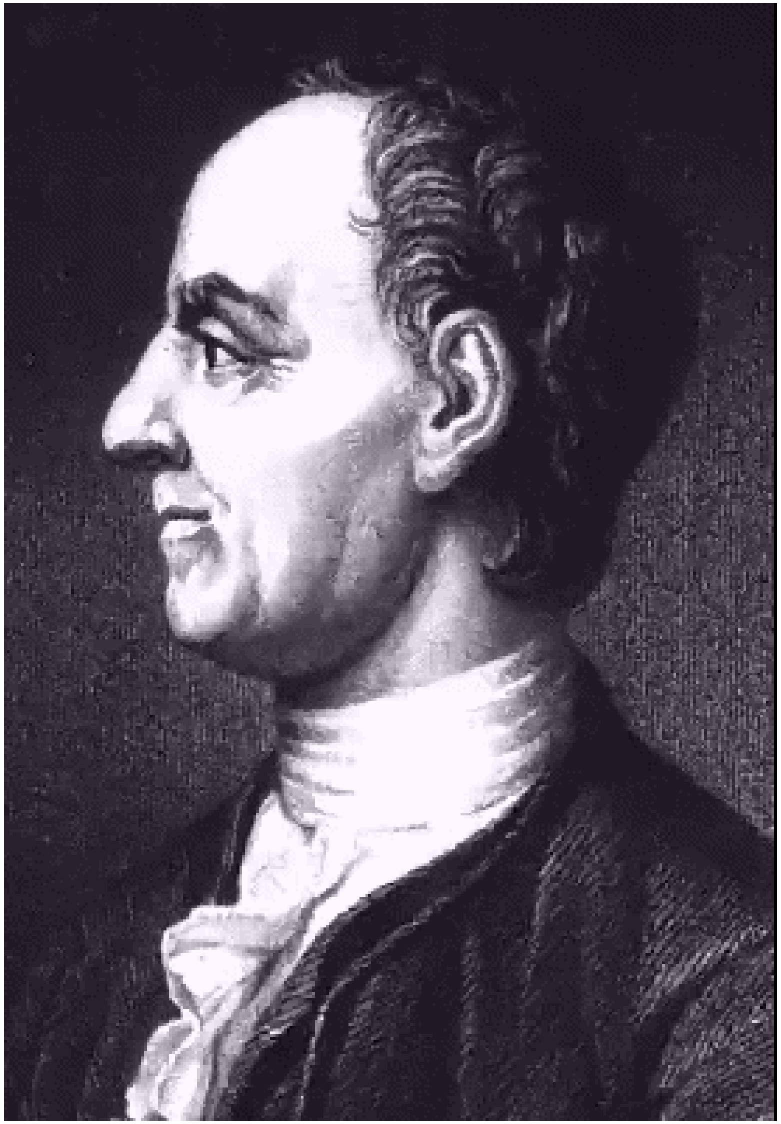
Diskrete Mathematik

Ralf Borndörfer, Stephan Schwartz

Freie Universität Berlin

08. April 2013

Leonhard Euler (1707-1783)



e

π

i

$\sin$

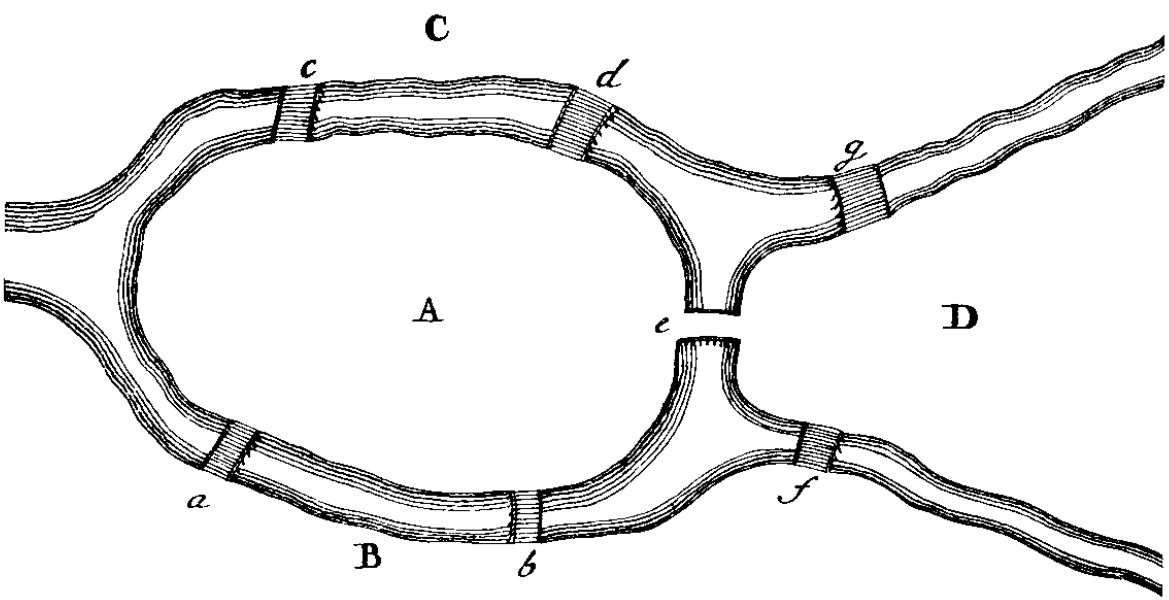
$\cos$

Σ

$f(x)$

Das Königsberger Brückenproblem (1736)

Freie Universität Berlin



a Grüne Brücke

b Köttelbrücke

c Krämerbrücke

d Schmiedebrücke

e Honigbrücke

f Hohe Brücke

g Holzbrücke

„Das Problem, das ziemlich bekannt sein soll, war folgendes. Zu Königsberg in Preußen ist eine Insel A, genannt „der Kneiphof", und der Fluß, der sie umfließt, teilt sich in zwei Arme, wie dies aus Fig. 1 ersichtlich ist. Über die Arme dieses Flußes führen sieben Brücken a, b, c, d, e, f und g. Nun wurde gefragt, ob jemand seinen Spaziergang so einrichten könne, daß er jede dieser Brücken einmal und nicht mehr als einmal überschreite. Es wurde mir gesagt, daß einige diese Möglichkeit verneinen, andere daran zweifeln, daß aber niemand sie erhärte. Hieraus bildete ich mir folgendes höchst allgemeine Problem: Wie auch die Gestalt des Flußes und seine Verteilung in Arme, sowie die Anzahl der Brücken ist, zu finden, ob es möglich sei, jede Brücke genau einmal zu überschreiten oder nicht."

