



# Sudoku vs. Graphenfärbung

Wenn alles verschieden sein muss

Timo Berthold  
Zuse Institut Berlin

DFG-Forschungszentrum MATHEON  
*Mathematik für Schlüsseltechnologien*



Berlin, 14.06.2008



## Verschiedene Zahlenquadrate



## Verschiedene Zahlenquadrate



16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

- ▷ **Magische Quadrate:** Summe der Zeilen-, Spalten-, Diagonaleinträge konstant



## Verschiedene Zahlenquadrate



16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1



4	1	3	0	2
3	0	2	4	1
2	4	1	3	0
1	3	0	2	4
0	2	4	1	3

- ▷ **Magische Quadrate:** Summe der Zeilen-, Spalten-, Diagonaleinträge konstant
- ▷ **Lateinische Quadrate:** Jede Zahl nur einmal pro Spalte und Zeile

## Verschiedene Zahlenquadrate



16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1



4	1	3	0	2
3	0	2	4	1
2	4	1	3	0
1	3	0	2	4
0	2	4	1	3



3	1	5	6	8	7	2	9	4
4	8	9	3	2	5	6	1	7
7	6	2	4	1	9	3	5	8
5	3	4	2	9	1	7	8	6
2	7	6	5	3	8	9	4	1
1	9	8	7	6	4	5	2	3
8	2	7	1	5	6	4	3	9
9	4	3	8	7	2	1	6	5
6	5	1	9	4	3	8	7	2

- ▷ **Magische Quadrate:** Summe der Zeilen-, Spalten-, Diagonaleinträge konstant
- ▷ **Lateinische Quadrate:** Jede Zahl nur einmal pro Spalte und Zeile
- ▷ **Sudoku:** Größe 9x9, Unterquadrate



## Die Regeln

- ▶ pro Feld: Genau eine Zahl

		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		



## Die Regeln

- ▷ pro Feld: Genau eine Zahl
- ▷ pro Zeile: Jede Zahl genau einmal

		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		



## Die Regeln

- ▷ pro Feld: Genau eine Zahl
- ▷ pro Zeile: Jede Zahl genau einmal
- ▷ pro Spalte: Jede Zahl genau einmal

		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		





## Die Regeln

- ▷ pro Feld: Genau eine Zahl
- ▷ pro Zeile: Jede Zahl genau einmal
- ▷ pro Spalte: Jede Zahl genau einmal
- ▷ pro Block: Jede Zahl genau einmal

		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		



## Die Regeln

- ▷ pro Feld: Genau eine Zahl
- ▷ pro Zeile: Jede Zahl genau einmal
- ▷ pro Spalte: Jede Zahl genau einmal
- ▷ pro Block: Jede Zahl genau einmal
- ▷ am Anfang: Zahlen vorgegeben

		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		



## Die Regeln

- ▷ pro Feld: Genau eine Zahl
- ▷ pro Zeile: Jede Zahl genau einmal
- ▷ pro Spalte: Jede Zahl genau einmal
- ▷ pro Block: Jede Zahl genau einmal
- ▷ am Anfang: Zahlen vorgegeben

		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		



## Die Regeln

- ▷ pro Feld: Genau eine Zahl
- ▷ pro Zeile: Jede Zahl genau einmal
- ▷ pro Spalte: Jede Zahl genau einmal
- ▷ pro Block: Jede Zahl genau einmal
- ▷ am Anfang: Zahlen vorgegeben

		7				9	
	3	8	2				
			4		9	8	2
3	6					2	
7				3	8		
				5		4	
5	8	3					6
	7						1
		1		8	6	3	



## Die Regeln

- ▷ pro Feld: Genau eine Zahl
- ▷ pro Zeile: Jede Zahl genau einmal
- ▷ pro Spalte: Jede Zahl genau einmal
- ▷ pro Block: Jede Zahl genau einmal
- ▷ am Anfang: Zahlen vorgegeben

		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		2



## Die Regeln

- ▷ pro Feld: Genau eine Zahl
- ▷ pro Zeile: Jede Zahl genau einmal
- ▷ pro Spalte: Jede Zahl genau einmal
- ▷ pro Block: Jede Zahl genau einmal
- ▷ am Anfang: Zahlen vorgegeben

		7				9	
	3	8	2				
			4		9	8	2
3	6					2	
7				3	8		
				5		4	
5	8	3					6
	7						1
		1		8	6	3	2



## Die Regeln

- ▷ pro Feld: Genau eine Zahl
- ▷ pro Zeile: Jede Zahl genau einmal
- ▷ pro Spalte: Jede Zahl genau einmal
- ▷ pro Block: Jede Zahl genau einmal
- ▷ am Anfang: Zahlen vorgegeben

