

## Diskrete Mathematik I (SS 2013)

### Übungsblatt 10

Abgabe: Mo, 17. Juni 2013, 12:00 im Fach von S. Schwartz (Arnimallee 3)

#### Aufgabe 1.

5 Punkte

$n$  Paare gehen zu einem Ball. Auf wie viele Weise können  $n$  Tanzpaare gebildet werden, so dass niemand mit seinem eigenen Partner tanzt?

#### Aufgabe 2.

10 Punkte

Auf wie viele Weisen kann man 4 Amerikaner, 3 Russen und 5 Chinesen in einer Reihe aufstellen, so dass nie alle Angehörigen einer Nationalität hintereinander stehen?

#### Aufgabe 3.

10 Punkte

Zeigen Sie für nichtnegative ganze Zahlen  $k, m, n$  mit  $k \leq m$  die Summenformel

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n+m-i}{k-i} = \binom{m}{k}.$$

Hinweis: Betrachten Sie für eine  $n$ -Menge  $N$  und eine  $m$ -Menge  $M$  die Frage, wie viele  $k$ -Teilmengen von  $X \cup Y$  nur aus Elementen von  $Y$  bestehen.

#### Aufgabe 4.

10 Punkte

Sei die Derangementzahl  $D_n$  die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen von  $n$  Elementen,  $n \in \mathbb{N}$ , und  $D_0 := 1$ . Zeigen Sie die Rekursionsformel

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}), \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Hinweis: Betrachten Sie ein Derangement  $\pi$  mit  $\pi(1) = i \in \{2, \dots, n\}$  und unterscheiden Sie die Fälle  $\pi(i) = 1$  und  $\pi(i) \neq 1$ .

#### Aufgabe 5.

5 Punkte

$n$  Herren, alle Hutträger, gehen in die Oper und geben ihren Hut an der Garderobe ab. Die Gardrobierin hat keinen guten Tag und gibt den Herren am Ende der Vorstellung die Hüte zufällig zurück. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit  $p_n$ , dass kein einziger der  $n$  Herren seinen eigenen Hut zurückbekommt? Was ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ ?