

1. Einführung

1.1 Zus (Begriffsabk., Gedank.) :

a) Optimierung, var. lateinisch optimum, "das Beste, das Höchstmäß"

b) extrem

i) Euler [1744] : Variationsrechnung "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti" (Eine Methode, um Kurven zu finden, denen eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade zukommt oder die Log. des Isoperimetrischen Problems, wenn es im weitesten Sinne des Wortes aufgefasst wird.)

"Zielfkt."
"Nebenbed."

$$\min \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \gamma'(t), t) dt$$

$$\text{s.t. } \gamma(t_0) = a, \gamma(t_1) = b$$



$$\max \int \gamma$$

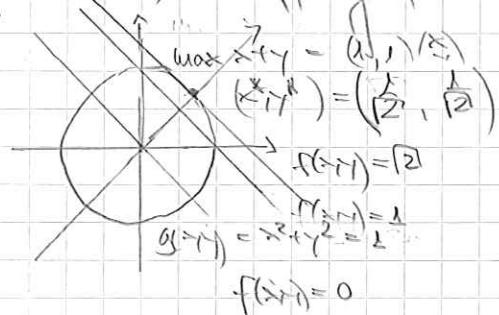
$$\text{s.t. } L(\gamma) \leq K$$

Log: Kreis vom Umfang K

ii) Lagrange [1762] : notwendige Optimalitätsbedingungen

$$\max f(x)$$

$$\text{s.t. } g(x) = 0$$



x^* lokal optimal

$$\rightarrow \exists \lambda^* : \nabla f(x^*) = \lambda^* \nabla g(x^*)$$

$$g(x^*) = 0$$

$\{g=0\}$ berührt $\{f=12\}$ in (x^*, y^*) tangential

$$\lambda^* = \frac{1}{12} = (1, 1) = \frac{1}{12} \left(2 \cdot \frac{1}{12}, 2 \cdot \frac{1}{12} \right)$$

iii) Monge [1782] : (Masse-)Transportproblem

X verschiedene Räume

mu Wahsch. maßen

$\gamma : X \rightarrow Y$ injektiv "Transportfunktion"

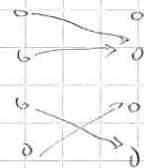
$\mu(\gamma^{-1}(B)) = \nu(B) \quad \forall B \subseteq Y$ möglich "Massenerhaltung"

$$c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$$

Transportkostenfunktion (z.B. $c(x,y) = \|x-y\|$)

$$\min \int_X c(x, \gamma(x)) d\mu(x)$$

$$\text{s.t. } \gamma \text{ inj., } \mu(\gamma^{-1}(B)) = \nu(B)$$



iv) Tschubyscheff [1854]: Minimax-Konv. Opt.

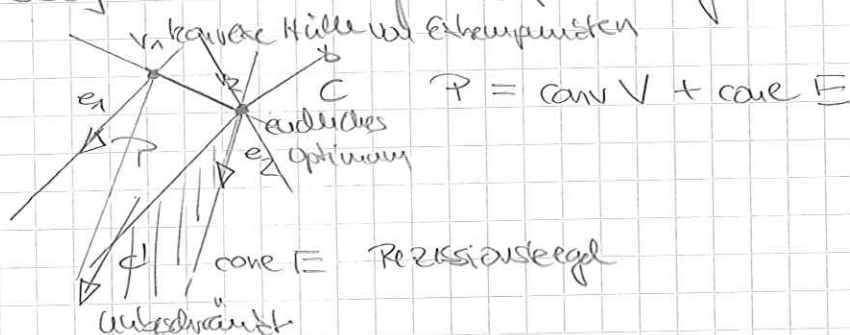
$$\min_{\alpha} \max_{t \in T} |f(t) - \sum_i \alpha_i f_i(t)|, \quad f_i \text{ Polynom von Grad } i$$

Bsp für $f \equiv 1, f_i(t) = t^i, T = [0,1]$: Tschubyscheff-Polynome

v) Minkowski [1896]: Darstellungssatz für Polyeder

$$\min Jx$$

$$\text{s.t. } x \in P$$



vi) Farkas [192]: Lösbarkeit von Ungleichungsproblemen

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

$$\{Ax \leq b\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} b^T u < 0 \\ A^T u \geq 0 \\ u \geq 0 \end{cases} = \emptyset \Leftrightarrow \min \begin{cases} b^T u \\ A^T u \geq 0 \\ u \geq 0 \end{cases} \geq 0$$

es ist wichtig zu prüfen, ob überhaupt eine Lsg. existiert!