		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		2



## Die Regeln

- ▷ pro Feld: Genau eine Zahl
- ▷ pro Zeile: Jede Zahl genau einmal
- ▷ pro Spalte: Jede Zahl genau einmal
- ▷ pro Block: Jede Zahl genau einmal
- ▷ am Anfang: Zahlen vorgegeben

		7				9	
	3	8	2				
			4		9	8	2
3	6					2	
7				3	8		
				5		4	
5	8	3					6
	7					8	1
		1		8	6	3	2





## Modell mit Gleichungen

		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		



## Modell mit Gleichungen

- ▷ Neun 0-1-Variablen pro Feld:

$x_{1,1,1}$ ,

		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		



## Modell mit Gleichungen

- ▷ Neun 0-1-Variablen pro Feld:

$x_{1,1,1}$ ,  $x_{1,1,2}$ ,

<sup>1,2</sup>		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		



## Modell mit Gleichungen

- ▶ Neun 0-1-Variablen pro Feld:

$x_{1,1,1}$ ,  $x_{1,1,2}$ ,  $x_{1,1,3}$ ,

1 2 3		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		



## Modell mit Gleichungen

- ▶ Neun 0-1-Variablen pro Feld:

$x_{1,1,1}$ ,  $x_{1,1,2}$ ,  $x_{1,1,3}$ ,  $x_{1,1,4}$ ,

<sup>1 2 3</sup> <sub>4</sub>		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		



## Modell mit Gleichungen

- ▷ Neun 0-1-Variablen pro Feld:

$x_{1,1,1}$ ,  $x_{1,1,2}$ ,  $x_{1,1,3}$ ,  $x_{1,1,4}$ ,  $\dots$ ,  $x_{1,1,9}$

729 Variablen,

1 4 7	2 5 8	3 6 9	7					9
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		



## Modell mit Gleichungen

- ▶ Neun 0-1-Variablen pro Feld:  
 $x_{1,1,1}$ ,  $x_{1,1,2}$ ,  $x_{1,1,3}$ ,  $x_{1,1,4}$ ,  $\dots$ ,  $x_{1,1,9}$
- ▶ pro Feld: Genau eine Zahl

729 Variablen,

		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		



## Modell mit Gleichungen

- ▶ Neun 0-1-Variablen pro Feld:  
 $x_{1,1,1}, x_{1,1,2}, x_{1,1,3}, x_{1,1,4}, \dots, x_{1,1,9}$
- ▶ pro Feld:  $x_{1,1,1} + \dots + x_{1,1,9} = 1$

729 Variablen,

		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		





## Modell mit Gleichungen

- ▶ Neun 0-1-Variablen pro Feld:  
 $x_{1,1,1}, x_{1,1,2}, x_{1,1,3}, x_{1,1,4}, \dots, x_{1,1,9}$
- ▶ pro Feld:  $x_{1,1,1} + \dots + x_{1,1,9} = 1$
- ▶ pro Zeile: Jede Zahl genau einmal

729 Variablen,      Gleichungen

		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		



## Modell mit Gleichungen

- ▷ Neun 0-1-Variablen pro Feld:

$$x_{1,1,1}, x_{1,1,2}, x_{1,1,3}, x_{1,1,4}, \dots, x_{1,1,9}$$

- ▷ pro Feld:  $x_{1,1,1} + \dots + x_{1,1,9} = 1$

- ▷ pro Zeile:  $x_{1,1,3} + \dots + x_{1,9,3} = 1$

		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		

729 Variablen, 81 Gleichungen



## Modell mit Gleichungen

- ▶ Neun 0-1-Variablen pro Feld:  
 $x_{1,1,1}, x_{1,1,2}, x_{1,1,3}, x_{1,1,4}, \dots, x_{1,1,9}$
- ▶ pro Feld:  $x_{1,1,1} + \dots + x_{1,1,9} = 1$
- ▶ pro Zeile:  $x_{1,1,3} + \dots + x_{1,9,3} = 1$
- ▶ pro Spalte: Jede Zahl genau einmal

729 Variablen, 81 Gleichungen

		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		



## Modell mit Gleichungen

- ▶ Neun 0-1-Variablen pro Feld:  
 $x_{1,1,1}, x_{1,1,2}, x_{1,1,3}, x_{1,1,4}, \dots, x_{1,1,9}$
- ▶ pro Feld:  $x_{1,1,1} + \dots + x_{1,1,9} = 1$
- ▶ pro Zeile:  $x_{1,1,3} + \dots + x_{1,9,3} = 1$
- ▶ pro Spalte:  $x_{1,1,3} + \dots + x_{9,1,3} = 1$

