

# Ganzzahlige Optimierung im Öffentlichen Verkehr

Ralf Borndörfer, Christian Liebchen und Marc Pfetsch

Technische Universität Berlin, Wintersemester 2006/2007

Skript ausgearbeitet von Christina Puhl

22. März 2007

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Fahrplanoptimierung</b>	<b>2</b>
1.1	Problembetrachtung und Motivation . . . . .	2
1.2	Kreise, FDP und PESP . . . . .	6
1.3	Fahrplanmodellierungen mit Hilfe des PESP . . . . .	11
1.4	Weitere PESP- Formulierungen . . . . .	13
1.5	Schranken für die ganzzahligen Variablen $z$ . . . . .	15
1.6	Klassen von Kreisbasen . . . . .	18
1.7	Minimales Kreisbasen Problem (MCBP) . . . . .	21
1.8	Charakterisierung ganzzahliger Kreisbasen . . . . .	26

# Kapitel 1

## Fahrplanoptimierung

### 1.1 Problembetrachtung und Motivation

Nach Abschluss der Linienplanung beginnt die Fahrplanoptimierung. Als Grundlage können wir davon ausgehen, dass die zu befahrenen Linien mit den Fahr Dauern zwischen den Stationen und ihre Frequenz feststehen. In der Fahrplanoptimierung geht es darum einen zulässigen Fahrplan zu erstellen, der nach ein oder mehrere Kriterien optimiert ist. Betrachten wir im Folgenden unterschiedlichen Ansatzpunkte der Fahrplanoptimierung. Als erstes können zwischen parallelen verlaufenden Linien Taktverdichtungen vorgegeben werden. Diese Linien bezeichnen wir als koordinierte Liniengruppen. Es kann allerdings vorkommen, dass nicht alle Taktverschiebungen zwischen Liniengruppen eingehalten werden können (Abb. 1.1.1). Das Optimierungspotential liegt darin, möglichst viele zu erfüllen.



Abbildung 1.1.1: Die Liniengruppen der parallel verlaufenden Linien sind nicht alle erfüllbar.

Ein Schwerpunkt der Fahrplanoptimierung, bei der u.a. ein Minutenplan erstellt wird, liegt in der Minimierung der Umstiegszeiten. Ca. 80% aller Fahrgäste in Berlin steigen pro Fahrt mindestens ein mal um. Ein Minutenplan ist ein Fahrplan, der für jede Haltestelle einer Linie angibt, zu welcher Minute ein Fahrzeug der Linie die Haltestelle anfährt. Ein Minutenplan ist umsteigeoptimal, wenn er die Umsteigezeiten minimiert. Minutenpläne werden auch als Fahrlagen oder „Basic Hourly Pattern“ (BHP) bezeichnet.

Ein weiterer interessanter Punkt der Fahrplanoptimierung ist die Auswahl erster und letzter Fahrten, wie z.B. bei der Hauptverkehrszeit (HVZ), Nacht, Nebenverkehrszeit (NVZ) und Schwachverkehrszeit (SVZ). Bei der HVZ können auch extra Fahrten eingefügt werden, die nicht im ur-

sprünglichen Takt sind. Bei diesen Veränderungen ist es interessant, wie man Übergänge zwischen den Minutenrastern bzw. Takten ordentlich hinbekommt. Eine Möglichkeit einen Übergang von einer 10 Minuten Taktung zu einer 20 Minuten Taktung sinnvoll zu gestalten, ist jeden zweiten Zug der 10 Minuten Taktung auszulassen. Ein anderer Fall von zusätzlichen Fahrten ist bei besonderen Bedarf z.B. Schülertransport, Hertha Spiele ... .

Ein weiterer Gesichtspunkt sind Baumaßnahmen, wenn bestimmte Strecken gar nicht oder nur teilweise befahrbar sind. Dabei ist interessant, wie der Pendelverkehr eingesetzt wird. Als letztes kann das Verschieben einzelner Fahrten Verringerung des Fahrzeugbedarfs notwendig sein. Allerdings ist Verschieben doch mit Vorsicht zu betrachten. Alle betrachteten Punkte sind aus Sicht eines Unternehmens wichtig. Wenn jedoch mehrere Unternehmen sich die Ressourcen teilen müssen, muss der Fahrplan dementsprechend angepasst werden.

Betrachten wir als erstes ein Beispiel zur Taktplanung, in dem es um die Korrespondenz eines Fahrplans geht. Unter der *Korrespondenz* zweier Linien an einer Haltestelle versteht man bei gleichzeitig ankommenden Fahrzeugen die Möglichkeit, dass die Fahrgäste jeweils in das andere Fahrzeug wechseln können. Um die Korrespondenzen besser messen zu können, definieren wir als *Korrespondenzzeit* die Zeit, die den Fahrgästen tatsächlich zum Wechsel zur Verfügung steht. Das Beispiel zeigt, dass durch die Auflösung einer Taktvorgabe, die Korrespondenz in einem Verkehrsnetzwerk erhöht werden kann.

**Beispiel 1.1.1** (Besser ohne Takt). Wir wollen die Frage behandeln, ob es etwas bringt von einer glatten Taktplanung abzusehen. Wichtig ist dabei, dass wir die Vergleichbarkeit wahren. Dazu soll in einem Referenzintervall identische Fahrtenanzahl liegen. Unser Referenzintervall liegt bei 20 Minuten. In diesem Intervall sollen zwei Fahrten pro Linie stattfinden. Der maximale Fahrabstand zwischen zwei Bahnen einer Linie ist mit 12 Minuten angegeben. Das Ziel ist es die Anzahl der „Korrespondenzen“ zu maximieren. Das Netzwerk besteht aus drei Stationen die von drei Linien bedient werden (Abb. 1.1.2). Die erste Linie fährt von Station A nach C, die zweite von A nach B und die dritte von B nach C. Die Fahrzeiten von einer Station zur anderen und die Aufenthaltszeiten sind vorgegeben.

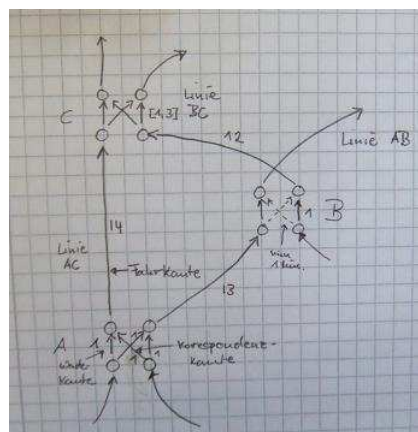


Abbildung 1.1.2: Für die drei Linien soll die Korrespondenz maximiert werden.

Jeder Zug soll eine Minute Aufenthaltszeit im Bahnhof haben. Bei Station A soll die Korrespondenzzeit genau eine Minuten betragen. An Station C liegt der Aufenthalt und die Korrespondenzzeit zwischen einer und drei Minuten. Bei B sind die Korrespondenzzeiten frei gegeben, müssen aber mindestens eine Minute betrachten. Ein 10 Minutentaktplan hat dann die Form, wobei an

erster Stelle steht immer die Ankunfts- und an zweiter Stelle die Abfahrtszeit steht:

Takt	AC	AB	BC	(AC)
A	00/01	00/01		10/11
B		14/15	14/15	
C	15(18)		27/28	25(28)

Betrachten wir nun den nicht glatten 10 Minuten Takt bzw. nur den 20 Minuten Takt:

nicht Takt	AC	AB	BC	(AC)	AB	BC	(AC)
A	00/01	00/01		12/13	12/13		20/21
B		14/15	14/15		26/27	22/23	
C	15/16		27/28	27/28		35/36	35/36

Bei einer Instanz, in der der Anschluss AB->BC nicht wichtig ist, kann dieser Plan besser sein. Den oberen Plan würde man als Taktfahrplan bezeichnen, da je zwei aufeinanderfolgende Linie den gleichen Abstand voneinander haben. Der obige Plan wäre ein zusammengesetzter Taktfahrplan.  
 ◇

Als nächstes wollen wir den Begriff des symmetrischen Fahrplans einführen, der z.B. von der Deutschen Bahn häufig benutzt wird.

**Definition 1.1.2.** Die Ankunft (Abfahrt) einer gerichteten Linie in einer Station ist ein *Ereignis*. Sei  $v = (\text{typ}, \text{linie}, \text{station})$  ein Ereignis, wobei typ angibt, ob es sich um eine Ankunft oder Abfahrt handelt, linie, welche gerichtete Linie es betrifft und station, um welche Station es geht. Dann ist  $\bar{v} := (\overline{\text{typ}}, \overline{\text{linie}}, \text{station})$  das zu  $v$  *komplementäre Ereignis*. Dabei ist mit  $\overline{\text{linie}}$  die Rückrichtung der Linie „linie“ gemeint. Seien  $V$  die Ereignisse eines Verkehrsnetzes mit Taktzeit  $T$  (d.h. für alle Linien ist der Takt gleich). Sei  $\Pi : V \rightarrow [0, T)$  ein *Fahrplan*. Dann heißt  $\Pi$  *symmetrisch* mit *Achse*  $s$ , wenn  $\forall v, \bar{v} \in V: (\Pi_v + \Pi_{\bar{v}}) \bmod T \cdot 0,5 = s$  gilt. Damit liegt  $s \in [0, \frac{T}{2})$ .

**Beispiel 1.1.3.** Ein Beispiel für einen symmetrischen Fahrplan liefern die Linien RE3 und RE7. An den Stationen Stralsund und Zossen ergeben sich folgende Zeiten:

RE 7			RE 3		
Zossen	an	50	Stralsund	an	24
Zossen	ab	10	Stralsund	ab	36
		$60 \bmod 60 = 0$			$60 \bmod 60 = 0$

Damit haben wir auf beiden Linien dieselbe Symmetrieachse  $s = 0$ .

◇

Eine Möglichkeit sich das Konzept der Symmetrie klar zu machen, ist die Betrachten des Zeit/Wege Diagramms bzw. des Bildfahrplans einer Linie (Abb. 1.1.3).

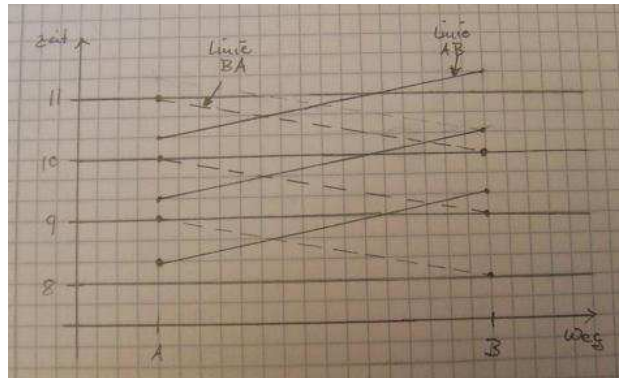


Abbildung 1.1.3: Die Linie  $AB$  und ihre Gegenrichtung Linie  $BA$  schneiden sich genau zwei mal innerhalb der Taktzeit.

Zum Zeitpunkt  $s$  und  $s + \frac{T}{2}$  begegnen sich die Züge aus entgegengesetzten Richtungen. Man kann sich die Symmetrieachse also als Begegnungspunkt zwischen Richtung und Gegenrichtung einer Linie vorstellen. Folgender Satz bekräftigt diese Anschauung.

**Satz 1.1.4.** *Gegeben sei ein Verkehrsnetz mit identischen Fahrzeiten in Richtung und Gegenrichtung. Ein Fahrplan ist genau dann symmetrisch, wenn für jeden Zeitpunkt entweder sich auf allen Linien die Fahrzeuge aus Richtung und Gegenrichtung begegnen, oder sie sich auf keiner Linie begegnen.*

Einen ähnlichen Satz kann man mit Hilfe von komplementären Umsteigebeziehungen formulieren. Dazu erstmal die Definition.