Vgl. Perron-Paradoxon [1913]: $\max_{n \in \mathbb{N}} n \in \mathbb{N}$.

Sei $n = \arg \max_{n \in \mathbb{N}} n$. Ann.: $n > 1 \Rightarrow n^2 > n \Rightarrow n = \underline{1}$.

ex. eines Max. wird fälschlich angenommen

vii) Kantorovich [1939], Koopmans [1942], Dantzig [1947]:

Lineare Optimierung, Schattenpreise, Simplexalgorithmus

Nobelpreis für Ökonomie 1975 für Kantorovich und Koopmans

$$(LP) \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0$$

"Primal"

$$\Leftrightarrow \min c^T x \\ Ax \leq b \\ -Ax \leq -b \\ -x \leq 0$$



$$= \max b^T y, A^T y = c \\ T = \{Ax = b, x \geq 0\}$$

duales Opt. Problem

Von Hermann S. Morgenstern [1944]: Spieltheorie (äquivalent)

2 Spieler, mit Strategien $1, \dots, n$, Auszahlungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$p, q \in [0,1]^n \text{ Wkanten für gemischte Strategien von Spieler 1, 2}$$

$$\max_{p^T \mathbb{1} = 1, p \geq 0} \min_{q^T \mathbb{1} = 1, q \geq 0} p^T A q = \min_q \max_p p^T A q$$

Minimax-Satz

zuerst Spieler 1, dann Spieler 2

viii) Karmarkar [1989], Karmarkar [1997]: "worklinear QP",
 "constraint qualification" für nicht. Ungleichungen
 über $f(x)$
 $g(x) \leq 0$

ix) Khachiyan [1979]: Ellipsoidmethode (vordlg. binäre Suche)
 (updaten) erstes direkt effizientes Verfahren zur Lösg. von lin. Opt. Problemen

x) Karmarkar [1984]: "projective scaling method"
 erste inner-Punkt-Methode zur Lösg. von LPs (polynomiell)

1.2 Bsp (Lineares Programm, Dualität): Allen'sches AG

a) Allen AG Aktivität Lineares Programm:

2	1	max	Nutzen/h	max $2x + 1y$	(2)
1	1	≤ 2	Zuteilungswert	$x + y \leq 2$	(1)
1	0	≤ 1		$x \leq 1$	(2)
		≥ 0	h / Aktivität	$x \geq 0$	(3)
				$y \geq 0$	(4)

$P = \{x \leq b, x \geq 0\}$ gegeben

Optimalität $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \max \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Zielfunkt. $c^T \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $x, y \geq 0$

$\Rightarrow \max c^T x$
 $Ax \leq b$
 $x \geq 0$

$c^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3$
 $c^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}$
 $c^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

b) Wie können wir einfach beweisen,

dass $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ optimal ist?

Durch Manipulation der Ungleichungen:

$$x + y \leq 2 \quad (1) \quad x \geq 0$$

$$x \leq 1 \quad (2) \quad y \geq 0$$

$$2x + y \leq 3 \quad 1 \cdot (1) + 1 \cdot (2)$$

$\Rightarrow$ Zielfunktion! $c^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq 3$ aber $c^T \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ optimal

diese Schranke

Bestimmen kann man Ungleichungen addieren und mit positiven Skalaren multiplizieren und damit eine beliebig große Schranke bestimmen:

$$x + y \leq 2 \quad (1) \quad \lambda \geq 0$$

$$x \leq 1 \quad (2) \quad \mu \geq 0$$

$$\lambda(x+y) + \mu x \leq 2\lambda + \mu \rightarrow \min$$

$$2\lambda + 1 \cdot \mu \rightarrow \max$$

$$\Rightarrow \min 2\lambda + \mu$$

$$\lambda + \mu \geq 2$$

$$\lambda \geq 1$$

$$\lambda \geq 0$$

$$\mu \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \min \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda, \mu \geq 0$$

max $c^T x$ "Primales LP"