729 Variablen, 162 Gleichungen

		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		



## Modell mit Gleichungen

- ▶ Neun 0-1-Variablen pro Feld:  
 $x_{1,1,1}, x_{1,1,2}, x_{1,1,3}, x_{1,1,4}, \dots, x_{1,1,9}$
- ▶ pro Feld:  $x_{1,1,1} + \dots + x_{1,1,9} = 1$
- ▶ pro Zeile:  $x_{1,1,3} + \dots + x_{1,9,3} = 1$
- ▶ pro Spalte:  $x_{1,1,3} + \dots + x_{9,1,3} = 1$
- ▶ pro Block: Jede Zahl genau einmal

729 Variablen, 162 Gleichungen

		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		



## Modell mit Gleichungen

- ▶ Neun 0-1-Variablen pro Feld:  
 $x_{1,1,1}, x_{1,1,2}, x_{1,1,3}, x_{1,1,4}, \dots, x_{1,1,9}$
- ▶ pro Feld:  $x_{1,1,1} + \dots + x_{1,1,9} = 1$
- ▶ pro Zeile:  $x_{1,1,3} + \dots + x_{1,9,3} = 1$
- ▶ pro Spalte:  $x_{1,1,3} + \dots + x_{9,1,3} = 1$
- ▶ pro Block:  $x_{1,1,3} + \dots + x_{3,3,3} = 1$

729 Variablen, 243 Gleichungen

		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		



## Modell mit Gleichungen

- ▶ Neun 0-1-Variablen pro Feld:  
 $x_{1,1,1}, x_{1,1,2}, x_{1,1,3}, x_{1,1,4}, \dots, x_{1,1,9}$
- ▶ pro Feld:  $x_{1,1,1} + \dots + x_{1,1,9} = 1$
- ▶ pro Zeile:  $x_{1,1,3} + \dots + x_{1,9,3} = 1$
- ▶ pro Spalte:  $x_{1,1,3} + \dots + x_{9,1,3} = 1$
- ▶ pro Block:  $x_{1,1,3} + \dots + x_{3,3,3} = 1$
- ▶ Fixieren: Vorgegebene Zahlen

729 Variablen, 243 Gleichungen

		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		



## Modell mit Gleichungen

- ▶ Neun 0-1-Variablen pro Feld:

$x_{1,1,1}, x_{1,1,2}, x_{1,1,3}, x_{1,1,4}, \dots, x_{1,1,9}$

- ▶ pro Feld:  $x_{1,1,1} + \dots + x_{1,1,9} = 1$

- ▶ pro Zeile:  $x_{1,1,3} + \dots + x_{1,9,3} = 1$

- ▶ pro Spalte:  $x_{1,1,3} + \dots + x_{9,1,3} = 1$

- ▶ pro Block:  $x_{1,1,3} + \dots + x_{3,3,3} = 1$

- ▶ Fixieren:  $x_{2,2,3} = 1, \dots$

729 Variablen, 324 Gleichungen

		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		





## Andere Zahlenrätsel

### ▷ X-Sudoku

	8					2	1	
			2	8				7
				5	3	9		
6				9				
	4	9		1	6	7		
8		3					5	
4	6	2						
9					2			6
				4		1		2



## Andere Zahlenrätsel

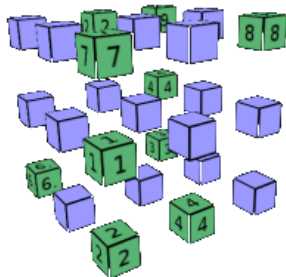
- ▷ X-Sudoku
- ▷ 16x16-Sudoku

	14			9			5	11			8		4	6	
	5	16	11							6		13	15	14	
15		4			12	6			9	10			7		5
		10		1	14	7			4	5	13		9		
			12		6	13			5	11		2			
8	9			11	3	16			10	15	2			12	14
13			2	8		1	10	3			12	9			7
	1	11	10				9	7						3	4
	4	8	15				6	2				5	12	10	
2			5	7		4	16				6	1			3
12	10			5	11	8			3	16	1			15	
			7		10	2			8	14		4			
		15		14	7	11			13	9	10		2		
4		12			13	10			16	2			5		15
	6	1	3		2				7			14	16	13	
		13					15	14			4		10	7	



## Andere Zahlenrätsel

- ▷ X-Sudoku
- ▷ 16x16-Sudoku
- ▷ 3D-Sudoku





## Andere Zahlenrätsel

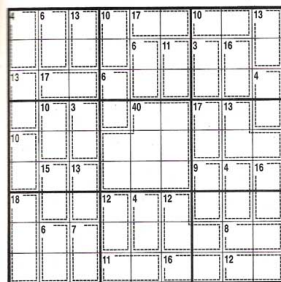
- ▷ X-Sudoku
- ▷ 16x16-Sudoku
- ▷ 3D-Sudoku
- ▷ Kakuro

	23	30			27	12	16
18				24			
17			28	17			
		15					
35						12	
	7			8			7
		18		7			
	11	10				5	
21							
6					3		



## Andere Zahlenrätsel

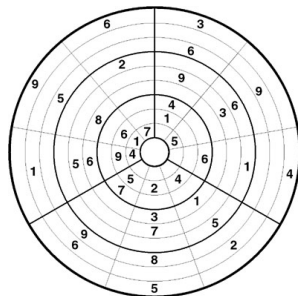
- ▷ X-Sudoku
- ▷ 16x16-Sudoku
- ▷ 3D-Sudoku
- ▷ Kakuro
- ▷ Killer-Sudoku





## Andere Zahlenrätsel

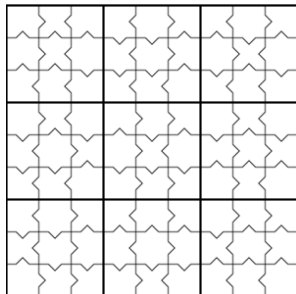
- ▷ X-Sudoku
- ▷ 16x16-Sudoku
- ▷ 3D-Sudoku
- ▷ Kakuro
- ▷ Killer-Sudoku
- ▷ Ensaimada





## Andere Zahlenrätsel

- ▷ X-Sudoku
- ▷ 16x16-Sudoku
- ▷ 3D-Sudoku
- ▷ Kakuro
- ▷ Killer-Sudoku
- ▷ Ensaimada
- ▷ Vergleichs-Sudoku





## Graphen und Färbung

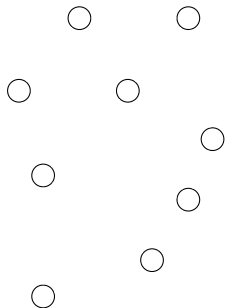
▷ Graph:





## Graphen und Färbung

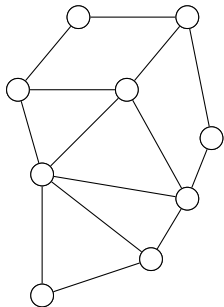
▷ Graph: Knoten,





## Graphen und Färbung

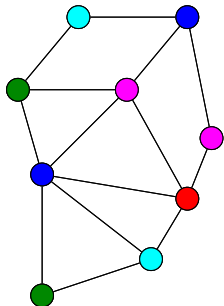
- ▷ Graph: Knoten, Kanten





## Graphen und Färbung

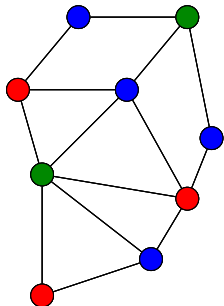
- ▷ Graph: Knoten, Kanten
- ▷ Färbung:
  - ▶ Jeder Knoten eine Farbe
  - ▶ Kante  $\Rightarrow$  verschiedene Farben





## Graphen und Färbung

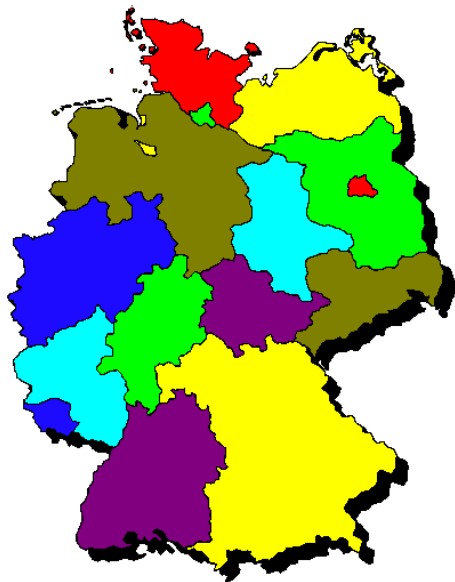
- ▷ Graph: Knoten, Kanten
- ▷ Färbung:
  - ▶ Jeder Knoten eine Farbe
  - ▶ Kante  $\Rightarrow$  verschiedene Farben
  - ▶ Färbungszahl