**Definition 1.1.5.** Eine *Umsteigebeziehung*  $a$  besteht aus einem Ankunftsereignis und einem Abfahrtereignis an einer Station zwischen unterschiedlichen Linien. Zwei Umsteigebeziehungen  $a_1 = (v_1, w_1)$  und  $a_2 = (v_2, w_2)$  heißen *komplementär*, wenn  $v_2 = \bar{w}_1$  und  $w_2 = \bar{v}_1$  gilt.

**Satz 1.1.6.** *Gegeben sei ein zusammenhängendes Liniennetz mit identische Fahrzeiten in Richtung und Gegenrichtung. Ein Fahrplan ist genau dann symmetrisch, wenn entlang je zwei komplementären Umsteigebeziehungen identische Umsteigezeiten bestehen.*

*Beweis.* Unter Vernachlässigung der Mindestumsteigezeit kann die Umsteigezeit durch  $(\Pi_w - \Pi_v) \bmod T$  berechnet werden. Dabei entsprechen  $w$  und  $v$  Fahrplanereignissen.

„ $\Rightarrow$ “: Betrachte die komplementären Umsteigebeziehungen  $a_1 = (v_1, w_1)$  und  $a_2 = (v_2, w_2)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} ((\Pi_{w_1} - \Pi_{v_1}) \bmod T - (\Pi_{w_2} - \Pi_{v_2}) \bmod T) \bmod T &= (\Pi_{w_1} - \Pi_{v_1} - (\Pi_{w_2} - \Pi_{v_2})) \bmod T \\ &= (\Pi_{w_1} + \Pi_{v_2} - (\Pi_{v_1} + \Pi_{w_2})) \bmod T \\ &= (2s - 2s) \bmod T \\ &= 0. \end{aligned}$$

Diese Umformung gelten, da  $a_1$  und  $a_2$  komplementär sind.

„ $\Leftarrow$ “: Wir wählen eine beliebige Referenzlinie  $L$ . Sei  $s$  „ihre“ Symmetrieachse. Der Beweis funktioniert dann über die Induktion über die Menge aller Linien anhand der Instanz von  $L$  im Linienadjazenzgraphen.

IS: Wir wissen, dass  $(\Pi_{v_1} + \Pi_{w_2}) \bmod T = 2s$  gilt. Zu zeigen ist, dass  $(\Pi_{w_1} + \Pi_{v_2}) \bmod T = 2s$  gilt.

Es gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$((\Pi_{w_1} - \Pi_{v_1}) \bmod T - (\Pi_{w_2} - \Pi_{v_2}) \bmod T) \bmod T = 0.$$

Daraus folgt

$$(\Pi_{w_1} + \Pi_{v_2} + 2s) \bmod T = 0$$

und damit erhalten wir

$$(\Pi_{w_1} + \Pi_{v_2}) \bmod T = 2s$$

für  $2s < T$ . □

## 1.2 Kreise, FDP und PESP

Bei der Erstellung von Fahrplänen werden uns immer wieder Kreise in Graphen interessieren. Ein *gerichteter* Kreis in einem gerichteten Graphen  $D$  ist ein Kreis, in dem alle Kanten die gleiche Orientierung haben. Betrachten wir dazu einige wichtige Eigenschaften.

**Satz 1.2.1.** Sei  $(D = (V, A), w)$  ein gewichteter, gerichteter Graph mit  $w \in \mathbb{Q}^{|A|}$ . Dann hat  $(D, w)$  genau dann keine gerichteten Kreise negativer Länge wenn eine Potenzialfunktion  $\pi : V \rightarrow \mathbb{Q}$  existiert, so dass für alle  $a = (i, j) \in A$  die Ungleichung  $\pi_j \leq \pi_i + w_a$  erfüllt ist.

**Bemerkung 1.2.2.** Wir fordern  $w \in \mathbb{Q}^{|A|}$ , damit z.B. der Ford-Fulkerson Algorithmus zur Berechnung eines maximalen Flusses in polynomieller Zeit läuft.

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “: Wir nehmen an, dass eine Potentialfunktion existiert. Sei  $C$  ein gerichteter Kreis in  $D$ . Dann gilt

$$\sum_{a=(i,j) \in C} w_a \geq \sum_{a=(i,j) \in C} (\pi_j - \pi_i) = 0,$$

da jeder Knoten gleich viele Eingehende- wie ausgehende Kanten hat (Abb. 1.2.1).

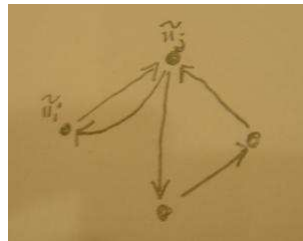


Abbildung 1.2.1: In der Summe  $\sum_{a=(i,j) \in C} (\pi_j - \pi_i)$  wird jedes Potenzial gleich häufig addiert wie subtrahiert.

„ $\Rightarrow$ “: Füge Knoten  $s$  zu  $D$  hinzu mit den Kanten  $(s, v)$  für alle  $v \in V$  mit  $w_{sv} = 0$  (Abb. 1.2.2).

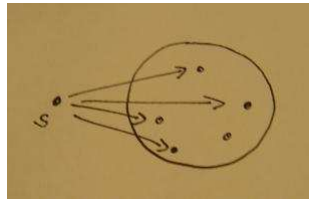


Abbildung 1.2.2: Zu jedem Knoten  $v$  wird eine Kante zum Hilfsknoten  $s$  in den Graphen  $D$  mit dem Gewicht 0 hinzugefügt.

Wir definieren  $\pi_v$  als die Länge eines *shortest-walk* von  $s$  nach  $v$ . Als *walk* wird eine Kantenfolge bezeichnet, in der Knoten auch mehrfach auftreten können. Da wir keine Kreise negativer Länge haben, gilt  $\pi_v > -\infty$ . Damit sind  $\pi_v$  insbesondere *shortest path* Entfernungen. Bei einem *path* wird jeder Knoten genau ein mal betreten. Damit gilt für alle Kanten  $a = (i, j)$ , dass die Entfernung von jedem Knoten  $s$  zu  $j$  nicht kürzer ist, als die Entfernung von  $s$  nach  $j$  über  $i$  ist. Also gilt  $\pi_j \leq \pi_i + w_a$ .  $\square$

Über das kürzeste Wege Problem kommen wir auf folgenden Satz:

**Satz 1.2.3** (Bellman-Ford). *Der Test auf negative Kreise geht in  $\mathcal{O}(m \cdot n)$ .*

**Definition 1.2.4** (Feasible Differential Problem (FDP)). Das *Feasible Differential Problem (FDP)* ist folgendermaßen definiert. Sei ein gerichteter Graph  $D = (V, A)$  und zwei Vektoren  $\ell, u \in \mathbb{Q}^{|A|}$  gegeben. Gesucht ist ein Vektor  $\pi \in \mathbb{Q}^{|V|}$ , so dass für alle  $a = (i, j) \in A$  die Bedingung  $\ell_a \leq \pi_j - \pi_i \leq u_a$  erfüllt ist.

Wir können das Problem folgendermaßen in ein kürzeste Wege bzw. in ein Kreisfindungsproblem mit negativer Länge umformen. Betrachte einen Graphen  $D = (V, A)$ . Dann können wir einen neuen Graphen  $D' = (V', A')$  mit  $V' = V$  definieren. Weiter enthält  $D'$  für jede Kante  $a \in A$  eine Kante mit  $a_1 = (i, j)$  und  $w_{a_1} = u_a$  und  $a_2 = (j, i)$  mit  $w_{a_2} = -\ell_a$  (Abb. 1.2.3). Durch die Umformung kann es vorkommen, dass wir parallele Kanten erhalten.



Abbildung 1.2.3: Für jede Kante  $a \in A$  fügen wir zwei neue Kanten  $a_1$  und  $a_2$  in den Graphen  $D'$  ein.

Damit können wir das FDP in  $\mathcal{O}(m \cdot n)$  lösen. Auf der Graphenklasse der Bäume, lässt sich das Problem in  $\mathcal{O}(n)$  lösen.

Betrachten wir als nächstes orientierte Kreise.

**Definition 1.2.5** (orientierter Kreis). In einem gerichteten Graphen  $D = (V, A)$  ist  $C$  ein *orientierter Kreis*, wenn durch Umorientierung einer Teilmenge  $C^-$  seiner Kanten ein gerichteter Kreis entsteht. Wir bezeichnen  $C^-$  als die *Rückwärtskanten* und  $C^+ = C \setminus C^-$  als die *Vorwärtskanten*.



**Korollar 1.2.6.** Sei  $I = (D, \ell, u)$  eine Instanz von FDP. Dann ist  $I$  genau dann zulässig, wenn für jeden orientierten Kreis  $C$  die Ungleichung

$$\sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} \ell_a \geq 0$$

erfüllt ist.

Weiter gilt, sei  $C'$  die Umkehrung von  $C$ . Dann erhalten wir

$$\sum_{a \in C'^+} u_a - \sum_{a \in C'^-} \ell_a \geq 0$$

bzw.

$$\sum_{a \in C^-} u_a - \sum_{a \in C^+} \ell_a \geq 0.$$

Mit der Umkehrung eines Kreises erhalten wir eine echte weitere Bedingung.

Mit dem FDP können nicht periodische Fahrplanprobleme modelliert werden. Im Allgemeinen interessieren uns aber die periodischen. Diese bilden eine neue Problemklasse und können mit dem Periodic Event Scheduling Problem modelliert werden.

**Definition 1.2.7** ( $T$ -PESP, Periodic Event Scheduling Problem). Das  $PESP$  ist folgendermaßen definiert: Sei ein gerichteter Graph  $D = (V, A)$  und zwei Vektoren  $\ell, u \in \mathbb{Q}^{|A|}$  gegeben. Gesucht ist ein Vektor  $\pi \in \mathbb{Q}^{|V|}$ , so dass für alle Kanten  $a = (i, j) \in A$  die Ungleichung

$$(\pi_j - \pi_i - \ell_a) \bmod T \leq u_a - \ell_a \tag{1.2.1}$$

erfüllt ist, oder ein Nachweis, dass ein solches  $\pi$  nicht existiert. Die Gleichung (1.2.1) schreiben wir auch als  $\pi_j - \pi_i \in [\ell_a, u_a]_T$ .

Im Regional- und Fernverkehr ist die Taktzeit  $T$  meistens mit einer Stunde gegeben. Im folgenden Beispiel können wir zeigen, dass in einem Graphen mit unteren und oberen Schranken durchaus eine zulässige Lösung des PESP existiert, obwohl es als FDP nicht lösbar ist.

**Beispiel 1.2.8.** Betrachte eine Taktzeit von  $T = 10$  und einen Graphen bestehend aus zwei Knoten, die durch zwei Kanten miteinander verbunden sind (Abb. 1.2.4). Es sind untere und obere Schranken von  $[3, 8]$  auf den Kanten gegeben. Das FDP können wir jetzt über den erweiterten Graphen betrachten, und stellen fest, dass der Graph einen negativen Kreis enthält.

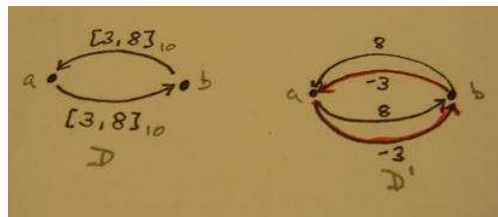


Abbildung 1.2.4: Der Graph  $D'$  enthält einen Kreis negativer Länge.

