

## Diskrete Mathematik I (SS 2013)

### Übungsblatt 11

Abgabe: Mo, 24. Juni 2013, 12:00 im Fach von S. Schwartz (Arnimallee 3)

#### Aufgabe 1.

10 Punkte

Der Fächer  $F_n$  ist ein Graph, der aus einem Weg  $v_1, \dots, v_{n-1}$  und einem weiteren Knoten  $v$  gebildet wird, indem jeder Knoten des Weges zu  $v$  adjazent ist.  $a_n$  sei die Anzahl der aufspannenden Bäume des  $F_n$ ,  $n \geq 2$ .

- Finden Sie eine Rekursion für  $a_n$ .
- Bestimmen Sie  $a_2$  bis  $a_5$  und stellen Sie eine Vermutung für die geschlossene Form auf.
- Beweisen Sie Ihre Vermutung mit Induktion.

#### Aufgabe 2.

10 Punkte

Betrachten Sie in dem unendlichen Graphen  $G = (\mathbb{Z}^2, \{((i, j), (i+1, j)), ((i, j), (i, j+1)) : i, j \in \mathbb{Z}\})$  die Anzahl  $a_n$  aller Wege der Länge  $n$ , die im Ursprung starten, sich in jedem Schritt entweder nach links, rechts oder oben wenden und nicht selber schneiden (d.h. die Kantenfolgen nach links-nach rechts und umgekehrt sind nicht erlaubt),  $a_n = 0$  für  $n < 0$ .

- Zeigen Sie, dass  $a_n$  der folgenden Rekursion genügt:

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + [n = 1] + [n = 0], \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

- Lösen Sie die Rekursion.

#### Aufgabe 3.

10 Punkte

Zeigen Sie:

- $$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha + k - 1}{k} z^k = (1 - z)^{-\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- $$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n + k}{k} z^k = \frac{1}{(1 - z)^{-(n+1)}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

#### Aufgabe 4.

10 Punkte

Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass in einer VL von 100 Studenten eine gerade Anzahl von Berlinern, eine durch 6 teilbare Anzahl von Bayern und als Rest entweder 0, 2 oder 4 Ostfriesen sitzen?