## Kartenfärbung

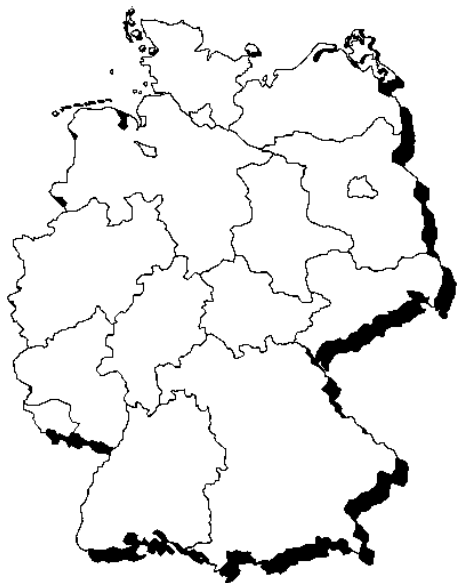
- ▷ Ziel: Länder mit gemeinsamer Grenze verschieden einfärben





## Kartenfärbung

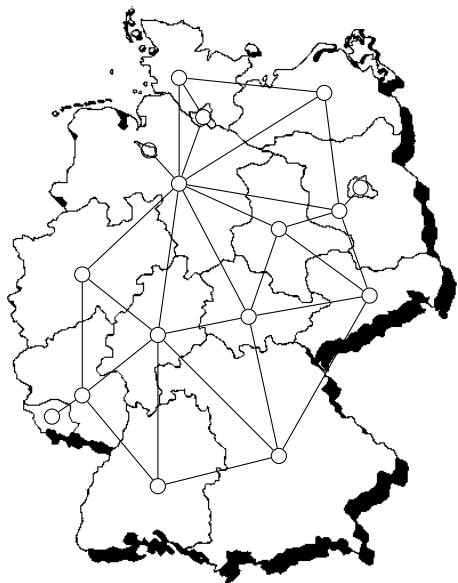
- ▷ Ziel: Länder mit gemeinsamer Grenze verschieden einfärben





## Kartenfärbung

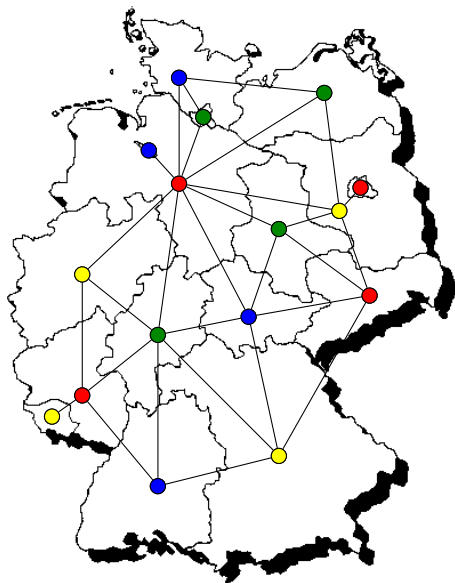
- ▷ Ziel: Länder mit gemeinsamer Grenze verschieden einfärben
- ▷ Idee: Nachbarschaftsgraph





## Kartenfärbung

- ▷ Ziel: Länder mit gemeinsamer Grenze verschieden einfärben
- ▷ Idee: Nachbarschaftsgraph

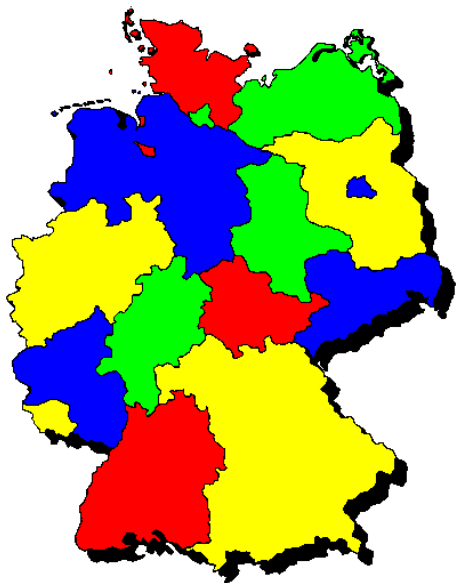






## Kartenfärbung

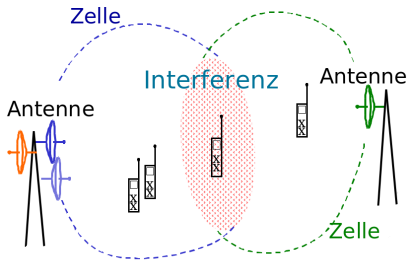
- ▷ Ziel: Länder mit gemeinsamer Grenze verschieden einfärben
- ▷ Idee: Nachbarschaftsgraph
- ▷ Resultat: 4-Farben-Satz