Als 10-PESP betrachtet, ist es lösbar. Dazu setzen wir  $\pi_a = 0$  und  $\pi_b = 5$ . Dann gilt

$$3 \leq \pi_b - \pi_a = 5 - 0 \leq 8$$

und

$$3 \leq (\pi_a - \pi_b) \bmod T = (0 - 5) \bmod 10 = 5 \leq 8.$$

Erklären kann man sich dieses dadurch, dass man im PESP quasi noch einen nachfolgenden Zug einbeziehen kann. Das ist beim FDP nicht möglich.  $\diamond$

Als nächstes führen wir die Definition von „äquivalent“ zwischen zwei Potenzialen ein, damit wir Fahrpläne verschieben können.

**Definition 1.2.9.** Zwei Potenziale  $\pi, \pi'$  heißen *äquivalent*, wenn für alle  $(i, j) \in V \times V$  die Gleichung

$$(\pi_j - \pi_i) \bmod T = (\pi'_j - \pi'_i) \bmod T$$

erfüllt ist. Das Potenzial  $\pi$  heißt *skaliert zu  $v$* , wenn  $\pi_v = 0$  gilt.

**Lemma 1.2.10.** Sei  $D = (V, A)$  ein gerichteter Graph,  $\pi$  und  $v$  fest gegeben. Dann existiert genau ein  $\pi'$  mit

1.  $\pi'$  ist *skaliert zu  $v$*
2.  $\pi' \sim \pi$
3.  $\forall w \in V: \pi'_w \in [0, T)$ .

Im Folgenden werden wir nur noch Potenziale  $\pi$  betrachten, die zu einem  $v \in V$  skaliert sind, und für die  $\pi \in [0, T)^{|V|}$  gilt.

**Bemerkung 1.2.11.** Für alle  $T$ -PESP Instanzen, die wir betrachten, gilt o.B.d.A:

- $\ell_a \leq u_a$ : ist dies nicht der Fall, so ist das Problem nicht lösbar
- $u_a - \ell_a < T$ : im anderen Fall ist  $\pi_a$  beliebig wählbar und die Zulässigkeit ist immer gewährt
- $0 \leq \ell_a < T$ : ansonsten: Sei  $z_a$  derart, dass  $\ell_a = T \cdot z_a + \ell_a \bmod T$ . Setze  $\ell'_a := \ell_a - T \cdot z_a$  und  $u'_a := u_a - T \cdot z_a$

Das PESP ist noch sehr allgemein gehalten und wir haben seine Modellierungsvielfalt noch nicht gesehen. Dieses folgt in Kapitel 1.3. Betrachten wir noch ein paar theoretische Eigenschaften des PESP:

**Satz 1.2.12.** Sei  $I = (D, \ell, u)$  eine Instanz von  $T$ -PESP. Ein Potenzial  $\pi$  ist genau dann zulässig, wenn für alle  $a = (i, j) \in A$  gilt, dass genau ein  $p_a \in \mathbb{Z}$  existiert, so dass

$$\ell_a \leq \pi_j - \pi_i + T \cdot p_a \leq u_a.$$

Dieser Satz ermöglicht es uns, das PESP über ganzzahlige Solver (z.B. CPLEX) zu lösen. Dies wäre ansonsten nicht möglich, da in den Solvern keine modulo Funktion gegeben ist.

*Beweis.* Allgemein ist die modulo Funktion definiert durch  $a \bmod b = a - b \cdot \max\{z \in \mathbb{Z} | a - bz \geq 0\} \in [0, b)$ . Die Gleichung (1.2.1) können wir dann umschreiben durch

$$0 \leq \pi_j - \pi_i - \ell_a + T \cdot p_a \leq u_a - \ell_a.$$

Der Rest ergibt sich durch weitere Umformungen.  $\square$

Als nächstes wollen wir noch zeigen, dass im Fall eines ganzzahligen Inputs, auch eine ganzzahlige Lösung existiert. Betrachten wir dazu das  $T$ -PESP als Optimierungsproblem:

$$T - \text{PESP}_{\text{MIP}} \begin{cases} \min w^\top (B^\top \pi + T \cdot p - \ell) \\ \ell \leq B^\top \pi + T \cdot p \leq u \\ 0 \leq \pi_i \leq T(1 - \epsilon) & \forall i \in V \\ p \in \mathbb{Z}^{|A|} \end{cases} .$$

Dabei ist  $B$  die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix von  $D$  und  $w$  eine gegebene Gewichtsfunktion. Bei der Formulierung haben wir das Zulässigkeitsproblem um eine Zielfunktion erweitert und daraus ein Optimierungsproblem gemacht. Um die Zielfunktion werden wir später noch genauer betrachten.

**Satz 1.2.13.** *Sei  $I = (D, \ell, u, w)$  eine zulässige Instanz von  $T$ -PESP mit  $u, \ell$  ganzzahlig. Dann existiert eine ganzzahlige Optimallösung.*

*Beweis.* Sei  $(\tilde{\pi}, \tilde{p})$  eine beliebige im allgemein auf  $\pi$  fraktionale Lösung. Definiere  $\ell' = \ell - T \cdot \tilde{p}$  und  $u' = u - T \cdot \tilde{p}$ . Betrachten wir das Problem  $P'$

$$\begin{array}{ll} \ell' \leq B^\top \pi & \leq u' \\ 0 \leq \pi & \leq T. \end{array}$$

Die Koeffizientenmatrix  $B$  ist vollständig unimodular (TUM) [die Knoten-Kanten-Adjazenzmatrix eines gerichteten Graphens ist immer vollständig unimodular und somit auch ihre Transponierte]. Da  $\tilde{\pi}$  das Problem  $P'$  löst, existiert eine ganzzahlige Lösung  $\pi'$  für dieses Problem. Damit ist  $(\pi', \tilde{p})$  eine ganzzahlige Lösung unseres ursprünglichen Problems.  $\square$

Als letztes wollen wir noch die Komplexität des PESP betrachten. Dabei stellen wir fest, dass das PESP-Zulässigkeitsproblem  $\mathcal{NP}$ -vollständig ist.

**Satz 1.2.14.** *Das  $k$ - Vertex Colorability ist ein Spezialfall von  $T$ -PESP.*

*Beweis.* Gegeben sei ein Graph  $G = (V, E)$ . Für diesen Graphen soll eine  $k$  Färbung bestimmt werden. Sei  $D$  eine beliebige Orientierung von  $G$ . Setze  $\ell = 1$  und  $u = T - 1$  mit  $k = T$ . Eine Lösung des PESP für den Graphen  $D$  liefert eine Knotenbewertung  $\pi_v \in [0, T - 1]$ . Zwischen zwei benachbarten Knoten muss  $\pi_j - \pi_i \neq 0$  eingehalten werden. Damit werden ihnen unterschiedliche Farben zugeordnet.  $\square$

Durch die Ähnlichkeit zum  $k$ - Vertex Colorability Problem können wir zeigen, dass das PESP  $\mathcal{NP}$ -vollständig ist.

**Satz 1.2.15.** *Das  $T$  - PESP ist  $\mathcal{NP}$ - vollständig.*

*Beweis.* Sei  $G = (V, E)$  und  $k$  eine Instanz des  $k$ - Coloring Problems. Analog zu Satz 1.2.14 konstruieren wir eine  $T$ -PESP Instanz. Da das  $k$ - Coloring Problem  $\mathcal{NP}$ - vollständig ist, ist  $T$ -PESP dies auch.  $\square$

Nachdem wir die Schwierigkeit des Problems festgestellt haben, interessiert uns die Approximierbarkeit des PESP. Bei der Approximation sehen wir als Zielfunktion die Anzahl der erfüllten Bedingungen an. Diese Zielfunktion soll maximiert werden. Diese Variante wird auch als MAX- $T$ -PESP bezeichnet.

**Bemerkung 1.2.16.** *Das MAX- $T$ -PESP ist MAX- $\mathcal{SNP}$ - schwer.*

**Korollar 1.2.17.** *Das MAX- $T$ -PESP kann nur dann ein polynomielles Approximationschema besitzen, falls  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$  gilt.*

### 1.3 Fahrplanmodellierungen mit Hilfe des PESP

Als nächstes interessiert uns, wie wir ein Fahrplan mit Hilfe des PESP modellieren können. Die Variablen  $\pi$  für die einzelnen Knoten geben Zeitpunkte an.

Gehen wir jetzt genauer auf die Modellierung ein. Aus der Linienplanung ist uns eine Menge von Ereignissen gegeben. Ein Ereignis besteht aus dem Zustand Ankunft oder Abfahrt, einer Linie, wobei wir gerichtete Linien meinen, und einer Station. Diese Ereignisse bilden die Knoten in unserem Graphen. Gesucht wird für jedes Ereignis  $v \in V$  der Zeitpunkt  $\pi_v \in [0, T)$  seines Eintretens.

Dabei muss  $\pi$  diversen Anforderungen genügen, die wir später genauer betrachten werden. Der Vektor  $\pi$  wird auch *Minutenplan*, *Fahrlagen* oder *Basic Hourly Pattern* genannt. Um einen Minutenplan zu erhalten, wollen wir einen PESP-Graphen erstellen. Der PESP-Graph besteht aus Knoten, die die Ereignisse wieder spiegeln, und aus Kanten, die je nach Anforderungen in den PESP-Graphen hinzugefügt werden. Dabei garantiert eine Kante  $a = (i, j)$  mit einer unteren Schranke  $\ell_a$  und oberen Schranke  $u_a$  die Bedingung

$$0 \leq (\pi_j - \pi_i - \ell_a) \bmod T \leq u_a - \ell_a.$$

Betrachten wir die ersten elementaren Anforderungen: **Fahrzeit**, **Haltezeit**, **Umsteigezeit**. Um die Modellierung am besten zu erklären betrachten wir sie an einem Beispiel (Abb. 1.3.1).

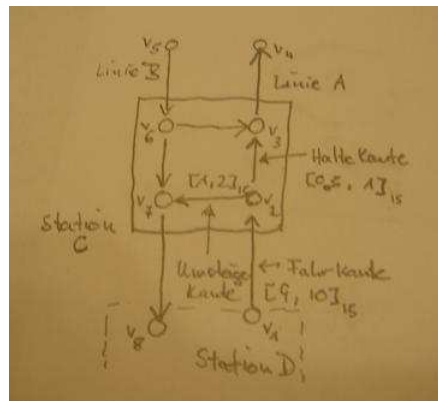


Abbildung 1.3.1: Fahrzeiten, Haltezeiten und Umsteigezeiten können mit Hilfe von Kanten modelliert werden.

Das Ereignis  $v_1$  besteht aus (Abfahrt, Linie A, Station D) und das Ereignis  $v_2$  aus (Ankunft, Linie A, Station C) und es wird eine Taktzahl von  $T = 15$  vorgegeben. Um von Station D zur Station C zu kommen, wird eine Fahrzeit zwischen 9 und 10 Minuten veranschlagt. Wir modellieren diese mit einer Fahrkante  $e$  zwischen  $v_1$  und  $v_2$  mit den Schranken  $\ell_e = 9$  und  $u_e = 10$ . Die Zeitpunkte  $\pi_{v_1}$  und  $\pi_{v_2}$  müssen  $\ell_e \leq (\pi_{v_2} - \pi_{v_1}) \bmod T \leq u_e$  erfüllen. Betrachten wir als nächstes das Ereignis  $v_3 =$  (Abfahrt, Linie A, Station C). Zwischen der Ankunft in  $v_2$  und der Abfahrt in  $v_3$  soll eine Haltezeit von 0.5 oder 1 Minute eingehalten werden. Auch diese können wir durch Einfügen einer Haltekante  $e = (v_2, v_3)$  mit  $\ell_e = 0.5$  und  $u_e = 1$  erreichen. Zwischen den Ereignissen  $v_2$  und  $v_7 =$  (Abfahrt, Linie B, Station C) wollen wir eine Umsteigezeit von mindestens einer Minute und höchstens zwei Minuten garantieren. Dazu fügen wir die Kante  $e = (v_2, v_7)$  mit  $\ell_e = 1$  und  $u_e = 2$  in den PESP-Graphen ein.

