FU Berlin: SoSe 2019 (Mathematik 1, Weber)

Übungszettel Nr. 6, Abgabe 29.05.2019

Lernziel: Wissen, dass Integrieren und Differenzieren zueinander "invers" sind (Hauptsatz der Analysis). Stammfunktionen von elementaren und zusammengesetzten Funktionen bilden können - auch mit Hilfe von partieller Integration oder Substitution. Wissen, dass Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen durch Partialbruchzerlegung gefunden werden (Aufgabe 4 wäre allerdings für die Klausur zu aufwendig).

Aufgabe 1: (Stammfunktionen von Polynomen, Winkelfunktionen und Brüchen)

Bestimmen Sie die Stammfunktionen $F(x) = \int f(x)\ dx$ der folgenden Funktionen unter Verwendung von Tabellenwerken.

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

b) $f(x) = e^x$

c) $f(x) = x^{-2}$

d) $f(x) = \cos(x)$

e) $f(x) = sin(x)$

f) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

g) $f(x) = tan(x)$

h) $f(x) = artanh(x)$

i) $f(x) = yx^2 + sin(y)$

k) $f(x) = \frac{x^k}{k!}$

Aufgabe 2: (Partielle Integration)

Stammfunktionen von Produkten von Funktionen zu bestimmen, ist etwas schwieriger, als die Probleme in Aufgabe 1) zu lösen. Zu der Lösung der folgenden Probleme kann man die partielle Integration verwenden.

a) $\int \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx$

b) $\int e^x \cdot (2 - x^2)\ dx$

c) $\int e^x \cdot \sin(3x)\ dx$ (Tipp: partielle Integration zwei Mal anwenden)

Aufgabe 3: (Substitutionsregel)

Manchmal tauchen im Integral komplizierte Rechenausdrücke auf, die man durch einfachere Terme ersetzen (substituieren) möchte. Z.B. ist in dem Integral

$$\int (x+2)\cdot\sqrt[3]{x}\ dx$$

der Ausdruck $\sqrt[3]{x}$ kompliziert. Diesen ersetzt man durch $t=\sqrt[3]{x}$. Also überall, wo im Integral x auftaucht muss man dieses irgendwie durch t ersetzen. Es gilt $x=t^3$. Man erhält

$$\int (x+2)\cdot\sqrt[3]{x}\ dx=\int (t^3+2)\cdot t\, dx$$

Jetzt muss man nur noch dx durch ein dt ersetzen. Es gilt $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}t^{-2}$

($\frac{dt}{dx}$ ist die Ableitung der Funktion $t=\sqrt[3]{x}$ nach x). Also $dx=3t^2\,dt$ und daher

$$\int (x+2)\cdot\sqrt[3]{x}\ dx=\int (t^3+2)\cdot t\, dx=\int (t^3+2)\cdot t\cdot 3t^2\,dt=\int 3t^6+6t^3\ dt.$$

a) Lösen Sie das obige (rechte) Integral und setzen Sie für t wieder $\sqrt[3]{x}$ ein.

b) Lösen Sie nach dem gleichen Verfahren folgendes Integral

$$\int \frac{1}{5+3\cos(x)}\ dx,$$

indem Sie substituieren $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Hinweis: Für diese Wahl von t gilt $\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ und $dx=\frac{2}{1+t^2}\ dt$.

Aufgabe 4: (Fleißaufgabe: Partialbruchzerlegung)

Folgende Schritte sind durchzuführen, wenn man die Stammfunktion einer rationalen Funktion bestimmen möchte (Polynom in Zähler und Nenner).

Gesucht ist die Stammfunktion von

$$\frac{x^7-x^5+9x^4-5x^3-2x^2-5x+7}{x^5-x^4-x+1}.$$

a) Zunächst muss man die höchsten Koeffizienten aus dem Zähler "rausziehen", so dass der Grad des Polynoms im Nenner größer ist, als der Grad des Polynoms im Zähler:

Zeigen Sie mittels Polynomdivision (dieses Mal als "Division mit Rest"), dass

$$\frac{x^7-x^5+9x^4-5x^3-2x^2-5x+7}{x^5-x^4-x+1}=x^2+x+\frac{9x^4-4x^3-2x^2-6x+7}{x^5-x^4-x+1}.$$

b) Nun muss man die (reellen) Nullstellen des Nennerpolynoms bestimmen für so eine Art Primfaktorzerlegung : $x^5-x^4-x+1=(x-1)^2(x+1)(x^2+1)$. Für den

Faktor (x^2+1) lassen sich keine reellen Nullstellen mehr finden. Mit diesen Faktoren muss man sich überlegen, wie der (rote) Bruch als eine Summe von Brüchen geschrieben werden kann, in dem nur die Primfaktoren als Nenner auftauchen. Also:

$$\frac{9x^4-4x^3-2x^2-6x+7}{x^5-x^4-x+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Der Zähler hat die Form $Dx+E$, wenn der Nenner x^2 enthält. Macht man die Brüche auf der rechten Seite gleichnamig mit dem Nenner $x^5-x^4-x+1=(x-1)^2(x+1)(x^2+1)$, so erhält man eine Möglichkeit, die unbekannten Größen durch Koeffizientenvergleich auszurechnen. Führen Sie die Erweiterung der Brüche durch! Überlegen Sie sich, wie Sie nun A, B, C, D und E bestimmen könnten! Hinweis: Die Lösung wäre A=2, B=1, C=3, D=4, E=5. Partialbruchzerlegung

c) Also haben wir schließlich:

$$\int \frac{x^7-x^5+9x^4-5x^3-2x^2-5x+7}{x^5-x^4-x+1}\,dx = \int x^2+x+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x+1}+\frac{4x}{x^2+1}+\frac{5}{x^2+1}\,dx$$

Lösen Sie dieses Integral, indem Sie Tabellenwerke nutzen!

Viel Erfolg!