Kombinatorische Explosion

Anzahl der Spaziergänge (im schlimmsten Fall)

Hier:

Allgemein:

Enumeration

Anzahl der Spaziergänge (im schlimmsten Fall)

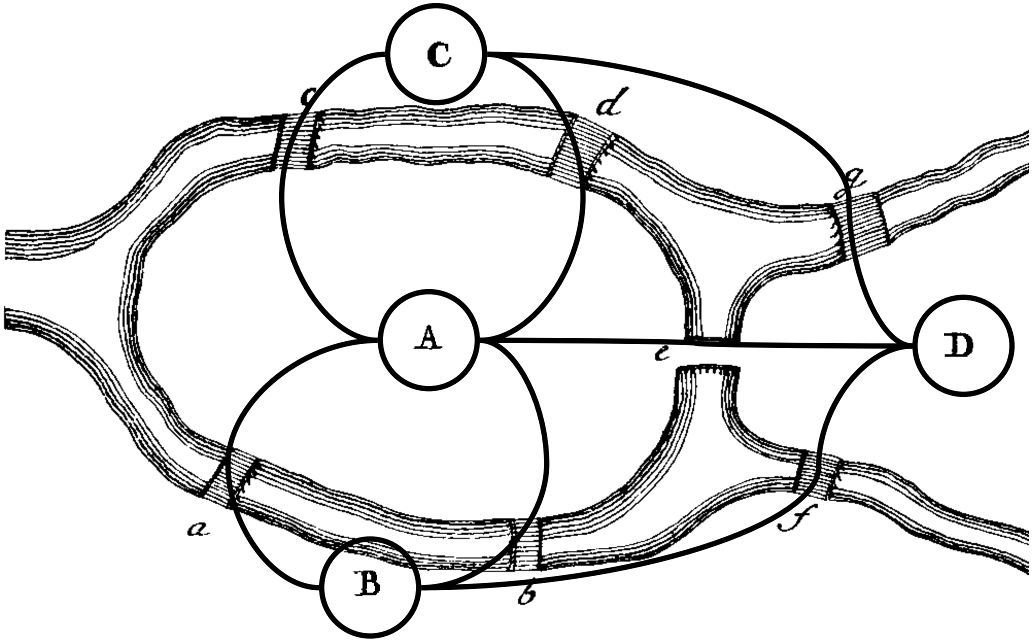
Hier: $7!/2 = 7*6*5*4*3 = 2.520$

Allgemein: $n!/2 \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}/2$ (Stirling-Formel)

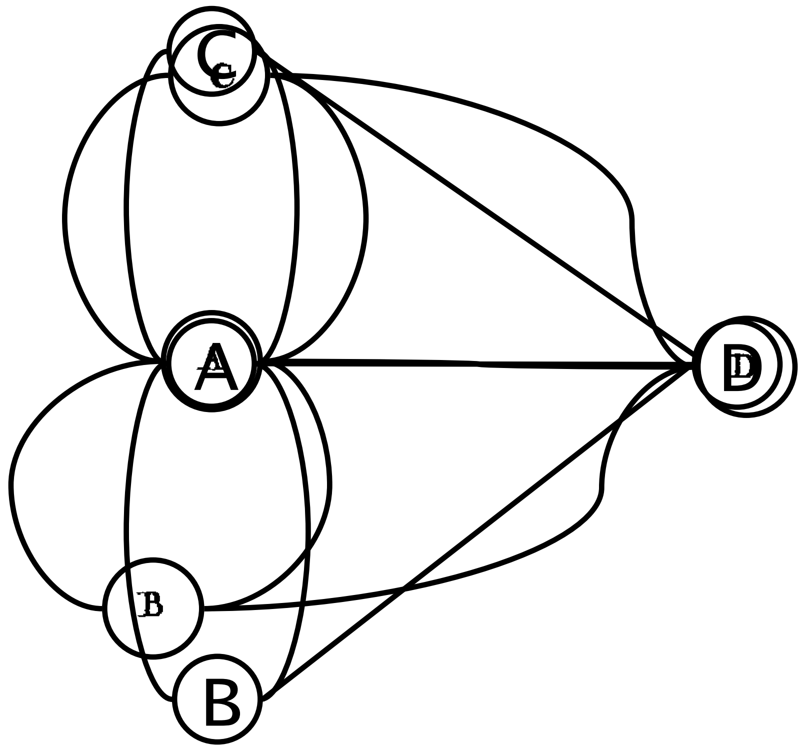
Kombinatorische Explosion

„Was das Königsberger Problem von den sieben Brücken betrifft, so könnte man es lösen durch eine genaue Aufzählung aller Gänge, die möglich sind; denn dann wüßte man, ob einer derselben der Bedingung genügt oder keiner. Diese Lösungsart ist aber wegen der großen Zahl von Kombinationen zu mühsam und schwierig, und zudem könnte sie in andern Fragen, wo noch viel mehr Brücken vorhanden sind, gar nicht mehr angewendet werden. Würde die Untersuchung in der eben erwähnten Weise geführt, so würde Vieles gefunden, wonach gar nicht gefragt war; dies ist zweifellos der Grund, warum dieser Weg so beschwerlich wäre. Darum habe ich diese Methode fallengelassen und eine andere gesucht, die nur so weit reicht, daß sie erweist, ob ein solcher Spaziergang gefunden werden kann oder nicht; denn ich vermutete, daß eine solche Methode viel einfacher sein würde.“

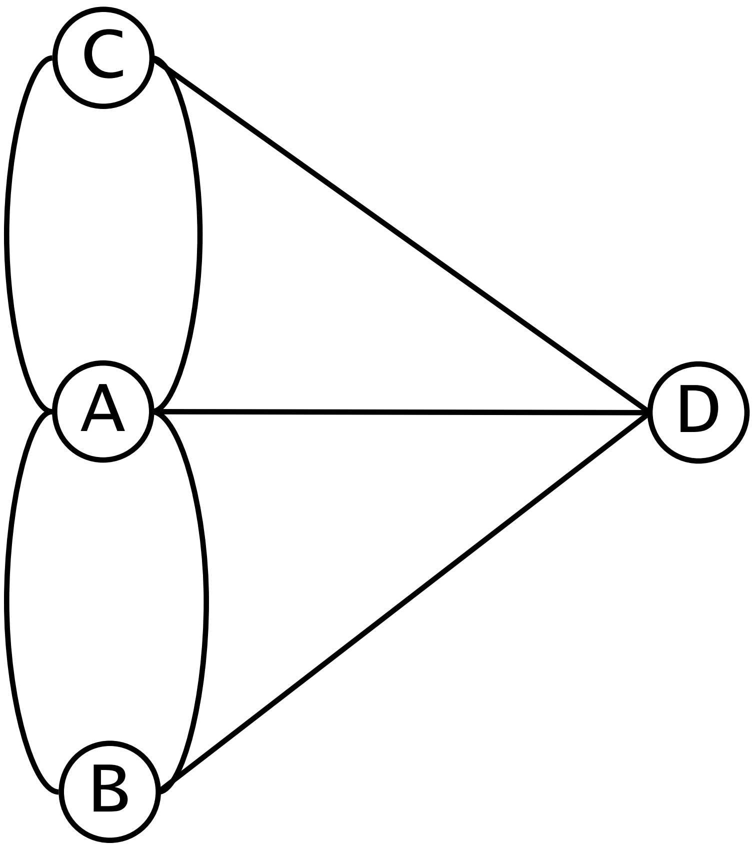
Geometria situs (Graphentheorie)



