Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik WS 2006/07

# 2. Übungsblatt

Ganzzahlige Optimierung im Öffentlichen Verkehr

Ralf Borndörfer, Christian Liebchen, Marc Pfetsch

**1. Aufgabe**:

(a) Betrachte für den Fall eines einzigen OD-Paares, einer Fahrtmöglichkeit und einer Preisvariablen (d. h. $n = 1$) die Nachfragefunktion $d(x) = \beta\, e^{-\alpha x}$ mit $\alpha, \beta > 0$ und die Preisfunktion $p(x) = x$. Zeige, dass die Einnahmefunktion $r(x) = p(x) \cdot d(x) = x \cdot d(x)$ eine eindeutige lokale Maximalstelle hat und berechne sie.

(b) Betrachte nun den Fall mit zwei OD-Paaren. Gib ein Beispiel mit (mindestens) zwei lokalen Maximalstellen an.

**2. Aufgabe**: Die Elastizität einer positiven (stetig) differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ (mit $\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} \;:\; x > 0\}$) ist definiert als

$$\epsilon(x) = x\,\frac{f'(x)}{f(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Bestimme alle Funktionen mit konstanter Elastizität.

**3. Aufgabe**: Ziel dieser Aufgabe ist die Entwicklung eines linearen ganzzahligen Programms für ein vereinfachtes Preisplanungsproblem mit einem deterministischen diskreten Entscheidungsmodell (d. h. die Störterme $\nu^a_{st}$ sind 0) und diskretisierten Preisvariablen.

Es gibt zwei Alternativen $A = \{1, 2\}$ und nur eine Preisvariable $x$. Die ÖPNV-Alternative 1 entspricht einem Einzelticket mit $p^1_{st}(x) = x$. Die Nicht-ÖPNV Alternative 2 hat einen distanzabhängigen Fahrpreis $p^2_{st}(x) = t_{st} \cdot \alpha$, wobei $t_{st}$ die Distanz zwischen $s$ und $t$ ist und $\alpha > 0$. Die Fahrtalternativen sind $\mathcal{C} = A$. Die Nutzenfunktion für Alternative 1 ist $U^1_{st}(x) = P - x$, wobei $P \in \mathbb{N}$. Für Alternative 2 gilt $U^2_{st} = t_{st} \cdot \alpha$. Die Preisvariable $x$ wird diskretisiert durch $x \in \{0, 1, \dots, P\}$.

Stelle ein lineares ganzzahliges Modell für die Einnahmemaximierung auf.

*Tipp:* Die Zielfunktion muss linearisiert werden. Eine Möglichkeit ist Variablen $x_{stf}$ mit $(s, t) \in D$ und $f \in \{0, \dots, P\}$ einzuführen. Variable $x_{stf}$ soll genau dann 1 sein, wenn die Passagiere für OD-Paar $(s, t) \in D$ Alternative 1 bei Preis $f$ auswählen. Dabei muss man ein "Großes-M" benutzen um die Entscheidungen zu koppeln.