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Dualitätssatz

$$= \min$$

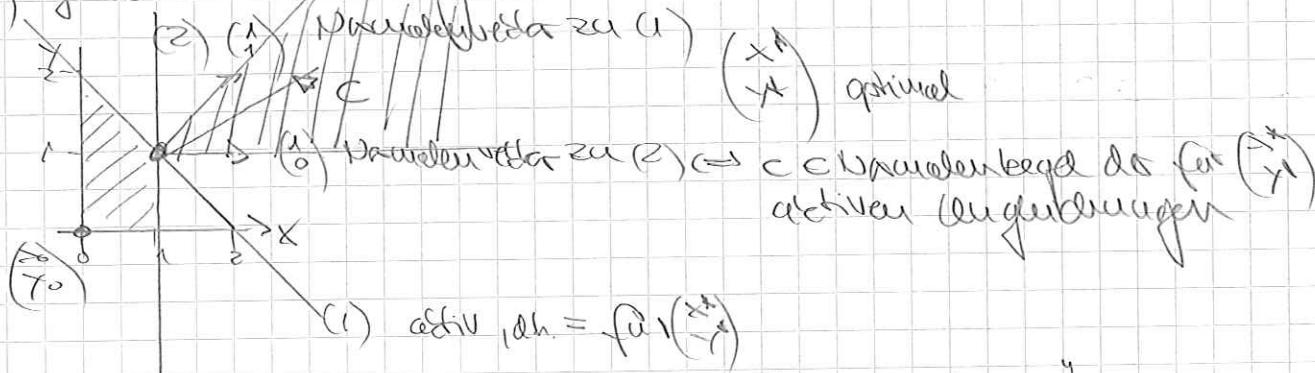
$$b^T y$$

"Duals LP"

$$A^T y \geq c$$

$$y \geq 0$$

c) geometrische Interpretation:



d) Berechnung des Optimums mittels "Simplextableau":

Führe "Schlupfvariablen" s_1, s_2 ein:

$$LP \Leftrightarrow \max 2x + y = z$$

$$\begin{matrix} x+y+s_1 & = & 2 \\ x & +s_2 & = & 1 \\ x, y, s_1, s_2 & \geq & 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} z = 2x + y \\ s_1 = 2 - x - y \\ s_2 = 1 - x \end{matrix} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

Sei $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Setze } x = x_0 = 0, \text{ also erhöhe } y \Rightarrow s_1 = 2 - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 2$$

$$s_2 = 1$$

$$z = y \rightarrow \max!$$

$$z = 0 + x - s_1$$

$$y = 2 - x - s_1$$

$$s_2 = 1 - x$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow \max x - s_1 = z - 2$$

$$\begin{matrix} x+y+s_1 & = & 2 \\ x & +s_2 & = & 1 \\ x, y, s_1, s_2 & \geq & 0 \end{matrix}$$

$$\text{Sei } \begin{pmatrix} x_0 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(4)

$\text{Jesse } S_1 = 0, \text{ aber erhöhe } X \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Y = 2 - X \Rightarrow X \leq 2 \\ S_2 = 1 - X \Rightarrow X \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow X \leq 1$

$\begin{array}{l} \text{max } -S_1 - S_2 = Z - 3 \\ \Leftrightarrow \begin{array}{l} Y + S_1 - S_2 = 1 \\ X + S_2 = 1 \\ X, Y, S_1, S_2 \geq 0 \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} Z = 3 - S_1 - S_2 \\ Y = 1 - S_1 + S_2 \\ X = 1 - S_2 \end{array} \quad \forall X, Y \in \mathbb{D}$

$\text{Setze } \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Es bangt man, S_1 oder S_2 zu erhöhen $\Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ optimal.