Betrachten wir nun das Problem, dass zwischen zwei teilweise parallel verlaufenden Linien ein **Mindestabstand**  $a$  eingehalten werden soll (Abb. 1.3.2).

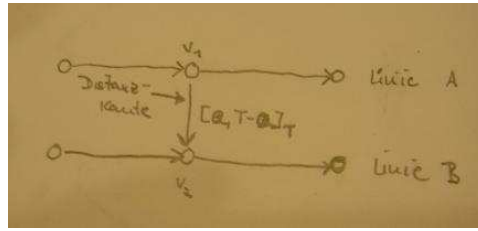


Abbildung 1.3.2: Zwischen den beiden Linien A und B soll ein Mindestabstand  $a$  eingehalten werden.

Auf den parallel verlaufenden Linien gibt es Ereignisse, die sich nur durch die Linie unterscheiden. Betrachte dazu  $v_1 = (\text{Ankunft, Linie A, Station A})$  und  $v_2 = (\text{Ankunft, Linie B, Station A})$ . Zwischen zwei solcher Ereignisse fügen wir eine Distanzkante  $e = (v_1, v_2)$  mit  $\ell_e = d$  und  $u_e = T - d$  in den PESP-Graphen ein. Zwischen zwei Linien, zwischen denen ein Minimalabstand eingehalten werden soll, muss nur eine Distanzkante eingefügt werden.

Eine weitere Modellierungsmöglichkeit bietet das PESP für **disjunktive Bedingungen**. Für den Fahrplan soll  $\pi_j - \pi_i \in [\ell_a, u_a]$  oder  $\pi_j - \pi_i \in [\ell'_a, u'_a]$  erfüllt sein mit  $u_a < \ell'_a$  und  $u'_a < \ell_a + T$ . Diese oder Bedingung können wir durch zwei Constraints ersetzen:  $\pi_j - \pi_i \in [\ell_a, u'_a]$  und  $\pi_j - \pi_i \in [\ell'_a, u_a]$  müssen erfüllt sein. Veranschaulichen kann man das durch die folgende Skizze (Abb. 1.3.3).

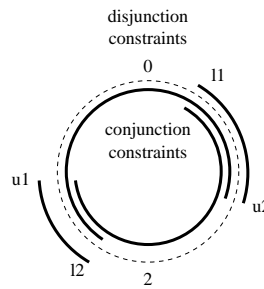


Abbildung 1.3.3: disjunktive Bedingungen

Bisher haben wir im Rahmen der Modellierung nur ereignisbasierte Zeitvariablen  $\pi$  betrachtet. Diese sind insbesondere nützlich zum Modellieren, allerdings problematisch zum Lösen der resultierenden Optimierungsprobleme. Außerdem ist es schwierig die Bereiche von Werten von  $\pi$  zu identifizieren, die gute Zielfunktionswerte versprechen. Betrachte dazu das folgende Beispiel.

**Beispiel 1.3.1.** Betrachte den folgenden Graphen (Abb. 1.3.4).

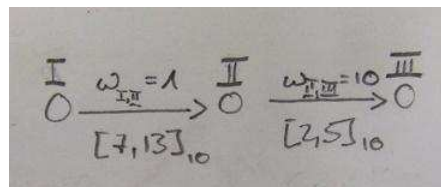


Abbildung 1.3.4: Anhand der  $\pi_i$  Werte ist es nicht möglich zu sagen, ob ein Potenzial „gut“ oder „schlecht“ ist.

Wir skalieren den Wert für  $\pi_I$  mit 0. Betrachten wir die Lösungen  $\pi_I = 0, \pi_{II} = 7, \pi_{III} = 9$  und  $\pi'_I = 0, \pi'_{II} = 9, \pi'_{III} = 1$ . Beide Lösungen sind zulässig. In beiden Fällen haben wir einen guten Wert für die dominierende Kante  $(II, III)$ , nämlich  $x_{(II,III)} = 2$ . Allerdings unterscheiden sie sich in der Bewertung der ersten Kante durch  $x_{(I,II)} = 7$  und  $x'_{(I,II)} = 9$ . Wichtiger an dem Beispiel ist aber, dass die Werte für  $\pi_{III}$  stark variieren und wir anhand dieser Werte keine Aussage über die Güte der Lösung sagen können.  $\diamond$

## 1.4 Weitere PESP- Formulierungen

Wir wollen jetzt äquivalente Problemformulierungen finden mit anderen Zeitvariablen und/oder anderen ganzzahligen Variablen. Bisher hatten wir gesagt, dass  $\pi$  bzgl. eines  $v \in V$  skaliert ist und außerdem  $\pi \in [0, T]^{|V|}$  gilt. Stattdessen können wir fordern, dass  $\pi$  bzgl. eines Baumes  $F \subset A$  skaliert wird. In diesem Fall werden die  $p_a$  entlang der Baumkanten vorgegeben. Für ein  $v \in V$  mit  $\pi_v = 0$  sind die restlichen Potentiale  $\pi$  eindeutig bestimmt. Dass diese Skalierung möglich ist, werden wir später in einem Beweis sehen. Bei dieser Art von Skalierung verliert man die Eigenschaft, dass  $\pi \in [0, T]^{|V|}$  liegt. Betrachten wir ein Beispiel dazu.

**Beispiel 1.4.1.** Gegeben sei der Graph  $D = (V, A)$  wie in Abbildung 1.3.4 mit einer festen Taktzeit  $T$  und der Baum  $F$ . Es soll  $p_{|F} = 0$  gelten. Das Potential  $\pi = (0, 9, 1)$  erfüllt  $\pi_i \in [0, 10)$ . Allerdings verletzt es die vorgegebenen Werte von  $p_{|F}$ . Das Potential  $\pi' = (0, 9, 11)$  hingegen erfüllt dieses.  $\diamond$

**Bemerkung 1.4.2.** Bei einem bzgl. eines Baumes skalierten Potenzial, ist die Ganzzahligkeitsinformation der  $p$ -Variable ausschließlich auf Nichtbaumkanten bzgl. eines beliebig gewählten aufspannenden Baumes von Interesse.

Im weiteren werden wir eine neue Modellierung des PESP mit Hilfe von so genannten  $T$ -periodischen Spannungen kennenlernen.

**Definition 1.4.3.** Sei  $D = (V, A)$  ein gerichteter Graph. Ein Vektor  $y \in \mathbb{Q}^{|A|}$  heißt *Tension*, falls ein Vektor  $\pi \in \mathbb{Q}^{|V|}$  existiert, so dass für alle  $a = (i, j) \in A$  die Bedingung  $y_a = \pi_j - \pi_i$  erfüllt ist. Ein Vektor  $y \in \mathbb{Q}^{|A|}$  heißt  *$T$ -periodische Tension*, falls ein  $\pi \in \mathbb{Q}^{|V|}$  und ein  $p \in \mathbb{Z}^{|A|}$  mit  $y_a = \pi_j - \pi_i + T \cdot p_a$  für alle  $a = (i, j) \in A$  existiert.

Zu einer Instanz  $I = (D, \ell, u)$  von  $T$ -PESP definieren wir für einen gegebenen Vektor  $\pi \in \mathbb{Q}^{|V|}$  die *induzierte  $T$ -periodische Tension*  $x(\pi)_a$  durch

$$x(\pi)_a := \underbrace{(\pi_j - \pi_i - \ell_a) \bmod T}_{\in [0, T)} + \ell_a.$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\in [\ell_a, \ell_a + T)}$$

Eine nützliche Eigenschaft periodischer Tensions ist folgende:

**Satz 1.4.4** (Cycle periodicity property). *Sei  $x \in \mathbb{Q}^{|A|}$  eine  $T$ -periodische Tension für den Graphen  $D = (V, A)$ . Dann existiert für jeden orientierten Kreis  $C$  in  $D$  eine ganze Zahl  $z_C \in \mathbb{Z}$  mit*

$$\sum_{a \in C^+} x_a - \sum_{a \in C^-} x_a = T \cdot z_C.$$

*Beweis.* Sei  $C$  in  $D$  ein orientierter Kreis. Nach der Definition einer  $T$ -periodischen Tension existiert ein  $\pi \in \mathbb{Q}^{|V|}$  und ein  $p \in \mathbb{Z}^{|A|}$ , so dass

$$\begin{aligned} \sum_{a \in C^+} x_a - \sum_{a \in C^-} x_a &= \sum_{a \in C^+} (\pi_j - \pi_i + Tp_a) - \sum_{a \in C^-} (\pi_j - \pi_i + Tp_a) \\ &= \sum_{a \in C^+} (\pi_j - \pi_i) - \sum_{a \in C^-} (\pi_j - \pi_i) + T \cdot \underbrace{\left( \sum_{a \in C^+} p_a - \sum_{a \in C^-} p_a \right)}_{=: z_C} \\ &= 0 + T \cdot z_C \end{aligned}$$

gilt. Dabei nutzen wir aus, dass für jeden orientierten Kreis

$$\sum_{a \in C^+} (\pi_j - \pi_i) - \sum_{a \in C^-} (\pi_j - \pi_i) = 0$$

gilt. Dieses kann man sich folgendermaßen veranschaulichen. Sei  $e = (i, j) \in C^-$ . Definiere den Kreis  $C' := C \setminus (i, j) \cup (j, i)$ . Der Kreis  $C'$  entspricht also dem Kreis  $C$ , nur dass die Kante  $e$  andersherum orientiert ist (Abb. 1.4.1).

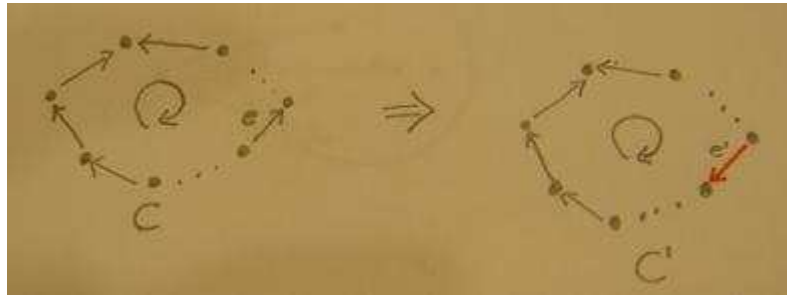


Abbildung 1.4.1: Im Kreis  $C'$  ist die Orientierung der Kante  $e$  antiparallel zur Kante  $e$  in  $C$ .

Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{a \in C^+} (\pi_j - \pi_i) - \sum_{a \in C^-} (\pi_j - \pi_i) &= \sum_{a \in C^+} (\pi_j - \pi_i) - (\pi_{j_e} - \pi_{i_e}) - \sum_{a \in C^- \setminus e} (\pi_j - \pi_i) \\ &= \sum_{a \in C^+} (\pi_j - \pi_i) + (\pi_{i_e} - \pi_{j_e}) - \sum_{a \in C^- \setminus e} (\pi_j - \pi_i) \\ &= \sum_{a \in C'^+} (\pi_j - \pi_i) - \sum_{a \in C'^-} (\pi_j - \pi_i). \end{aligned}$$

Da in der Menge  $C^-$  nur endlich viele Kanten sind, können wir auf die gleiche Art und Weise einen gerichteten Kreis  $C^*$  konstruieren. Bei gerichteten Kreisen wissen wir, dass die Summe der Potenziale über die Kanten Null entspricht. Da diese Summe der Summe der Potenzialdifferenzen von  $C$  entspricht, gilt das Gewünschte.  $\square$

Wir suchen im folgenden eine Formulierung des PESP, die auf  $x_a$  basiert und ohne  $\pi_i$  auskommt.

