Freie Universität Berlin
FB Mathematik und Informatik
Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Ralf Borndörfer
Stephan Schwartz

Lineare Algebra 2 (Lehramt)

Übungsblatt 9

Abgabe: bis Mi, 20.12.2017, 12:00 Uhr

Aufgabe 9.1 — 5+5 Punkte

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und f ein Endomorphismus auf V. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $\langle f(v), v\rangle = 0 \quad \forall v \in V \implies f \equiv 0.$

b) $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle \quad \forall x, y \in V \implies ker(f) = im(f)^\perp.$

Aufgabe 9.2 — 5+2+3 Punkte

Betrachten Sie den $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und die beiden Unterräume $U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ sowie die Punkte $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

In dieser Aufgabe geht es um den "Abstand" zwischen den beiden Geraden $G_1 = p_1 + U_1$ und $G_2 = p_2 + U_2$.

a) Finden Sie Vektoren $x \in G_1$ und $y \in G_2$ mit $(x - y) \perp U_1$ und $(x - y) \perp U_2$.

b) Berechnen Sie $\|x - y\|$.

c) Zeigen Sie, dass für beliebige $x' \in G_1, y' \in G_2$ gilt: $\|x - y\| \leq \|x' - y'\|$.
Hinweis: Schreiben Sie $x' - y' = x - y + w$ und zeigen Sie $w \perp (x - y)$.

Aufgabe 9.3 — 10 Punkte

Zeigen Sie, dass es kein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 2, \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 4.$$

Aufgabe 9.4 — 10 Punkte

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Zeigen Sie:

$$A \text{ ist positiv definit} \iff a > 0 \text{ and } det(A) > 0.$$