Freie Universität Berlin
FB Mathematik und Informatik

Prof. Dr. Ralf Borndörfer
B. Sc. Stephan Schwartz

Diskrete Mathematik I (SS 2013)

Übungsblatt 5

Abgabe: Mo, 13. Mai 2013, 12:00 **im Fach von S. Schwartz (Arnimallee 3)**

Aufgabe 1. **10 Punkte**

Zeigen Sie:

a) Für alle ganzen Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt: $\langle ab \rangle \leq \langle a \rangle + \langle b \rangle$.

b) Für alle ganzzahligen Matrizen $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ gilt: $\langle \mathsf{det}\, A \rangle \leq \langle A \rangle - n^2 + 1$.

c) Für alle ganzen Zahlen $k \in \mathbb{Z}$ gilt: $k \leq 2^{\langle k \rangle}$.

Aufgabe 2. **10 Punkte**

Zeigen Sie, dass die folgenden Probleme NP-vollständig sind:

a) Clique: Gibt es in einem Graphen eine Clique (Menge von paarweise benachbarten Knoten) mit k oder mehr Knoten?

b) Längster Weg: Gibt es in einem Graphen zwischen zwei gegebenen Knoten einen Weg (ohne Knotenwiederholungen) mit mindestens k Kanten?

c) Set Partitioning: Gibt es in einer Familie $\mathcal{M} \subseteq 2^M$ von Teilmengen einer endlichen Menge M eine Partition von M, d.h. eine Teilmenge $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$ so dass $M = \dot\bigcup_{M \in \mathcal{P}} M$?

Aufgabe 3. **10 Punkte**

Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Das Unabhängigkeitssystem der stabilen Mengen eines Graphen ist ein Matroid.

b) Das Unabhängigkeitssystem der Teilmengen (der Kantenmengen) von Hamiltonkreisen eines Graphen ist ein Matroid.

c) Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $s, t \in V$ zwei verschiedene Knoten. Das System $\mathcal{I} := \{F \subseteq E : \nexists\ st\text{-Weg in } (V, F)\}$ ist ein Unabhängigkeitssystem.

d) Das Problem, einen minimalen aufspannenden Baum zu finden, lässt sich als ein Maximierungsproblem über einem Matroid formulieren.

Aufgabe 4. **10 Punkte**

Sei $\mathcal{I}$ ein Unabhängigkeitssystem auf einer Menge M. Beweisen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

a) $\forall X, Y \in \mathcal{I} : |Y| = |X| + 1 \Longrightarrow \exists y \in Y \setminus X : X \cup \{y\} \in \mathcal{I}$

b) $\forall X, Y \in \mathcal{I} : |Y| > |X| \Longrightarrow \exists Z \subseteq Y \setminus X, |Z| = |Y| - |X| : X \cup Z \in \mathcal{I}$

c) $\forall Z \in \mathcal{I} : X, Y$ Basis von $Z \;\Longrightarrow |X| = |Y|$.