**Satz 1.4.5.** Sei  $D = (V, A)$  ein gerichteter Graph, eine Taktzeit  $T$  und ein Vektor  $x \in \mathbb{Q}^{|A|}$  gegeben. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. Der Vektor  $x$  ist  $T$ -periodische Tension

2. Sei  $F \subset A$  ein aufspannender Baum des zugrundeliegenden ungerichteten Graphen. Für jeden durch einen seiner Nichtbaumkanten  $a_0 \in A \setminus F$  bzgl.  $F$  induzierten orientierten Fundamentalkreis  $C_F(a_0)$  gilt: es existiert ein  $z_C \in \mathbb{Z}$  mit

$$\sum_{a \in C^+} x_a - \sum_{a \in C^-} x_a = T \cdot z_C.$$

3. Für jeden orientierten Kreis  $C$  in  $D$  gilt: Es existiert ein  $z_C \in \mathbb{Z}$  mit

$$\sum_{a \in C^+} x_a - \sum_{a \in C^-} x_a = T \cdot z_C.$$

*Beweis.* Wir hatten schon (1) $\Rightarrow$ (3) in Satz 1.4.4 gezeigt. Trivialerweise folgt aus (3) die Aussage (2). Es bleibt also (2) $\Rightarrow$ (1) zu zeigen.

Übernehme den spannenden Baum  $F$  aus (2). Wähle  $v$  beliebig aber fest mit  $\pi_v = 0$ . Da  $F$  ein Baum ist, ist er minimal zusammenhängend. Dementsprechend traversieren (d.h. wir bewegen uns von  $v$  in den Baum zu den andern Knoten) wir den Baum  $F$ . Sei  $a = (i, j) \in F$ . Wir betrachten folgende zwei Fälle:

1. Fall: Sei  $\pi_i$  gesetzt, d.h. die  $\text{dist}_F(v, j) = \text{dist}_F(v, i) + 1$  (mit  $\text{dist}$  ist der Abstand von  $v$  nach  $i$  gemeint). Dann setze  $\pi_j := \pi_i + x_a$  mit  $p_a := 0$ . Damit gilt  $x_a = \pi_j - \pi_i + T \cdot 0$ .

2. Fall: Sei  $\pi_j$  gesetzt. Dann definiere  $\pi_i := \pi_j - x_a$  und  $p_a := 0$ . Auch hier gilt wieder  $x_a = \pi_j - \pi_i + T \cdot 0$ .

Der so definierte Vektor  $x$  erfüllt somit alle Bedingungen der Baumkanten. Sei  $a_0 = (i, j) \in A \setminus F$  eine Nichtbaumkante. Betrachte den Fundamentalkreis  $C_F(a_0) =: C$ . Wir wissen, dass ein  $z_C \in \mathbb{Z}$  existiert mit

$$\sum_{a \in C^+} x_a - \sum_{a \in C^-} x_a = T \cdot z_C. \tag{1.4.1}$$

Setze  $x_a = \pi_\ell - \pi_k$  für alle  $a = (k, \ell) \in C \cap F$ . Durch das Einsetzen in die Gleichung (1.4.1) bleibt

$$\begin{aligned} x_{a_0} - \pi_j + \pi_i &= T \cdot z_C \\ \Leftrightarrow x_{a_0} &= \pi_j - \pi_i + T \cdot z_C. \end{aligned}$$

Mit  $p_{a_0} := z_C$  ist die Bedingung erfüllt. □

**Bemerkung 1.4.6.** Für  $p \equiv 0$  und  $z \equiv 0$  haben wir ein „klassisches“ Resultat. Nachträglich ist dies der Beweis dafür, dass die Skalierung bzgl. eines Baums der  $(\pi, p)$  möglich ist.

Anstatt mit  $(\pi, p)$  zu rechnen können wir auch  $(x, z)$  betrachten. Für diese Zeitdauern können wir besser beurteilen, ob sie gut sind. Es bleibt zu prüfen, ob wir die Werte von  $z$  gut abschätzen können.

## 1.5 Schranken für die ganzzahligen Variablen $z$

Wir wissen, dass für eine Tension  $x$  und einen Kreis  $C$  die Bedingung

$$T \cdot z_C = \sum_{a \in C^+} x_a - \sum_{a \in C^-} x_a$$



gilt. Damit erhalten wir

$$z_C = \frac{1}{T} \left( \sum_{a \in C^+} x_a - \sum_{a \in C^-} x_a \right).$$

Diese bezeichnen wir als Kreisvariable  $z_C$  von  $C$ . Weiter gilt  $\ell_a \leq x_a \leq u_a$ . Dies hatten wir als PESP Bedingung formuliert.

**Satz 1.5.1** (Odijk 1996). *Eine untere Schranke  $\underline{z}_C$  für die Kreisvariablen  $z_C$  ergibt sich durch*

$$\underline{z}_C := \lceil \frac{1}{T} \left( \sum_{a \in C^+} \ell_a - \sum_{a \in C^-} u_a \right) \rceil$$

und eine obere Schranke  $\bar{z}_C$  durch

$$\bar{z}_C := \lfloor \frac{1}{T} \left( \sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} \ell_a \right) \rfloor.$$

Dass diese Schranken den Lösungsraum der  $z$  besser beschränken als die Schranken für  $p$  ihren Lösungsraum, zeigt das folgende Beispiel:

**Beispiel 1.5.2.** Sei  $T = 10$ . Betrachte den folgenden Graphen  $D$  (Abb. 1.5.1).

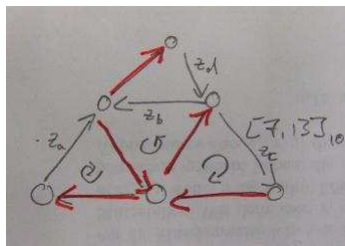


Abbildung 1.5.1: Die roten Kanten bilden den spannenden Baum  $F$ .

Bei der  $(\pi, p)$  Modellierung haben wir  $|A|$  viele ganzzahlige Variablen  $p$ . Wir wissen, dass  $0 \leq p_a \leq 2$  gilt (Übung).

Betrachte für die  $(x, z)$ -Formulierung den roten spannenden Baum. Dann erhalten wir für  $z_C$

$$\lceil \frac{1}{10}(21) \rceil \leq z_C \leq \lfloor \frac{1}{10}(39) \rfloor$$

und damit  $z_C = 3$ . Für  $z_a$  und  $z_b$  erhalten wir den gleichen Wert. Für  $z_d$  ergibt sich

$$-1 \leq z_d \leq 1.$$

Damit ist der Lösungsraum der  $z$  kleiner als der der  $p$ . ◇

Im allgemeinen existieren für einen Graphen viele spannende Bäume. Unser Ziel ist es einen Baum zu finden, der enge Schranken für die  $z$  ermöglicht. Wir erhalten also das Problem

$$\min_{F \text{ Baum}} \prod_{a \in A \setminus F} (\bar{z}_{C_F(a)} - \underline{z}_{C_F(a)} + 1).$$

Dieses ist etwas problematisch, da wir erstens ein Produkt mit einer Summe gemischt haben und zweitens mit Rundungsoperationen umgehen müssen.

Betrachten wir den Fall ohne Runden. Dann gilt

$$\begin{aligned} \bar{z}_{C_F(a)} - \underline{z}_{C_F(a)} &\sim \frac{1}{T} \left( \sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} \ell_a - \sum_{a \in C} \ell_a + \sum_{a \in C^-} u_a \right) \\ &= \frac{1}{T} \left( \sum_{a \in C} (u_a - \ell_a) \right). \end{aligned}$$

Mangels Alternativen, vereinfachen wir das Problem weiter zu folgender Variante: Betrachte einen spannenden Baum  $F$ , der

$$\sum_{a \in A \setminus F} \sum_{a' \in C_F(a)} w_{a'}$$

mit  $w_{a'} = u_{a'} - \ell_{a'}$  minimiert. Dieses Problem wird auch als *Minimum Strictly Fundamental Cycle Basis Problem* bezeichnet.

Das der Prozess des Rundens problematisch sein kann, sieht man an dem folgenden Beispiel:

**Beispiel 1.5.3.** Gegeben sei der Graph  $G = (V, E)$  mit  $\ell \equiv 4$  und  $u \equiv 5$  (Abb. 1.5.2). Betrachten wir die untere und oberen Schranken für die Kreisvariablen  $C_1$  und  $C_2$ , so erhalten wir

$$2 = \left\lceil \frac{1}{10} \cdot 16 \right\rceil \leq z_{C_1} \leq \left\lfloor \frac{1}{10} \cdot 20 \right\rfloor = 2$$

und

$$2 = \left\lceil \frac{1}{10} \cdot 20 \right\rceil \leq z_{C_2} \leq \left\lfloor \frac{1}{10} \cdot 25 \right\rfloor = 2$$

und damit eine mögliche Bewertung der Kreisvariablen. Betrachten wir hingegen den Kreis  $C_2 - C_1$  so ergibt sich

$$1 = \left\lceil \frac{1}{10} \cdot (16 - 15) \right\rceil \leq z_{C_2 - C_1} \leq \left\lfloor \frac{1}{10} \cdot (20 - 12) \right\rfloor = 0,$$

und wir können sofort daraus ablesen, dass es keine zulässige Lösung gibt.

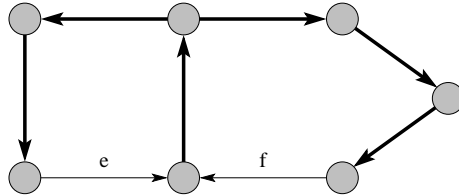


Abbildung 1.5.2: Für das Problem gibt es keine zulässige Lösung.

◇

Insgesamt können wir uns als jedoch als Faustregel merken: Je kürzer  $\sum_{C \in \mathcal{C}} \sum_{a \in C} (u_a - \ell_a)$  einer strikt fundamentalen Kreisbasis, desto weniger ganzzahlige „Kandidatenvektoren“  $z$  hat man im entsprechenden ganzzahligen Programm. Das Problem eine minimale strikt fundamentale Kreisbasis zu finden ist nach dem nächsten Satz  $\mathcal{NP}$ -schwer.

**Satz 1.5.4** (Deo et al. 1982). *Das Problem, für einen ungewichteten Graphen eine minimale strikt fundamentale Kreisbasis zu konstruieren, ist  $\mathcal{NP}$ -schwer.*

Als gute Nachricht können wir auffassen:

**Satz 1.5.5** (Emek et al. 2005). *Das minimale strikt fundamentale Kreisbasenproblem (MSFCBP) besitzt stets eine Lösung der Größe  $\mathcal{O}(W \log^2 n \cdot \log \log n)$ , wobei  $W = \sum_{a \in A} w_a$  ist.*

**Bemerkung 1.5.6.** Der Faktor  $W$  ist eine untere Schranke für die Länge einer jeden Kreisbasis eines 2-fach zusammenhängenden Graphen, da jede Kante auf mindestens einem Basiskreis liegen muss.

Ist der Graph nicht 2-fach zusammenhängend, gilt die Bemerkung nicht (Abb. 1.5.3).

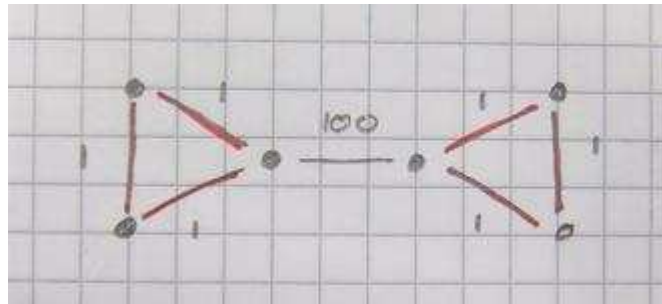


Abbildung 1.5.3: Der Wert  $W = \sum_a w_a = 106$  ist größer als die Länge der minimalen Kreisbasis  $\ell(\mathcal{B}) = 6$ .

