6. Übungsblatt

Ganzzahlige Optimierung im Öffentlichen Verkehr
Ralf Borndörfer, Christian Liebchen, Marc Pfetsch

Aufgabe 1: Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konkav und differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Zeige:

$$\partial f(x_0) = \{f'(x_0)\}.$$

Aufgabe 2: Betrachte das folgende lineare Programm:

$$\begin{array}{llrcrcr}
\text{(P)} & \min & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{(i)} & & x_1 & + & x_2 & = & -1 \\
\text{(ii)} & & x_1, & & x_2 & \leq & 1 \\
\text{(iii)} & & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Betrachte die Lagrange-Relaxierung (L) von (P) bzgl. der Gleichung (i). Bestimme die zu (L) gehörige Lagrange-Funktion und zeige, daß der Optimalwert von (L) ungleich dem Optimalwert des Ausgangsproblems (P) ist, obwohl (P) ein LP ist.

Aufgabe 3: Betrachte das Umlaufplanungsproblem in der Datei `arcs.dat`:

```
# dh  tail  head  type   cost
   0     0     1     2   1800
   1     0     2     2   1800
   2     0     3     0   1320
   3     0     4     2   1800
 ...
```

Datei `arcs.dat`.

Die Datei hat das folgende Format. Eine Zeile, die mit # beginnt, enthält Kommentar. Die anderen Zeilen definieren jeweils einen Bogen mit Hilfe von 5 Zahlen. `tail` und `head` sind die Indizes des Start- und Endknotens, `type` ist der Index eines Depots, für das dieser Bogen gültig ist, und `cost` sind die Kosten des Bogens. Bögen mit gleichen Start- und Endknoten, aber unterschiedlichem Depot beschreiben die Durchführung derselben Leerfahrt (engl. deadhead) mit Fahrzeugen unterschiedlicher Depots; `dh` gibt den Index der Leerfahrt an. Knoten-, Kanten- und Depotindizes sind ganze Zahlen, die mit 0 beginnen; die Kosten sind ganze, nichtnegative Zahlen. Knoten 0 steht für den Beginn und das Ende der Umläufe, die anderen Knoten stellen Fahrgastfahrten dar. Das Problem in `arcs.dat` hat 11 Depots, 7.130 Fahrgastfahrten, 7.131 Knoten, 75.137 Leerfahrten und 126.992 Bögen; es handelt sich um ein “echtes” Umlaufplanungsproblem.

Die Dateien `tripduals.dat` und `flowduals.dat` enthalten Multiplikatoren für die Fluß- bzw. die Flußerhaltungsbedingungen in einer Mehrgüterfluß-IP-Formulierung dieses Problems:

```
# node dual
  1             1740.000000
  2             2280.000000
  3             1200.000000
  4             2040.000000
  ...
```

Datei `tripduals.dat`.

```
# node depot  dual
     0     0      420.000000
     0     1        0.000000
     0     2      240.000000
     0     3     3330.000000
 ...
```

Datei `flowduals.dat`.

Die Nicht-Kommentarzeilen der Datei `tripduals.dat` enthalten jeweils den (von 0 verschiedenen) Index eines Knotens (= Index einer Fahrgastfahrt) und einen zugehörigen Multiplikator, die der Datei `flowduals.dat` jeweils den Index eines Kontens, eines Depots und einen zugehörigen Multiplikator. Die Multiplikatoren können beliebige Fließkommazahlen sein.

(a) Formuliere und löse das Umlaufplanungsproblem mit Zimpl und `Scip` oder `Cplex`.

(b) Was ist der Optimalwert des IPs und der LP-Relaxierung?

(c) Wieviele Fahrzeuge werden jeweils verwendet?

(d) Ist das die minimale Flottengröße (= Anzahl an Fahrzeugen)?

(e) Konstruiere eine m-Depot-Relaxierung des Problem, indem Du die Flußbedingungen ignorierst. Zeige, daß die m-Depot-Relaxierung ein Minimalkostenflußproblem ist. Was ist der Optimalwert?

(f) Verbessere die m-Depot-Relaxierung, indem Du die Flußbedingungen nicht ignorierst, sondern Lagrange-relaxierst. Verwende dazu die Multiplikatoren aus der Datei `tripduals.dat`. Zeige, daß auch diese Lagrange-Relaxierung ein Minimalkostenflußproblem ist. Was ist der Optimalwert?

(g) Konstruiere eine 1-Depot-Relaxierung des Problems, indem Du so tust, als wenn alle Bögen für Depot 1 zulässig wären. Zeige, daß die 1-Depotrelaxierung ein Minimalkostenflußproblem ist. Was ist der Optimalwert?

(h) Verbessere de 1-Depot-Relaxierung, indem Du die Flußerhaltungsbedingungen für die einzelnen Depots nicht ignorierst, sondern Lagrange-relaxierst. Verwende dazu die Multiplikatoren aus der Datei `flowduals.dat`. Zeige, daß auch diese Lagrange-Relaxierung ein Minimalkostenflußproblem ist. Was ist der Optimalwert?

(i) Welche Relaxierung ist besser?

Aufgabe 4: Ein Verkehrsunternehmen bedient die in der Datei `lines.dat` aufgeführten Linien mit den dort angegebenen Längen und Transportbedarfen pro Stunde. Ausserdem müssen immer mindestens 5 Busse pro Stunde kommen. Es stehen 2 Typen von Bussen zur Verfügung: kleine Busse mit 80 Plätzen, und grosse Busse mit 150 Plätzen. Diese fahren linienrein, d.h. ein Fahrzeug fährt eine Linie immer hin und her. Die durchschnittliche Fahrgeschwindigkeit ist 18 km/h, und man braucht 10 Minuten für eine Wende. Wieviele Fahrzeuge braucht man, um dieses System zu betreiben?

(a) Entwickle ein ganzzahliges Programm für dieses Problem.

(b) Löse dieses Modell mit Zimpl und Scip. Was ist die minimale Anzahl an Bussen?

(c) Es stehen nur 145 grosse Busse zur Verfügung. Wieviele kleine Busse werden mindestens benötigt?

(d) Es stehen nur 145 grosse und 150 kleine Busse zur Verfügung. Was nun? Wendezeiten reduzieren? Schneller fahren? Einige Passagiere stehen lassen? Verwende das Modell, um eine Strategie zu entwickeln.