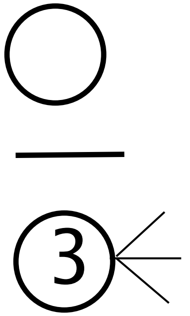
Geometria situs (Graphentheorie)



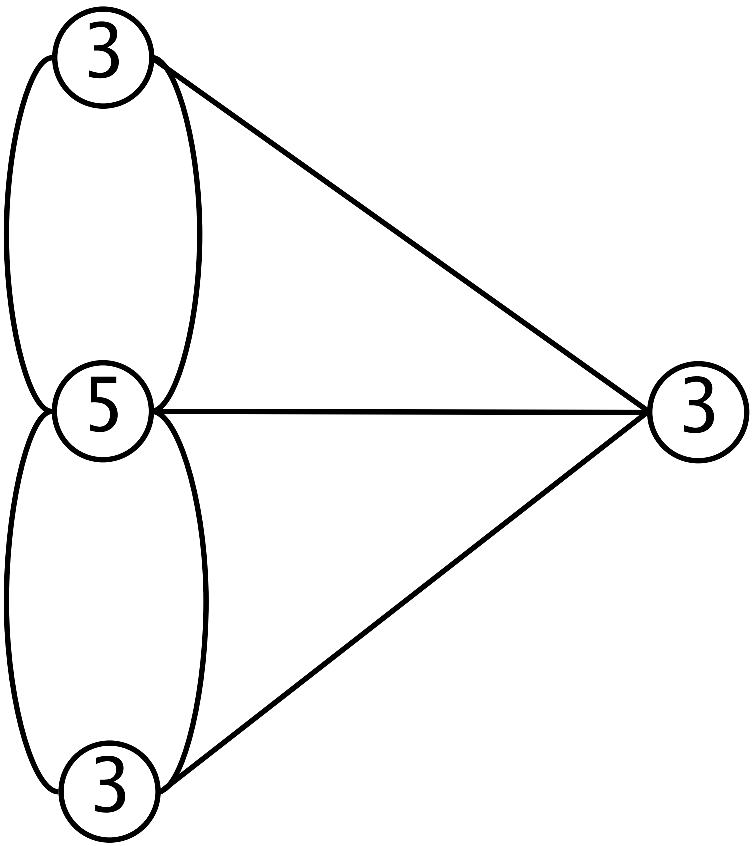
Geometria situs (Graphentheorie)



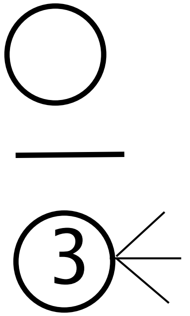
- Knoten
- Kanten
- Grad



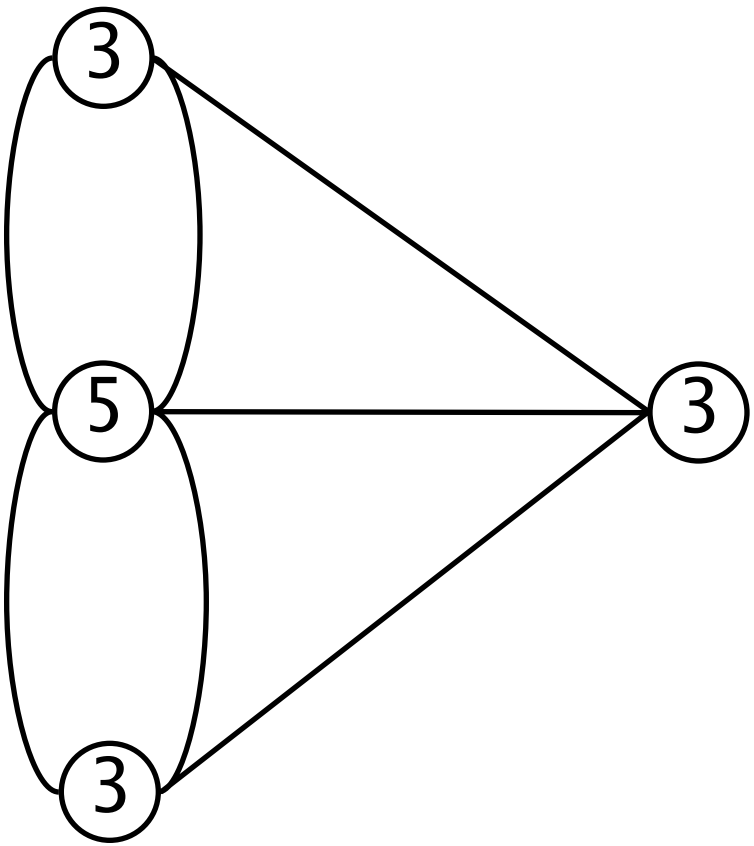
Geometria situs (Graphentheorie)



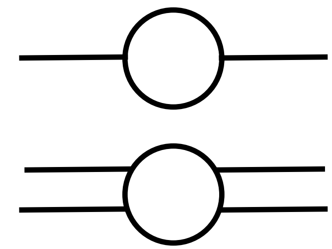
- Knoten
- Kanten
- Grad



Geometria situs (Graphentheorie)

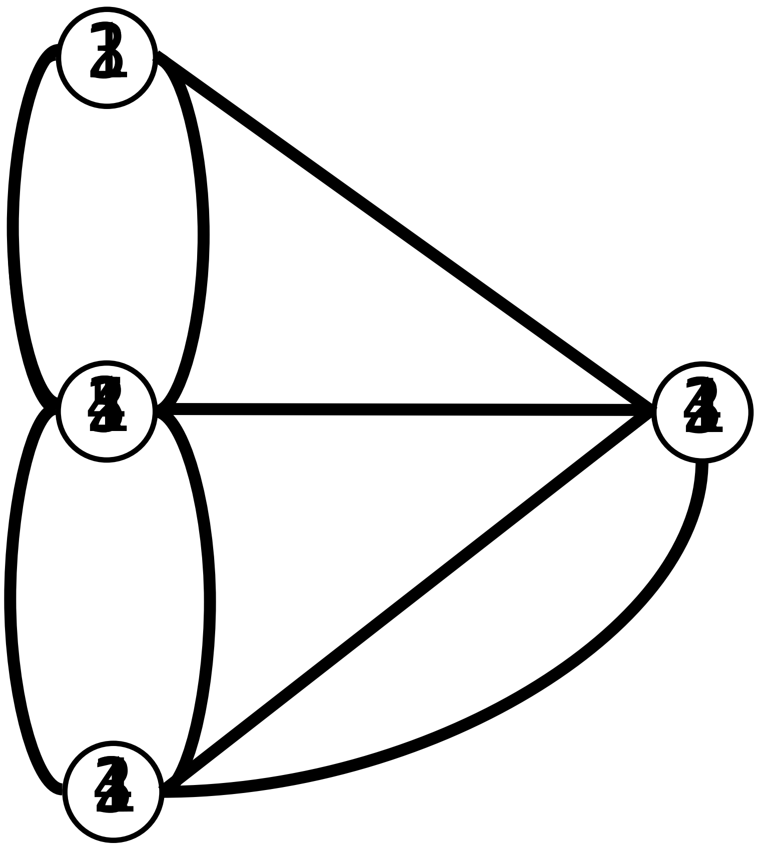


- **Satz:** Eine Eulertour kann es nur geben, wenn 0 oder 2 Knoten ungeraden Grad haben.
- **Beweis:**



innere Knoten gerade

Geometria situs (Graphentheorie)

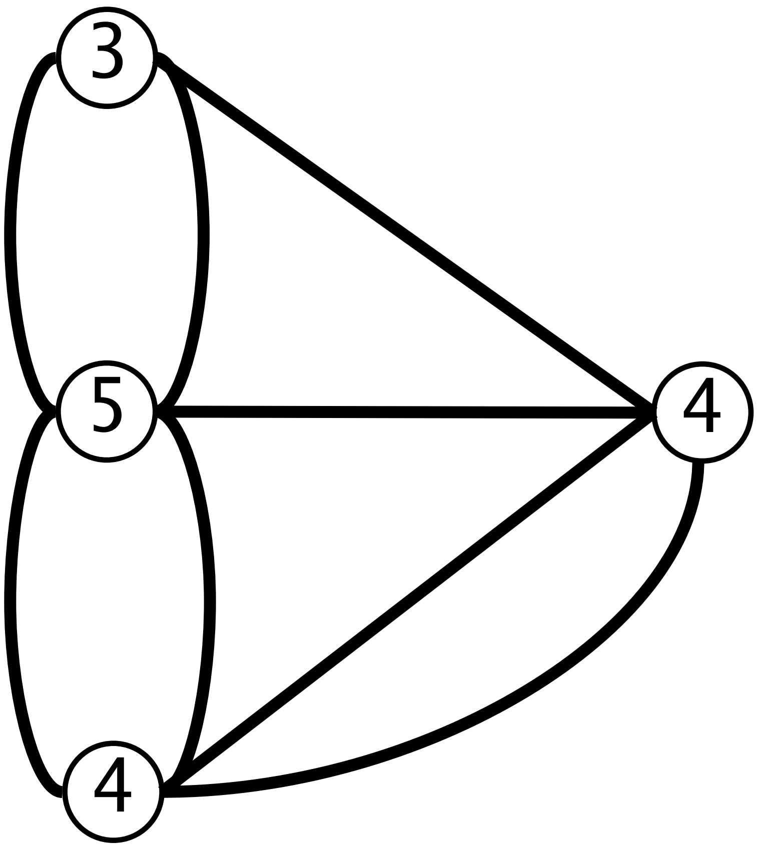


- **Satz:** Eine Eulertour gibt es genau dann, wenn 0 oder 2 Knoten ungeraden Grad haben.
- **Beweis**

  =>: innere Knoten gerade

  <=: Weg + Kreise

Geometria situs (Graphentheorie)