## 1.6 Klassen von Kreisbasen

Wir haben mittlerweile festgestellt, dass es im Bereich der Taktfahrplanung sinnvoll ist sich mit Kreisen zu beschäftigen. Mit Hilfe von Kreisen erhalten wir Schranken auf die ganzzahlige Variablen bei der Kreisperiodenformulierung des PESP. Im folgenden betrachten wir zwei spezielle Klassen von Kreisbasen.

**Definition 1.6.1.** Der *Kreisraum*  $\mathcal{C}(D)$  eines gerichteten Graphen  $D$  ist definiert als der lineare Spann aller Inzidenzvektoren  $\gamma_C$ , wobei  $C$  ein orientierter Kreis in  $D$  ist. Damit gilt

$$\mathcal{C}(D) := \text{span}\{\gamma_C \mid C \text{ orientierter Kreis in } D\} \subset \mathbb{Q}^{|A|}.$$

Eine *Kreisbasis* ist ein minimales Erzeugendensystem von  $\mathcal{C}(D)$ , wobei nur Inzidenzvektoren einfacher Kreise Basiselemente sind.

**Bemerkung 1.6.2.** Analoge Definitionen für ungerichtete Graphen  $G$  ist  $\mathcal{C}(G) \subset \text{GF}(2)^{|E|}$ . Im  $\text{GF}(2)$  gilt  $1 + 1 = 0$ .

**Bemerkung 1.6.3.** Wir bezeichnen mit  $\nu := \dim \mathcal{C}(D) = m - n + 1 = |A| - |V| + 1$  die *zyklomatische Zahl* des Kreisraumes, wobei wir voraussetzen, dass  $D$  zusammenhängend ist.

**Definition 1.6.4.** Die *Kreismatrix*  $\Gamma$  einer Kreisbasis  $\mathcal{B}$  ist die *Kanten-Kreis-Inzidenzmatrix* von  $\mathcal{B}$ , d.h.  $\Gamma$  hat in den Spalten die Inzidenzvektoren der Kreise der Basis  $\mathcal{B}$ .

Betrachten wir nach diesem Definitions-marathon ein Beispiel:

**Beispiel 1.6.5.** Sei  $\mathcal{C}$  die Fundamentalebasis zum roten spannenden Baum (Abb. 1.6.1).

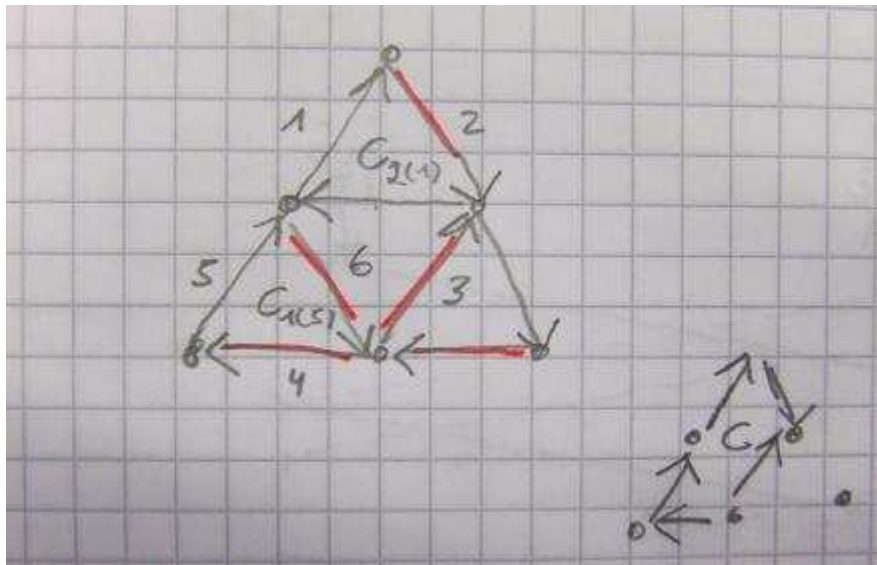


Abbildung 1.6.1: Der Kreis  $C$  soll als Linearkombination der Fundamentalbasis dargestellt werden.

Wir wollen nun den Kreis  $C = (1, 2, 3, 4, 5)$  als Linearkombination der Fundamentalbasis darstellen. Mit  $C_1 = (5, 6, 4)$  und  $C_2 = (1, 2, -3, -6)$  erhalten wir  $C = C_1 + C_2$ .

Allgemein lässt sich die Linearkombination zur Darstellung eines Kreises  $C$  durch eine Fundamentalkreisbasis leicht bestimmen. Dazu sei  $E$  die Menge der Nichtbaumkanten von  $C$ , wobei  $E^+$  die Menge der Kanten, welche die Orientierung von  $C$  angibt, und  $E^- = E \setminus E^+$  ist. Sei  $C_e$  der Fundamentalkreis zur Kante  $e$ . Dann gilt

$$C = \sum_{e \in E^+} C_e - \sum_{e \in E^-} C_e.$$

◇

**Bemerkung 1.6.6.** Strikt fundamentale Kreisbasen sind genau diejenigen, deren Kreismatrix sich auf folgende Gestalt permutieren lässt:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} I \\ * \end{pmatrix},$$

wobei  $*$  eine beliebige Matrix ist. Die Matrix  $*$  enthält viele redundante Gleichungen.

**Lemma 1.6.7.** Sei  $B = C_1, \dots, C_\nu$  Kreisbasis eines 2-fach zusammenhängenden gerichteten Graphen  $D = (V, A)$  mit der Kreismatrix  $\Gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_\nu]$ . Die Matrix  $\Gamma$  besitzt genau dann nach dem Löschen von  $n - 1$  Zeilen vollen Rang, wenn die dazugehörigen  $n - 1$  Kanten einen Baum  $F$  bilden.

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “: Sei  $B'$  die durch  $F$  induzierte strikt fundamentale Kreisbasis mit Matrix  $\Gamma'$ . Da  $B'$  eine Basis ist, existiert eine Matrix  $R$  mit

$$\Gamma' \cdot R = \Gamma$$

und es existiert eine Matrix  $R'$  mit  $\Gamma' = \Gamma R'$ . Mit der Einschränkung auf die  $\nu = m - n + 1$  Zeilen dieses Gleichungssystems, die zu  $A \setminus F$  gehören, erhalten wir

$$\Gamma'_{|A \setminus F} = I_0 = \Gamma_{|A \setminus F} \cdot R'.$$

Also ist  $R'$  die Inverse zu  $\Gamma_{|A \setminus F}$ . Damit muss  $\Gamma_{|A \setminus F}$  regulär sein.

„ $\Rightarrow$ “: Wir nehmen an, die  $n - 1$  gelöschten Kanten  $L$  enthalten einen Kreis  $C$ . Da  $B$  eine Basis ist, existiert ein  $y \in \mathbb{Q}^\nu, y \neq 0$  mit  $\Gamma \cdot y = \gamma_C$ . Wir wissen insbesondere  $\gamma_C \in \{-1, 0, 1\}$ . Das Löschen dieser  $n - 1$  Zeilen, die  $C$  komplett enthalten, liefert  $\Gamma_{|A \setminus L} y = \gamma_{C|A \setminus L} = 0$ . Damit haben wir eine nichttriviale Kombination der 0 und  $\Gamma_{|A \setminus L}$  ist nicht regulär. Widerspruch zur Behauptung.  $\square$

Betrachten wir noch eine nützliche Aussage zu Kreisbasen, die wir allerdings nicht beweisen wollen.

**Satz 1.6.8.** *Seien  $C_1, \dots, C_\nu$  Kreise in einem gerichteten Graphen  $D$ . Wenn  $|C_1|, \dots, |C_\nu|$  eine Basis für  $G(D)$ , der ungerichtete Graph zu  $D$  ist, dann ist  $C_1, \dots, C_\nu$  eine Basis für  $D$ .*

**Bemerkung 1.6.9.** Insbesondere können wir sagen, wenn  $G(D)$  eine Basis hat, dann ist diese Basis auch im gerichteten Graphen eine Basis.

Im folgenden betrachten wir ungerichtete Kreise.

**Definition 1.6.10** (2-Basis, schwach fundamental). Eine Kreisbasis heißt *2-Basis*, wenn jede Kante auf höchstens zwei Kreisen liegt. Eine Menge  $C_1, \dots, C_\nu$  von Kreisen heißt *schwach fundamentale Kreisbasis*, wenn eine Permutation  $\Pi$  mit

$$\forall i = \{2, \dots, \nu\} : C_{\Pi(i)} \setminus (C_{\Pi(1)} \cup \dots \cup C_{\Pi(i-1)}) \neq \emptyset$$

existiert.

**Bemerkung 1.6.11.** Betrachte die Kreismatrix  $\Gamma$  einer schwach fundamentalen Kreisbasis  $B$ . Wir können die Kreise und Kanten so anordnen, dass die ersten  $\nu$ - Zeilen von  $\Gamma$  eine reguläre  $\nu \times \nu$ - Dreiecksmatrix  $L$  darstellen (Abb. 1.6.2).

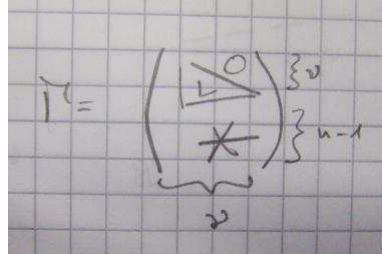


Abbildung 1.6.2: Die Kreismatrix einer schwach fundamentalen Kreisbasis kann als untere Dreiecksmatrix dargestellt werden.

Die Reihenfolge der ersten  $\nu$  Kanten wird festgelegt durch

$$e_i \in C_{\Pi(\nu-i+1)} \setminus (C_{\Pi(1)} \cup \dots \cup C_{\Pi(\nu-i)}).$$

Mit Hilfe von  $\Gamma$  sieht man also noch mal sehr schön, dass es sich tatsächlich um eine Basis handeln muss.

Man kann zeigen, dass jede 2- Basis schwach Fundamental ist.

**Beispiel 1.6.12.** Betrachten wir wieder unsere Testinsanz aus dem Beispiel 1.6.5. Das Ziel war, die oberen und unteren Schranken von  $z$  möglichst klein zu bekommen. Im Beispiel hatten wir

für einen gerichteten Kreis der Länge drei die oberen und unteren Schranken von 3 erhalten. Wir können jetzt versuchen möglichst viele solcher Kreise in unsere Basis nehmen.

Bei der Betrachtung des spannenden Baumes hatte die Fundamentalbasis schon drei dieser Kreise enthalten. Die Basis, bestehend aus allen vier Kreisen der Länge drei, ist schwach fundamental. Das kann man sehen, solange das mittlere Dreieck nicht  $\Pi(\nu)$  ist. Außerdem ist es eine 2-Basis.  $\diamond$

Gehen wir noch mal zu dem Problem zurück eine minimale Fundamentale Kreisbasis zu finden. Wir hatten festgestellt, dass dies  $\mathcal{NP}$ -schwer ist. Erweitert man die Menge der betrachteten Kreisbasen, so erhält man das minimale Kreisbasen Problem. In diesem Problem wird eine minimale Kreisbasis in einem Graphen gesucht. Damit beschäftigen wir uns im nächsten Abschnitt.