## Frequenzzuweisung

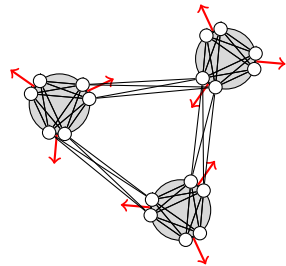
- ▷ GSM-Funknetze:  
Farben  $\hat{=}$  Frequenzen





## Frequenzzuweisung

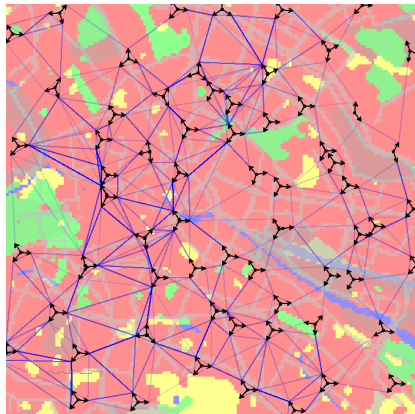
- ▷ GSM-Funknetze:  
Farben  $\hat{=}$  Frequenzen





## Frequenzzuweisung

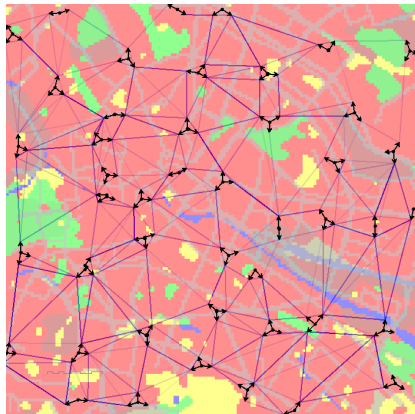
- ▷ GSM-Funknetze:  
Farben  $\hat{=}$  Frequenzen
- ▷ MATHEON B-4: Planning the  
UMTS radio interface





## Frequenzzuweisung

- ▷ GSM-Funknetze:  
Farben  $\hat{=}$  Frequenzen
- ▷ MATHEON B-4: Planning the UMTS radio interface
- ▷ Ziel: Funknetz optimal konfigurieren





## Der Sudokugraph

		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		



## Der Sudokugraph

▷ Zahlen  $\Leftrightarrow$  Farben

		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		



## Der Sudokugraph

- ▷ Zahlen  $\Leftrightarrow$  Farben
- ▷ Felder  $\Leftrightarrow$  Knoten

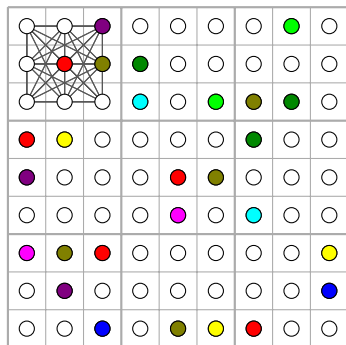
○	○	●	○	○	○	○	○	○
○	●	●	●	○	○	○	○	○
○	○	○	●	○	●	●	●	○
●	●	○	○	○	○	●	○	○
●	○	○	○	●	●	○	○	○
○	○	○	○	●	○	●	○	○
●	●	●	○	○	○	○	○	●
○	●	○	○	○	○	○	○	○
○	○	●	○	●	●	●	○	○





## Der Sudokugraph

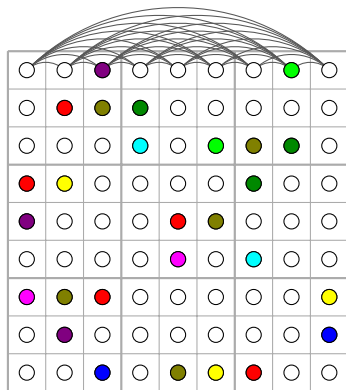
- ▷ Zahlen  $\Leftrightarrow$  Farben
- ▷ Felder  $\Leftrightarrow$  Knoten
- ▷ Konflikte  $\Leftrightarrow$  Kanten





## Der Sudokugraph

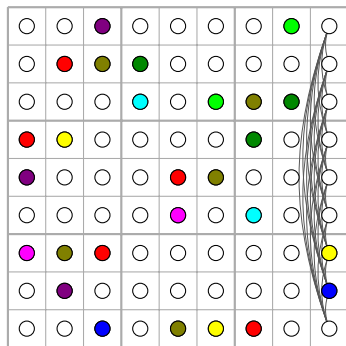
- ▷ Zahlen  $\Leftrightarrow$  Farben
- ▷ Felder  $\Leftrightarrow$  Knoten
- ▷ Konflikte  $\Leftrightarrow$  Kanten