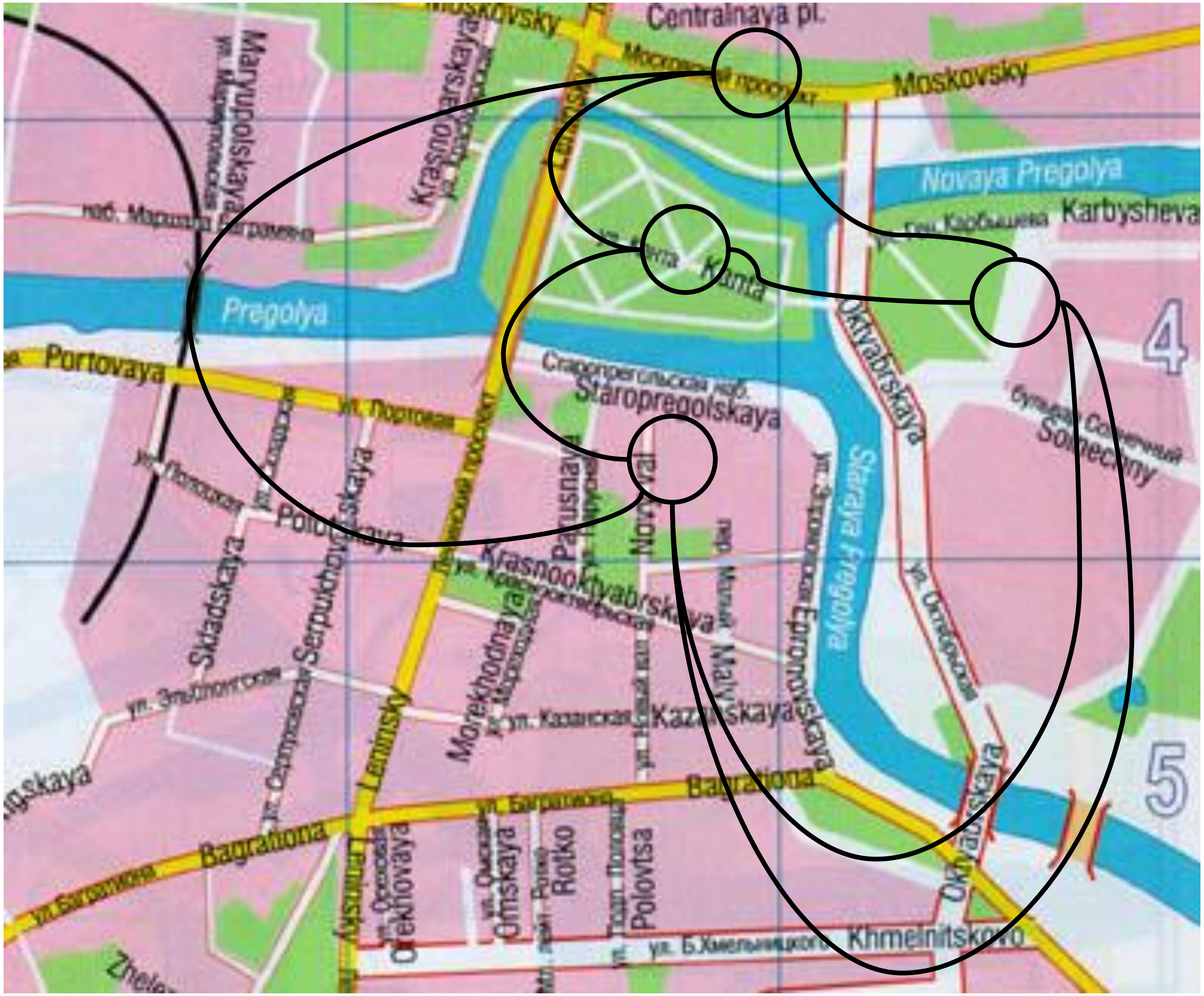


- **Satz:** Eine Eulertour gibt es genau dann, wenn 0 oder 2 Knoten ungeraden Grad haben.
- **Beweis**

