orthogonale Komplement von folgenden Unterräumen:

a) $U_1 = \{0\}$

b) $U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

c) $U_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

*Aufgabe 8.4 auf der Rückseite*

**Aufgabe 8.4** **3+3+2+2 Punkte**

Ein Graph ist eine Menge $V$ zusammen mit einer symmetrischen Relation $E \subseteq V^2$. Bildlich kann man sich dies gut vorstellen, wenn man für jedes Element der Menge $V$ einen Punkt (*Knoten*) malt und die Knoten $u$ und $v$ mit einer Linie (*Kante*) verbindet, wenn $(u,v) \in E$. Die Knoten $\{u \in V : (u,v) \in E\}$ heißen *Nachbarn* von $v$ und der Graph heißt *zusammenhängend*, wenn es für je zwei Knoten $u \neq v \in V$ eine Folge von Knoten $(u = v_0, v_1, \ldots, v_k = v)$ gibt mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für ein $k$. Eine solche Folge nennen wir einen Kantenzug der Länge $k$ von $u$ nach $v$.

Viele praktische Probleme lassen sich mithilfe von Graphen modellieren (Verkehrsnetzwerke, Produktionsprozesse, Zuordnungsprobleme,...), weshalb sie in der angewandten Mathematik von großer Bedeutung sind. In dieser Aufgabe wollen wir einen Zufallsprozess auf einem Graphen beobachten und eine wichtige Eigenschaft beweisen. Der Zufallsprozess "springt" in jedem Schritt von einem Knoten zu einem der benachbarten Knoten mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Von dort "springt" er im nächsten Schritt wieder weiter und das geht immer so weiter.

Für einen gegebenen zusammenhängenden Graphen $(V,E)$ mit $|V| = n$ betrachten wir nun also die *Übergangsmatrix* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ des beschriebenen Zufallsprozesses. Der Eintrag $a_{ij} \in [0,1]$ der Übergangsmatrix gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass der Prozess in einem Schritt von Knoten $j$ zu Knoten $i$ wechselt. Zunächst können wir beobachten, dass $A$ eine spaltenstochastische Matrix ist. Wir wollen zeigen, dass es einen (bis auf Skalierung) eindeutigen Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert 1 gibt.

a) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $a_{ij}^k$ der Eintrag von $A^k$ in der $i$-ten Zeile und $j$-ten Spalte. Zeigen Sie, dass $a_{ij}^k > 0$, genau dann wenn ein Kantenzug der Länge $k$ von $j$ nach $i$ existiert.

b) Sei $B = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} A^k$. Zeigen Sie, dass $B$ spaltenstochastisch ist mit positiven Einträgen (*Bemerkung:* $A^0 = I_n$).

c) Beweisen Sie: $v \in Eig(A,1) \Longrightarrow v \in Eig(B,1)$.

d) Folgern Sie, dass $dim(Eig(A,1)) = 1$.

Ein Beispielgraph:

$$V = \{1, 2, \ldots, 13\}$$

$$E = \big\{\{1,2\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,7\}, \{5,6\}, \{6,7\}, \{6,8\}, \{6,11\}, \{8,9\}, \{9,10\}, \{9,12\}, \{10,11\}, \{10,13\}, \{12,13\}\big\}$$