## Der Sudokugraph

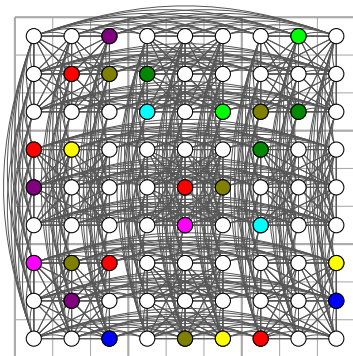
- ▷ Zahlen  $\Leftrightarrow$  Farben
- ▷ Felder  $\Leftrightarrow$  Knoten
- ▷ Konflikte  $\Leftrightarrow$  Kanten





## Der Sudokugraph

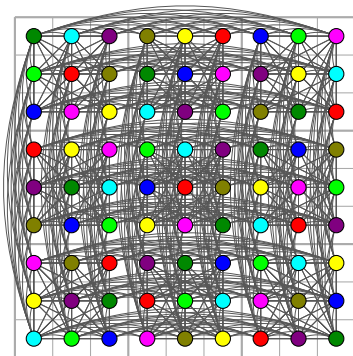
- ▷ Zahlen  $\Leftrightarrow$  Farben
- ▷ Felder  $\Leftrightarrow$  Knoten
- ▷ Konflikte  $\Leftrightarrow$  Kanten





## Der Sudokugraph

- ▷ Zahlen  $\Leftrightarrow$  Farben
- ▷ Felder  $\Leftrightarrow$  Knoten
- ▷ Konflikte  $\Leftrightarrow$  Kanten
- ▷ Lösung  $\Leftrightarrow$  9-Färbung





## Der Sudokugraph

- ▷ Zahlen  $\Leftrightarrow$  Farben
- ▷ Felder  $\Leftrightarrow$  Knoten
- ▷ Konflikte  $\Leftrightarrow$  Kanten
- ▷ Lösung  $\Leftrightarrow$  9-Färbung

2	4	7	8	6	3	1	9	5
9	3	8	2	1	5	7	6	4
1	5	6	4	7	9	8	2	3
3	6	5	9	4	7	2	1	8
7	2	4	1	3	8	6	5	9
8	1	9	6	5	2	4	3	7
5	8	3	7	2	1	9	4	6
6	7	2	3	9	4	5	8	1
4	9	1	5	8	6	3	7	2



## Sudoku-Löser

- ▷ Verfügbar unter:  
<http://www.matheon.de/specialities/sudoku.asp>
- ▷ Löst ein Ganzzahliges Programm
- ▷ Benutzt die Software SCIP

Please insert your Sudoku here and click one of the buttons below:

You may want to click on the pictures aside to get further information about other MATHEON projects.

Sudoku

Test Sudoku



		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		

		7					9	
	3	8	2					
			4	9		8	2	
3	6					2		
7				8	3			
					5	4		
5	8	3						6
	7							1
		1		6	8	3		



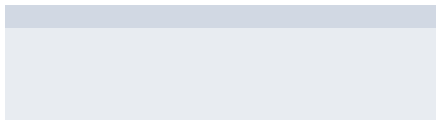




		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		

		9					2	
	5	1	4					
			6		2	1	4	
5	8					4		
9				5	1			
				7		6		
7	1	5						8
	9							3
		3		1	8	5		

$7 \rightarrow 9, 9 \rightarrow 2, \dots$





		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
				5		4		
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		

		9					2	
	5	1	4					
			6		2	1	4	
5	8					4		
9				5	1			
				7		6		
7	1	5						8
	9							3
		3		1	8	5		

Anzahl möglicher Sudokus:  
 $\approx 6,67 \cdot 10^{21} = 6,67$  Trilliarden



		7					9	
	3	8	2					
			4		9	8	2	
3	6					2		
7				3	8			
			5		4			
5	8	3						6
	7							1
		1		8	6	3		

		9					2	
	5	1	4					
			6		2	1	4	
5	8					4		
9				5	1			
			7		6			
7	1	5						8
	9							3
		3		1	8	5		

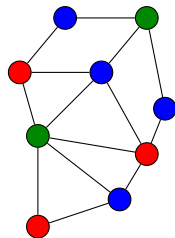
Anzahl möglicher Sudokus:  
 $\approx 6,67 \cdot 10^{21} = 6,67$  Trilliarden