## 1.7 Minimales Kreisbasen Problem (MCBP)

Beim MCBP wird diejenige Kreisbasis eines ungerichteten, gewichteten Graphen  $G$  mit Gewichten  $w$  gesucht, deren Länge minimal ist. Dabei wird die Länge einer Kreisbasis als die Summe der Längen ihrer Kreise definiert. Die Länge eines Kreises ergibt sich aus der Summe seiner Kantengewichte. Für das Problem gibt es unterschiedliche polynomielle Algorithmen. Wir werden einen konkreten später betrachten. In der Praxis werden Minimale Kreisbasen dazu benutzt Schaltkreise zu modellieren oder Graphen zu vergleichen. Der Graphenvergleich wird insbesondere in der Biochemie verwendet. Bei der Taktfahrplanung ergibt sich das Problem, dass nicht jede MCB zur Formulierung des PESP IP verwendet werden kann. Die Klassen der schwach fundamental-, strikt fundamental und der 2-Basen können hingegen zur PESP IP Modellierung verwendet werden. Allerdings ist es in polynomieller Zeit möglich festzustellen, ob eine MCB zur Formulierung geeignet ist oder nicht. Dies werden wir später genauer betrachten.

Der Vorteil von MCB ist, dass sie effizient zu berechnen und i.a. deutlich kürzer als MSFCB sind (Beispiel 1.7.1). Allerdings gehen wir das Risiko ein, dass sie u.U. nicht für das PESP-IP verwendbar sind.

**Beispiel 1.7.1.** Betrachte einen quadratischen Gittergraphen  $G_{N,N}$  mit der Seitenlänge  $N$ . Dann gilt  $|V_{N,N}| = n = N^2$  und wir erhalten  $\nu = (N - 1)^2$  (Abb. 1.7.1).

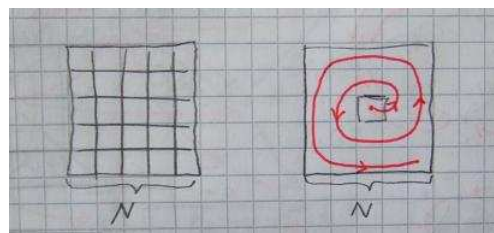


Abbildung 1.7.1: Die Minimale Kreisbasis von  $G_{N,N}$  besteht aus allen Kreisen der Länge 4. Durch die dargestellte Permutation ergibt sich die schwache Fundamentalität dieser Basis.

Wir wollen nun die Länge einer MCB bestimmen. Die Länge eines Kreises in  $G_{N,N}$  beträgt mindestens 4. Betrachten wir alle Kreise der Länge 4, dann bilden sie eine Basis, da jede Kante höchstens von zwei Kreisen abgedeckt wird. Mit der gegebenen Reihenfolge können wir zeigen, dass sie eine schwach fundamental Basis sind. Um diese Eigenschaft der Kreisbasis zu zeigen, beginnt man in der Mitte und geht dann im Kreisen um diesen herum. Also gilt für die Länge der MCB

$$\ell(\text{MCB}) = 4\nu = 4(N - 1)^2 = \theta(n).$$

Für MSFCB kann man etwas asymptotisch größeres im Bereich von  $\theta(n \log n)$  feststellen. Es gilt also  $\ell(\text{MSFCB}) \gg \ell(\text{MCB})$ .  $\diamond$

Der folgende Satz bestätigt, dass wir eine Minimale Kreisbasis in polynomieller Zeit berechnen können.

**Satz 1.7.2** (Kavitha et al, 2004). *Sei  $(G, w)$ ,  $w \geq 0$  ein gewichteter ungerichteter Graph. Eine minimale Kreisbasis für  $(G, w)$  kann in  $\mathcal{O}(m^2n + mn^2 \log n)$  berechnet werden.*

Die Laufzeit erinnert schon an die des Dijkstras  $\mathcal{O}(m + n \log n)$ . Um alle kürzeste Wege (APSP) zu berechnen braucht man  $\mathcal{O}(mn + n^2 \log n)$ . Dies gilt auch allgemeiner für konservative Kantengewichte, d.h. negative Kantengewichte sind zugelassen, allerdings ist die Länge eines Kreises immer positiv.

*Beweis.* Wir werden hier nur den Beweis für  $\mathcal{O}(m^3 + m^2n + mn^2 \log n)$  führen.

Um dies zu zeigen, betrachten wir den folgenden Algorithmus 1.

---

**Algorithmus 1** Chickering et al, de Pina, Berger/Gritzmann...

---

```

1: Input:  $(G, w)$ 
2: Output: MCB  $\mathcal{B}$ 
3:  $\mathcal{B} := \emptyset$  //wir betrachten Vektoren aus  $\text{GF}(2)^\nu$  zur Codierung der Kreise. Die Kanten aus dem
   Baum werden gelöscht.
4: for  $i = 1$  to  $\nu$  do
5:   if  $i = 1$  then
6:      $S_1 :=$  beliebiger nicht-null Vektor in  $\{0, 1\}^\nu$ .
7:   else
8:      $S_i :=$  beliebiger nicht-null Vektor in dem Untervektorraum, der orthogonal zu  $\mathcal{B} =$ 
        $C_1, \dots, C_{i-1}$  steht. D.h.  $S_i$  löst als  $x$  das Gleichungssystem  $\langle C_k, x \rangle = 0$  für  $k = 1, \dots, i - 1$ 
9:   end if
10:  Berechne einen kürzesten Kreis  $C_i$  mit  $\langle C_i, S_i \rangle = 1$ 
11:  Setze  $\mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \{C_i\}$ 
12: end for

```

---

Zeigen wir als erstes, dass der Algorithmus auch wirklich eine Kreisbasis findet.

**Behauptung 1.7.3.** *Am Ende jeder Iteration  $i$  sind  $C_1, \dots, C_i$  linear unabhängig.*

*Beweis Behauptung.* Wir nehmen an,  $i$  ist die erste Iteration für die  $C_1, \dots, C_i$  nicht mehr linear unabhängig sind. Dann existieren ein  $\lambda_k \in \{0, 1\}$  mit  $C_i = \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k C_k$ . Wegen der Linearität des Skalarproduktes erhalten wir

$$\begin{aligned}
 1 &= \langle C_i, S_i \rangle \\
 &= \left\langle \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k C_k, S_i \right\rangle \\
 &= \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k \underbrace{\langle C_k, S_i \rangle}_{=0} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$\triangle$

Als nächstes wollen wir zeigen, dass  $\mathcal{B}$  auch eine MCB ist.

**Behauptung 1.7.4.** *Die Menge  $\mathcal{B}$  ist eine minimale Kreisbasis.*

*Beweis Behauptung.* Wir nehmen an, dass eine Iteration  $i$  existiert, so dass  $C_1, \dots, C_{i-1}$  eine Teilmenge einer MCB  $\mathcal{B}^*$  ist, aber  $C_1, \dots, C_{i-1}, C_i$  keine Teilmenge einer Minimalen Kreisbasis. Da  $\mathcal{B}^*$  eine Basis ist, existieren  $D_1, \dots, D_k \in \mathcal{B}^*$ , so dass

$$C_i = D_1 + \dots + D_k$$

gilt. Wegen  $\langle C_i, S_i \rangle = 1$  muss ein  $j \in \{1, \dots, k\}$  mit  $\langle D_j, S_i \rangle = 1$  existieren. Also gilt  $D_j \notin \{C_1, \dots, C_{i-1}\}$ . Aus der Definition des Algorithmus wissen wir, dass  $D_j$  zur Auswahl stand, als  $C_i$  gewählt wurde. Also erhalten wir  $\ell(C_i) \leq \ell(D_j)$ .

Betrachte Basis  $\mathcal{B}' := \mathcal{B}^* \cup \{C_i\} \setminus \{D_j\}$ . Dann gilt  $\ell(\mathcal{B}') \leq \ell(\mathcal{B}^*)$ . Wir wissen  $\{C_1, \dots, C_i\} \subset \mathcal{B}'$ . Dies ist aber ein Widerspruch zu unserer Annahme.  $\triangle$

**Bemerkung 1.7.5.** Wir können immer einen nicht orthogonalen Kreis  $C_i$  zu einem gegebenen  $S_i$  finden. Eine Möglichkeit wäre immer der Einheitsvektor in  $\text{GF}(2)^\nu$  mit eins an der Komponente, wo auch  $S_i$  eins ist.

**Behauptung 1.7.6.** *Wir haben einen Aufwand von  $\mathcal{O}(m^4)$  zur Berechnung der  $S_i$ .*

*Beweis Behauptung.* Ein  $S_i$  läßt sich durch das Lösen eines  $(i-1, \nu)$ -LGS berechnen. Es gilt  $i-1 < \nu$ . Abgeschätzt mit der Laufzeit des Gaussverfahrens erhalten wir  $\mathcal{O}(\nu^3)$ . Da in einem vollständigen Graphen  $\nu = \theta(m)$  gilt, liegt die Berechnung von  $S_i$  in  $\mathcal{O}(m^3)$ . Insgesamt ergibt sich dann der Aufwand von  $\mathcal{O}(m^4)$  zur Berechnung aller  $S_i$ .  $\triangle$

**Behauptung 1.7.7.** *Sei  $S_i$  für alle  $i$  gegeben. Die Berechnung von  $C_i$  geht in  $\mathcal{O}(APSP) = \mathcal{O}(mn + n^2 \log n)$ .*

*Beweis Behauptung.* Die Idee zur Konstruktion der  $C_i$  ist einen Level-Graph  $G'$  zu benutzen. Dies geschieht folgendermaßen: Man kopiert die Menge der Knoten von  $G$  und erhält damit für jeden Knoten  $v$  einen Knoten  $v^+$  und  $v^-$ . Sei  $(u, v) \in E \setminus S_i$ . Dann fügen wir in  $G'$  eine Kante  $(u^+, v^+)$  und  $(u^-, v^-)$  ein. Ist eine Kante  $(u, v) \in S_i$ , dann enthält  $G'$  die Kante  $(u^+, v^-)$  und  $(u^-, v^+)$  (Abb. 1.7.2).

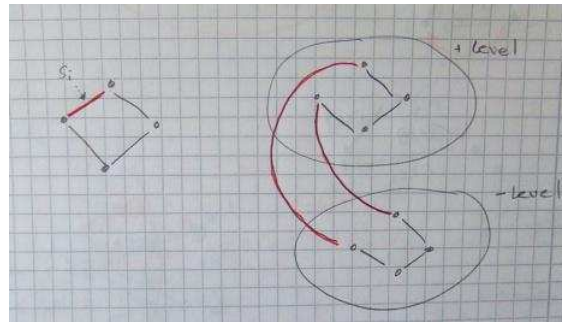


Abbildung 1.7.2: Im Levelgraphen von  $(G, S_i)$  läßt sich leicht ein kürzester Kreis mit  $\langle C_i, S_i \rangle = 1$  berechnen.

Wir können beobachten, dass  $\langle C_i, S_i \rangle = 1$  genau dann gilt, wenn  $C_i$  eine ungerade Zahl von Kanten aus  $S_i$  benutzt. Dies entspricht in unserem Levelgraphen einem Weg von  $v^+$  nach  $v^-$ . Ein solcher Weg stellt dann in  $G$  einen Kreis mit ungerade vielen Kanten aus  $S_i$  dar. Es muss nur noch



gezeigt werden, dass der so konstruierte Kreis  $C_i$  auch der kürzeste Kreis ist, für den  $\langle C, S_i \rangle = 1$  gilt (Übung).

Mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus mit der Laufzeit  $\mathcal{O}(m + n \log n)$  können wir die in jedem Schritt einen Kreis berechnen.  $\triangle$

Wir wissen, dass wir  $\nu \in \mathcal{O}(m)$  Iterationen haben. Damit kostet uns die Berechnung der Kreise  $\mathcal{O}(m^2 n + mn^2 \log n)$ .

Im folgenden betrachten wir eine schnellere Möglichkeit die  $S_i$  zu berechnen.