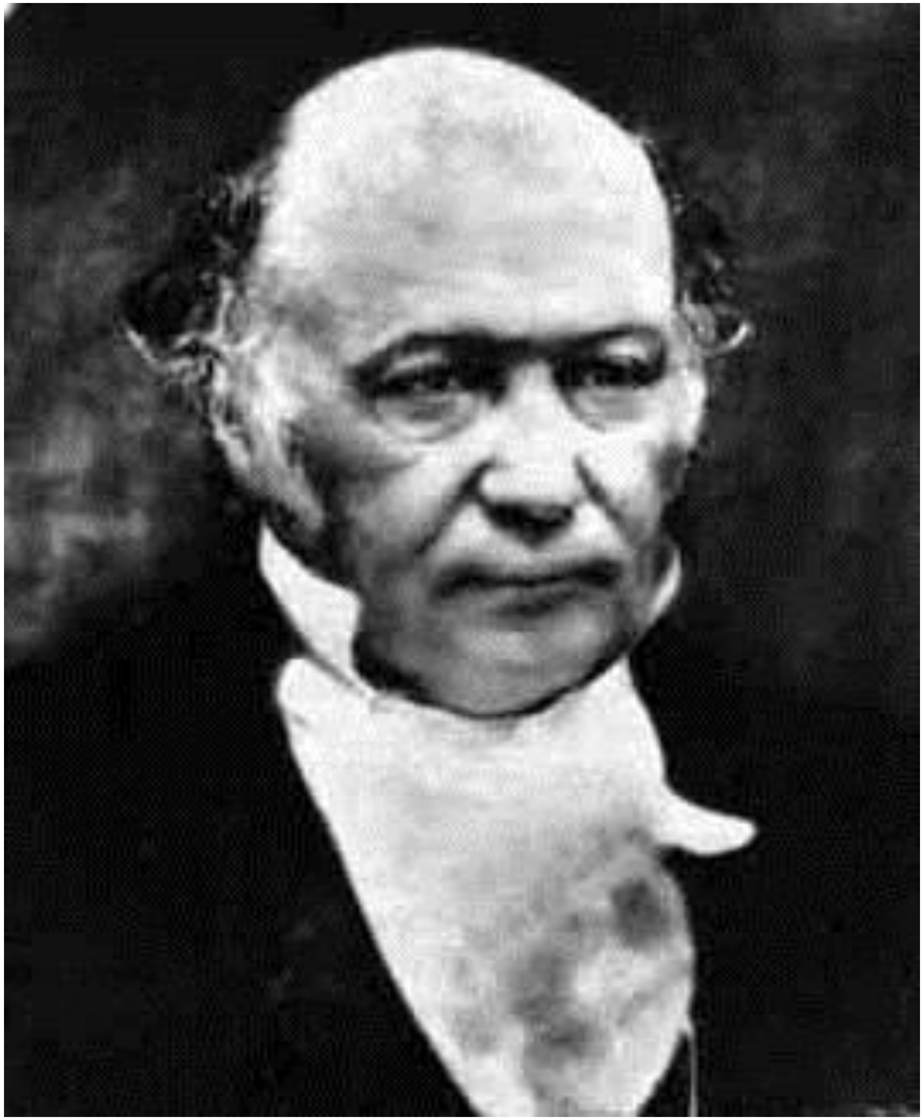
  =>: innere Knoten gerade

  <=: Weg + Kreise

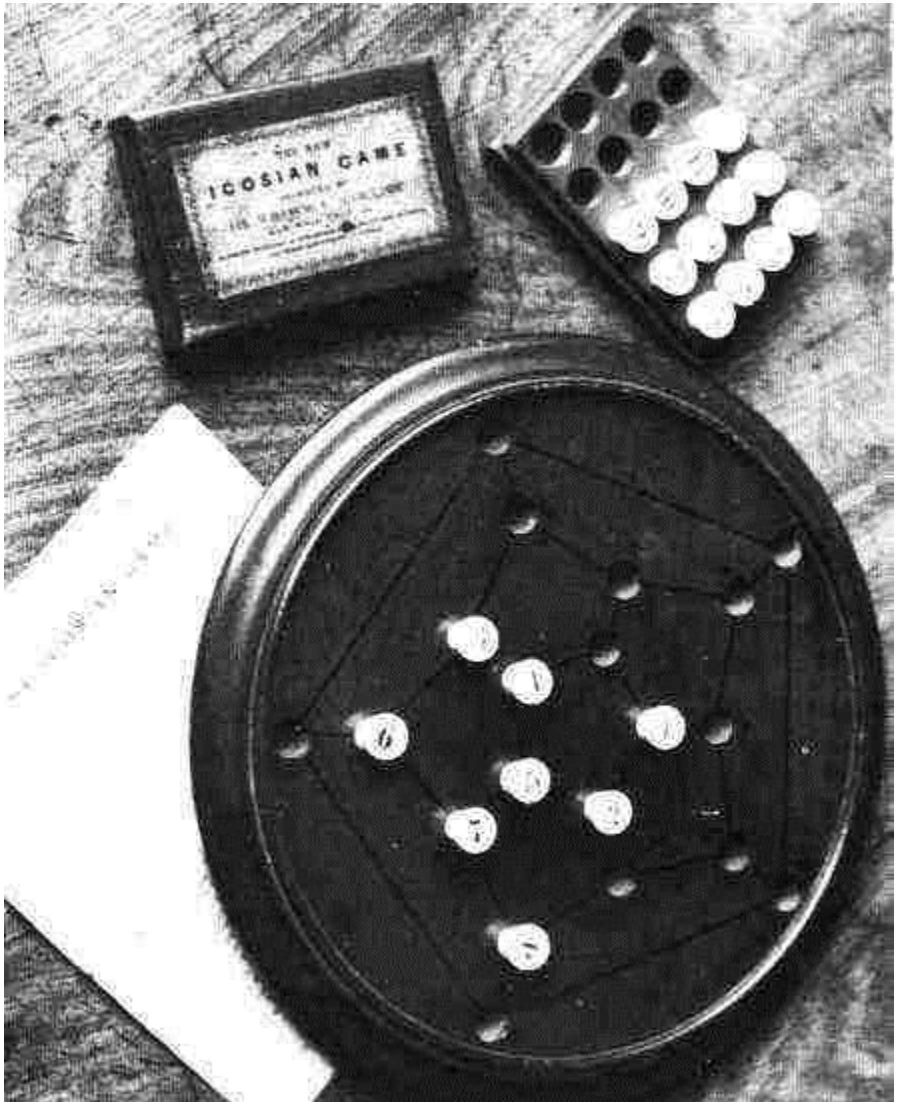
Kalininingrad

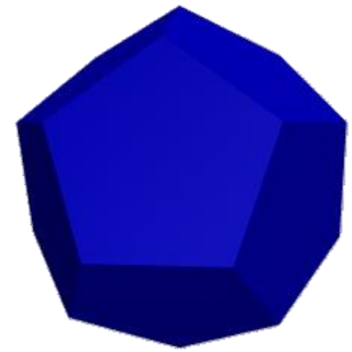


Sir William Rowan Hamilton (1805-1865)



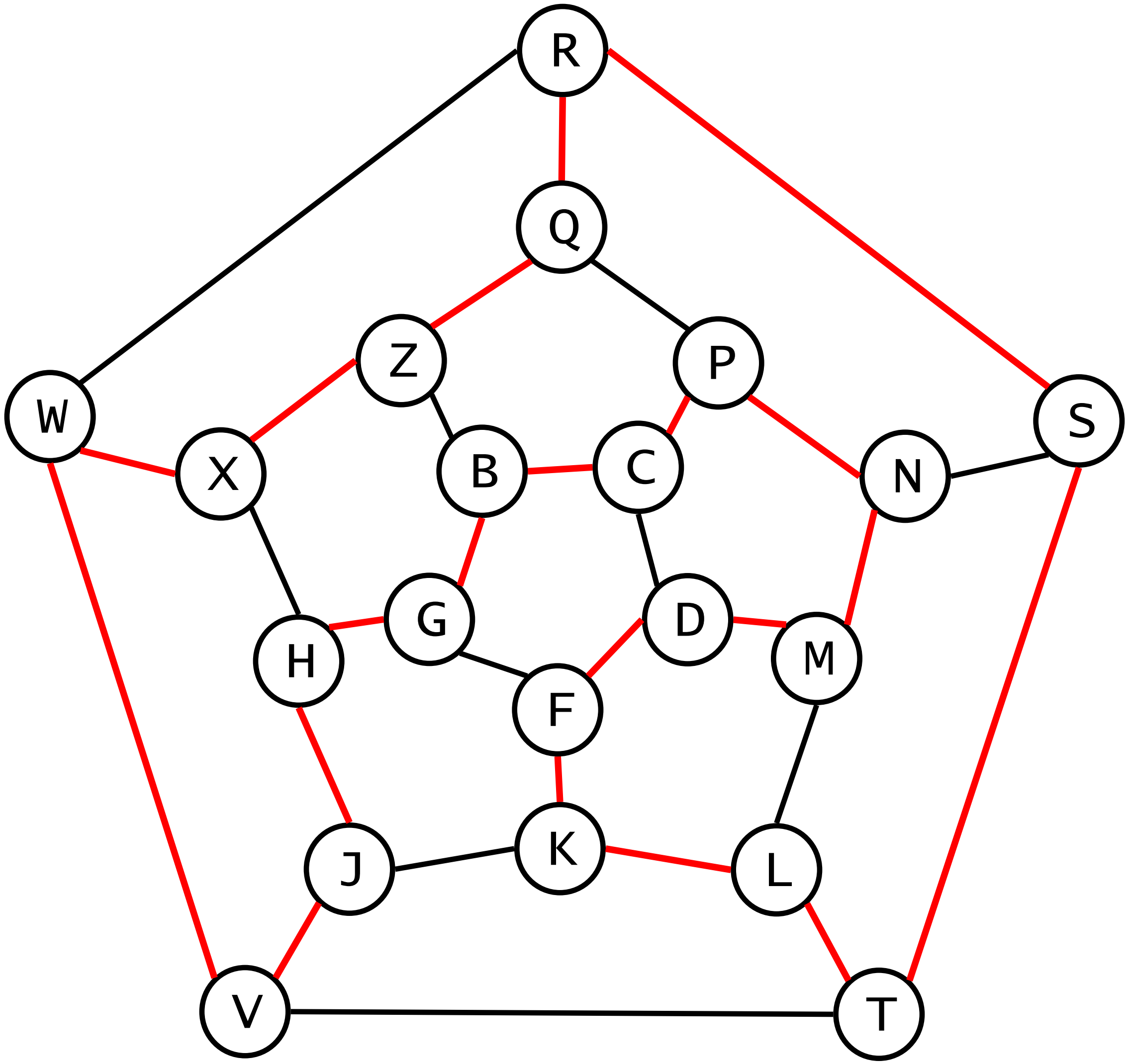
Das Ikosaederspiel (1856)





Ikosaeder (20) Dodekaeder (12)