Anzahl nichtsymm. Sudokus:  
 $\approx 5,47 \cdot 10^{10} = 54,7$  Milliarden



## Umgang mit Symmetrien

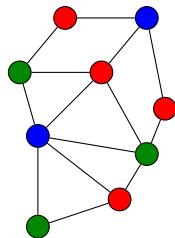
- ▷ Ursache: Äquivalente Lösungen
- ▷ Problem: Langsamer, schlechtere Abschätzungen
- ▷ Idee: Sortierung





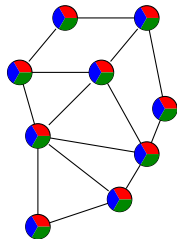
## Umgang mit Symmetrien

- ▷ Ursache: Äquivalente Lösungen
- ▷ Problem: Langsamer, schlechtere Abschätzungen
- ▷ Idee: Sortierung



## Umgang mit Symmetrien

- ▷ Ursache: Äquivalente Lösungen
- ▷ Problem: Langsamer, schlechtere Abschätzungen
- ▷ Idee: Sortierung



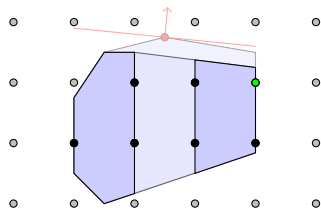
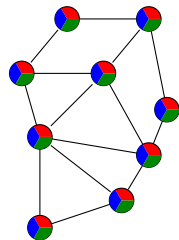


## Umgang mit Symmetrien

- ▷ Ursache: Äquivalente Lösungen
- ▷ Problem: Langsamer, schlechtere Abschätzungen
- ▷ Idee: Sortierung

## Ganzzahlige Programmierung

- ▷ Lösen "riesiger" Gleichungssysteme
- ▷ Anwendungen:
  - ▶ Frequenzzuweisung
  - ▶ Fahrplanerstellung
  - ▶ Chip-Design, ...





## Ausgangslage

- ▷ Seien ein beliebiger Graph und eine beliebige Zahl  $k \in \mathbb{N}$  gegeben
- ▷ Suchverfahren: Findet Färbung mit  $k$  Farben oder stellt fest, dass der Graph nicht  $k$ -färbbar ist
- ▷ Prüfverfahren: Überprüft für vorgegebene  $k$ -Färbung, ob sie korrekt ist

## Ein Millennium-Problem





## Ausgangslage

- ▷ Seien ein beliebiger Graph und eine beliebige Zahl  $k \in \mathbb{N}$  gegeben
- ▷ Suchverfahren: Findet Färbung mit  $k$  Farben oder stellt fest, dass der Graph nicht  $k$ -färbbar ist
- ▷ Prüfverfahren: Überprüft für vorgegebene  $k$ -Färbung, ob sie korrekt ist

## Ein Millennium-Problem

- ▷ Frage: Gibt es ein Suchverfahren, das “vergleichbar” schnell ist wie ein effizientes Prüfverfahren?



## Ausgangslage

- ▷ Seien ein beliebiger Graph und eine beliebige Zahl  $k \in \mathbb{N}$  gegeben
- ▷ Suchverfahren: Findet Färbung mit  $k$  Farben oder stellt fest, dass der Graph nicht  $k$ -färbbar ist
- ▷ Prüfverfahren: Überprüft für vorgegebene  $k$ -Färbung, ob sie korrekt ist

## Ein Millennium-Problem

- ▷ Frage: Gibt es ein Suchverfahren, das “vergleichbar” schnell ist wie ein effizientes Prüfverfahren?
- ▷ Antwort: Ungeklärt ...



## Ausgangslage

- ▷ Seien ein beliebiger Graph und eine beliebige Zahl  $k \in \mathbb{N}$  gegeben
- ▷ Suchverfahren: Findet Färbung mit  $k$  Farben oder stellt fest, dass der Graph nicht  $k$ -färbbar ist
- ▷ Prüfverfahren: Überprüft für vorgegebene  $k$ -Färbung, ob sie korrekt ist

## Ein Millennium-Problem

- ▷ Frage: Gibt es ein Suchverfahren, das “vergleichbar” schnell ist wie ein effizientes Prüfverfahren?
- ▷ Antwort: Ungeklärt ...
- ▷ Belohnung: 1 Million Dollar



# Sudoku vs. Graphenfärbung

Wenn alles verschieden sein muss

Timo Berthold  
Zuse Institut Berlin

DFG-Forschungszentrum MATHEON  
*Mathematik für Schlüsseltechnologien*



Berlin, 14.06.2008