**Behauptung 1.7.8.** *Die Berechnung aller  $S_i$  geht in  $\mathcal{O}(m^3)$ .*

*Beweis Behauptung.* Anstatt jedes mal ein Gleichungssystem zu lösen, halten wir stets eine Basis  $S_1, \dots, S_\nu$  des orthogonalen Komplements der  $C_1, \dots, C_{i-1}$  vor. Dann kann  $S_i$  in der  $i$ -ten Iteration direkt übernommen werden. Betrachte den folgenden Algorithmus dazu (Algo. 2). Im ersten Schritt werden  $S_i = e_i$  mit  $i = 1, \dots, \nu$  definiert.

---

**Algorithmus 2** Update der  $S_i$

---

**Update:**

$$S'_j = \begin{cases} S_j + S_i & \text{falls } \langle C_i, S_j \rangle = 1 \\ S_j & \text{falls } \langle C_i, S_j \rangle = 0 \end{cases}$$

für  $j = i + 1, \dots, \nu$ .

---

Da  $S_i$  linear unabhängig von  $S_{i+1}, \dots, S_\nu$  ist, gilt dies auch nach dem Update Schritt. Damit bilden die  $S'_{i+1}, \dots, S'_\nu$  eine Basis.

Wir müssen jetzt noch zeigen, dass  $\langle C_k, S'_j \rangle = 0$  für alle  $k = 1, \dots, i$  und für alle  $j = i+1, \dots, \nu$  gilt. Der Beweis geht über vollständige Induktion, wobei wir hier nur den Induktionsschritt betrachten. Nach „Induktionsvoraussetzung“ gilt, dass  $\langle C_k, S'_j \rangle = 0$  für alle  $k = 1, \dots, i-1$  und für alle  $j = i+1, \dots, \nu$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $\langle C_i, S'_j \rangle = 0$  für alle  $j = i+1, \dots, \nu$  gilt.

1. Fall:  $\langle C_i, S_j \rangle = 1$ . Dann erhalten wir

$$\langle C_i, S'_j \rangle = \langle C_i, S_j + S_i \rangle = \langle C_i, S_j \rangle + \underbrace{\langle C_i, S_i \rangle}_{=1 \text{ nach Wahl } C_i} = 1 + 1 = 0.$$

2. Fall:  $\langle C_i, S_j \rangle = 0$ . Damit gilt

$$\langle C_i, S'_j \rangle = \langle C_i, S_j \rangle = 0.$$

Damit erhält der Update-Algorithmus stets die Basis des orthogonalen Komplementes der bislang gewählten Kreise.

Für den Aufwand des Algorithmus stellen wir folgende Betrachtungen an: Pro Update-Schritt sind höchsten  $\nu$  Vektoren von Bedeutung. Für jeden müssen wir das Skalarprodukt mit  $C_i$  und für manche noch die Addition mit einem anderen Vektor berechnen. Dies geht in  $\mathcal{O}(\nu)$ . Pro Iteration ergibt sich dann ein Aufwand von  $\mathcal{O}(\nu^2)$ . Da wir insgesamt  $\nu$  Iterationen haben, liegt der gesamte Aufwand zur Berechnung der  $S_i$  bei  $\mathcal{O}(\nu^3) \subset \mathcal{O}(m^3)$ .  $\triangle$

Damit erhalten wir für den ganzen Algorithmus einen Aufwand von  $\mathcal{O}(m^3 + m^2 n + mn^2 \log n)$ .  $\square$

**Bemerkung 1.7.9.** Unter Verwendung der schnellen Matrixmultiplikation kann das Updaten der  $S_i$  auf  $\mathcal{O}(m^{2.376})$  reduziert werden. Damit erhalten wir eine Laufzeit des Algorithmus von  $\mathcal{O}(m^{2.376} + m^2 n + mn^2 \log n)$ .

Wir haben jetzt festgestellt, dass wir minimale Kreisbasen in polynomieller Zeit berechnen können. Allerdings gibt es Graphen, deren minimale Kreisbasen nicht zur Charakterisierung periodischer Tensions geeignet sind. Dazu gehört insbesondere der verallgemeinerte Petersen Graph  $P_{11,4}$ , wobei 11 die Knotenanzahl der äußeren Kreises ist und 4 die Anzahl der äußeren Kanten, die über einen Weg überbrückt werden (Abb. 1.7.3).

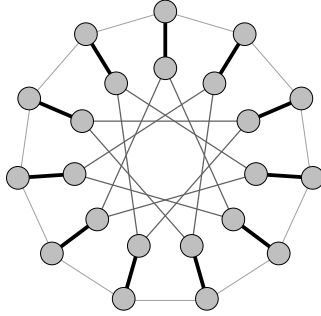


Abbildung 1.7.3:  $P_{11,4}$

Kreisbasen, die zur Bestimmung von Tensions geeignet sind, müssen ganzzahlig sein.

**Definition 1.7.10.** Eine Kreisbasis von  $C_1, \dots, C_\nu$  eines gerichteten Graphen  $D$  heißt *ganzzahlig*, wenn für jeden orientierten Kreis  $C$  in  $D$  ganzzahlige Koeffizienten  $\lambda_i \in \mathbb{Z}$  existieren, so dass

$$\gamma_C = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i \gamma_{C_i}$$

gilt.

**Satz 1.7.11.** Der Vektor  $x$  ist genau dann eine periodische Tension zur Taktzeit  $T$  auf einem gerichteten Graphen  $D$ , wenn eine ganzzahlige Kreisbasis  $\mathcal{B}$  existiert, so dass für alle Kreise  $C$  aus  $\mathcal{B}$  ein  $z_C$  existiert, das die Gleichung

$$\sum_{a \in C^+} x_a - \sum_{a \in C^-} x_a = T z_C \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_C^\top x = T z_C$$

erfüllt.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: Nach Satz 1.4.5 muss für jeden Kreis  $C$  die Bedingung

$$\sum_{a \in C^+} x_a - \sum_{a \in C^-} x_a = T z_C$$

für ein  $z_C \in \mathbb{Z}$  erfüllt sein. Dies gilt dann insbesondere auch für jede ganzzahlige Kreisbasis.

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $C$  ein beliebiger Kreis und  $C_1, \dots, C_\nu$  eine ganzzahlige Kreisbasis. Betrachte

$$\begin{aligned}\gamma_C^\top x &= \left( \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i \gamma_{C_i} \right)^\top x \\ &= \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i \gamma_{C_i}^\top x \\ &= \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i T z_i \\ &=: z_C T\end{aligned}$$

wobei  $\lambda_i, z_i \in \mathbb{Z}$ . Damit muss auch  $z_C$  aus  $\mathbb{Z}$  sein und es folgt die Behauptung.  $\square$

## 1.8 Charakterisierung ganzzahliger Kreisbasen

Wir hatten bisher festgestellt, dass es einfach ist eine minimale Kreisbasis zu berechnen. Diese muss allerdings nicht ganzzahlig sein. Im Folgenden interessieren wir uns für ein Kriterium, das uns in polynomieller Zeit sagt, ob eine Kreisbasis ganzzahlig ist oder nicht.

**Satz 1.8.1.** *Seien  $F_1$  und  $F_2$  Bäume eines zusammenhängenden gerichteten Graphen  $D = (V, A)$ ,  $A_i := A \setminus F_i$  die Mengen der Nichtbaumkanten und  $\Gamma$  die Kreismatrix einer beliebigen Kreisbasis  $\mathcal{B}$  von  $D$ . Weiter sei  $\Gamma_i := \Gamma|_{A_i}$ . Dann gilt*

$$|\det \Gamma_1| = |\det \Gamma_2|.$$

*Beweis.* Wenn  $\Phi$  die Kreismatrix einer strikt fundamentalen Kreisbasis ist, dann ist  $\Phi$  vollständig unimodular, d.h. jede Unterdeterminante von  $\Phi$  hat den Wert  $-1, 0$  oder  $1$ .

Sei nun  $\mathcal{B}'$  die Kreisbasis, die durch  $F_1$  induziert wird mit Kreismatrix  $\Phi'$ . Es gilt:  $\Phi' \Gamma_1 = \Gamma$ . Betrachten wir als nächstes die Zeilen von  $A_2$ . Dann gilt  $\Phi'|_{A_2} \cdot \Gamma_1 = \Gamma_2$ . Nach dem Determinantenmultiplikationssatz gilt somit

$$\det \Gamma_2 = \pm \det \Gamma_1.$$

$\square$

Der Satz legt die folgende Definition nahe:

**Definition 1.8.2.** Sei  $\mathcal{B}$  eine Kreisbasis von  $D$  mit der Kreismatrix  $\Gamma$  und dem Baum  $F$  in  $D$ . Dann gilt

$$\det \mathcal{B} := |\det \Gamma|_{A \setminus F}|.$$

**Bemerkung 1.8.3.** Der Wert von  $\det \mathcal{B}$  ist auch auf ungerichteten Graphen wohldefiniert. Eine beliebige Orientierung von Kanten/Kreisen hat keine Auswirkung auf  $\det \mathcal{B}$ .

**Satz 1.8.4.** *Eine Kreisbasis  $\mathcal{B}$  ist genau dann ganzzahlig, wenn  $\det \mathcal{B} = 1$  gilt.*

*Beweis.* Die Kreisbasis  $\mathcal{B}$  ist genau dann ganzzahlig, wenn für alle Kreise  $C$  ein  $y \in \mathbb{Z}^\nu$  existiert mit  $\Gamma y = \gamma_C$ . Dies entspricht der Existenz einer regulären Teilmatrix von  $\Gamma$  mit  $y = \Gamma^{-1} \gamma_C$ .

**Behauptung 1.8.5.** *Bei einer ganzzahligen Matrix  $M$  gilt  $|\det M| = 1$  genau dann wenn  $M^{-1}$  ganzzahlig ist. Diese Matrizen heißen auch unimodular.*

*Beweis Behauptung.* „ $\Rightarrow$ “: Mit der Cramerschen Regel können wir die  $i$ -te Spalte von  $M^{-1}$  durch  $m_{ij}^{-1} = \frac{\det(m_1, \dots, \overbrace{e_i}^{j\text{-te Stelle}}, \dots, m_n)}{\det M}$  berechnen. Da  $M$  ganzzahlig ist, gilt  $\det(m_1, \dots, e_i, \dots, m_n)$  ganzzahlig und somit auch  $m_{ij}^{-1}$ .

„ $\Leftarrow$ “: Da  $M$  und  $M^{-1}$  ganzzahlig sind, muss  $\det M$  und  $\det M^{-1}$  ganzzahlig sein. Nach dem Determinantenmultiplikationssatz erhalten wir

$$\det M \cdot \det M^{-1} = \det M \cdot M^{-1} = \det E = 1.$$

Daraus folgt  $|\det M|=1$ . △

Da nach Voraussetzung  $\det \mathcal{B} = 1$  gilt, muss  $\Gamma^{-1}$  ganzzahlig sein. Daraus folgt, dass  $\Gamma^{-1}\gamma_C = y \in \mathbb{Z}^\nu$  ist. Damit haben wir die Rückrichtung gezeigt.

Sei nun  $\mathcal{B}$  ganzzahlig. Dann gilt für alle  $e_i$  die Gleichung  $\Gamma y_i = e_i$  mit  $y_i$  ganzzahlig. Dann ist  $[y_1, \dots, y_\nu] = \Gamma^{-1}$  ganzzahlig. Also gilt  $\det \mathcal{B} = 1$ . □

Zum Schluss sollten wir noch zwei Dinge festhalten:

1. die Komplexität des Minimalen ganzzahligen Kreisbasis Problem ist offen
2. es existieren (ungerichtete) Graphen, deren eindeutige MCB nicht ganzzahlig ist