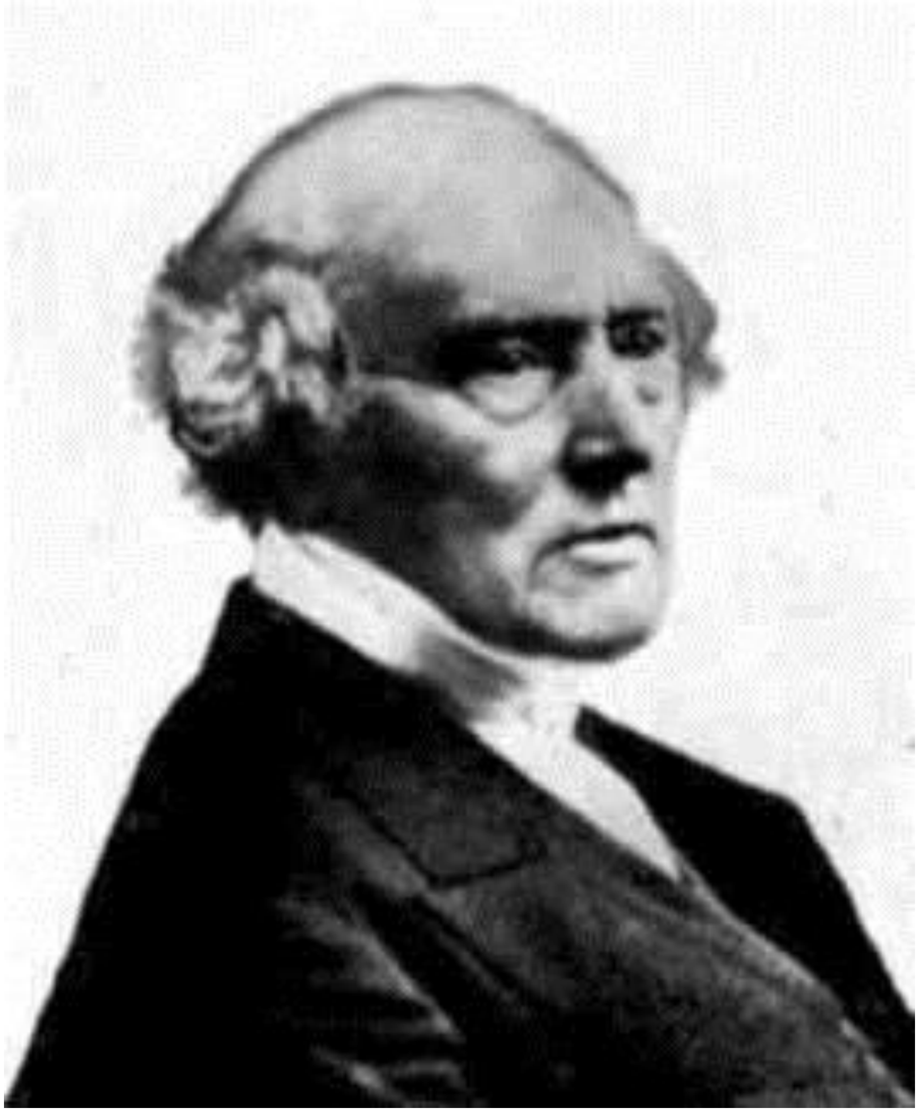
Gibt es eine geschlossene Rundreise (Hamiltonkreis)?



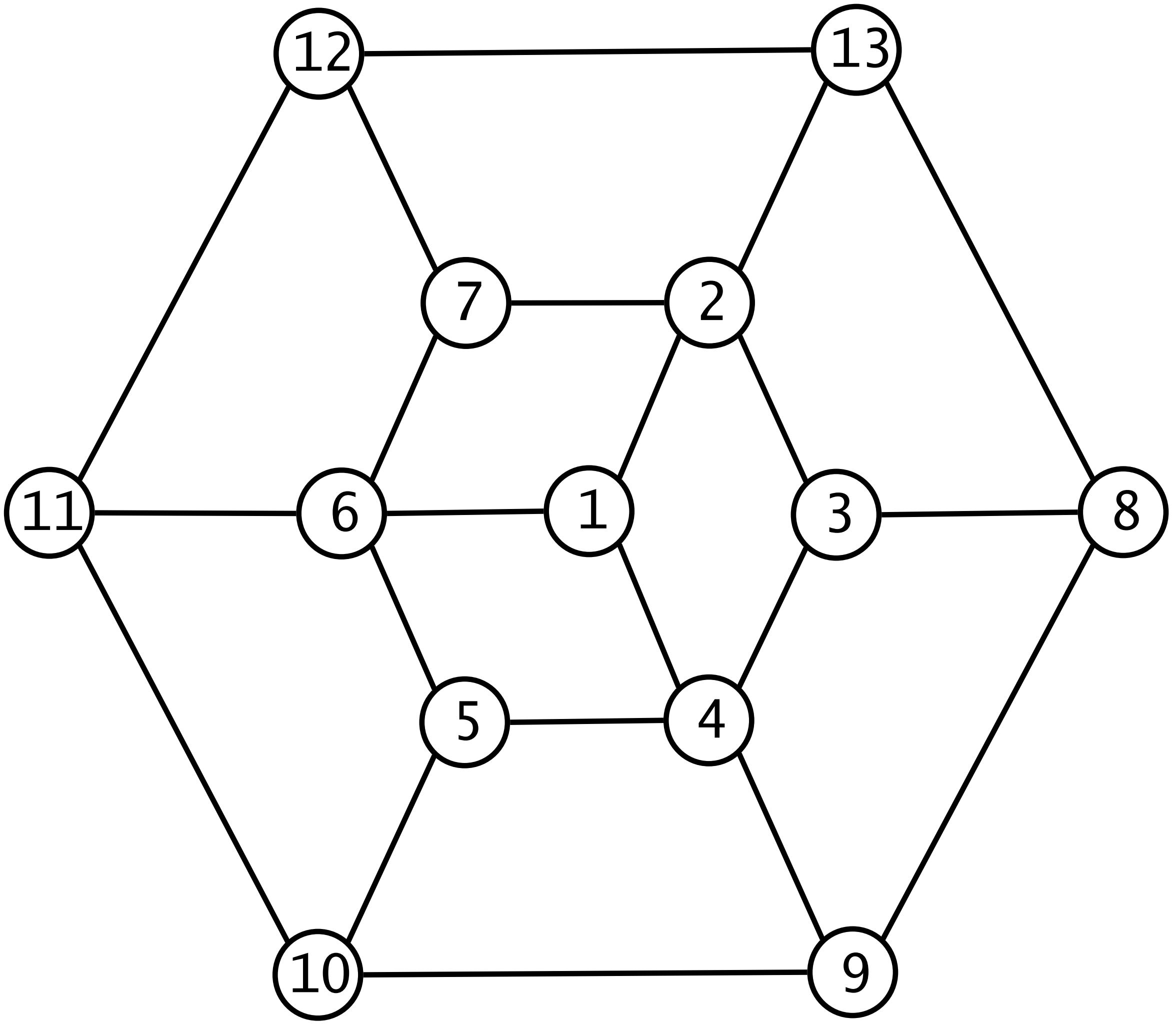
B C P N M D F K L T S R Q Z X W V J H G

B C P N M D F G H X W V J K L T S R Q Z

Thomas Penyngton Kirkman (1806-1895)



... und seine "Bienenwabe"



u g u g ... u g

Enumeration?

Anzahl Hamiltonkreise (im vollständigen Graphen)

n Städte: $n!/2 \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} / 2$ (Stirling-Formel)

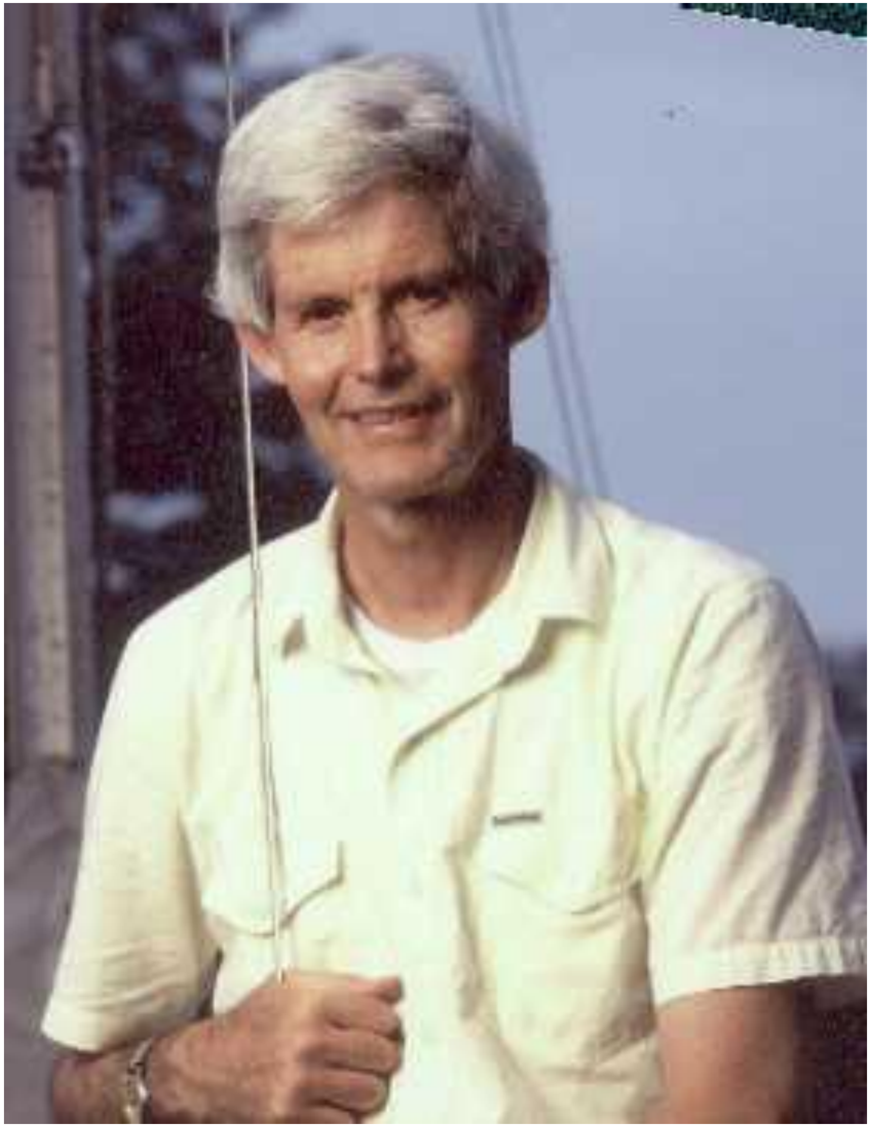
Exponentieller Aufwand: 2^n, n^n, etc.

Polynomialer Aufwand: n, 1.000n, n^3, n^5, p(n)

linear	quadratisch	kubisch	exponentiell	Doppelt exp.
n	n^2	n^3	2^n	n^n
10	100	1.000	1.024	10^{10}
100	10.000	10^6	10^{30}	10^{200}
1.000	10^6	10^9	10^{300}	10^{3000}
10.000	10^8	10^{12}	10^{3000}	10^{50000}

Gibt es ein polynomiales Verfahren? Niemand weiss es!

Stephen Cook



Das Satisfiability-Problem (SAT) ist schwierig

Beispiel: $(x1 \vee \neg x2 \vee x3) \wedge (\neg x1 \vee x2 \vee x3) \wedge (\neg x1 \vee x2 \vee \neg x3)$

Input: Eine Menge $U=\{x_1,\dots,x_n\}$ von Variablen und eine Menge $C=\{c_1,\dots,c_m\}$ von Klauseln (Produkte von ANDs) mit Variablen aus U.

Frage: Gibt es eine Wahrheitsbelegung für C (Zuordnung von Werten wahr/falsch zu den Variablen aus U, so dass in jeder Klausel aus C wenigstens eine Variable wahr ist)?

Satz: SAT ist NP-vollständig (d.h. wenn man SAT lösen kann, kann man viele Probleme lösen, genauer alle nicht-deterministisch polynomial lösbaren Probleme, d.h. alle Probleme, die man lösen kann, indem man die Lösung errät und in polynomialer Zeit überprüft, dass die erratene Lösung tatsächlich eine Lösung ist).

Millennium Problems

In order to celebrate mathematics in the new millennium, The Clay Mathematics Institute of Cambridge, Massachusetts (CMI) has named seven *Prize Problems*. The Scientific Advisory Board of CMI selected these problems, focusing on important classic questions that have resisted solution over the years. The Board of Directors of CMI designated a $7 million prize fund for the solution to these problems, with $1 million allocated to each. During the Millennium Meeting held on May 24, 2000 at the Collège de France, Timothy Gowers presented a lecture entitled *The Importance of Mathematics*, aimed for the general public, while John Tate and Michael Atiyah spoke on the problems. The CMI invited specialists to formulate each problem.

One hundred years earlier, on August 8, 1900, David Hilbert delivered his famous lecture about open mathematical problems at the second International Congress of Mathematicians in Paris. This influenced our decision to announce the millennium problems as the central theme of a Paris meeting.

The rules for the award of the prize have the endorsement of the CMI Scientific Advisory Board and the approval of the Directors. The members of these boards have the responsibility to preserve the nature, the integrity, and the spirit of this prize.

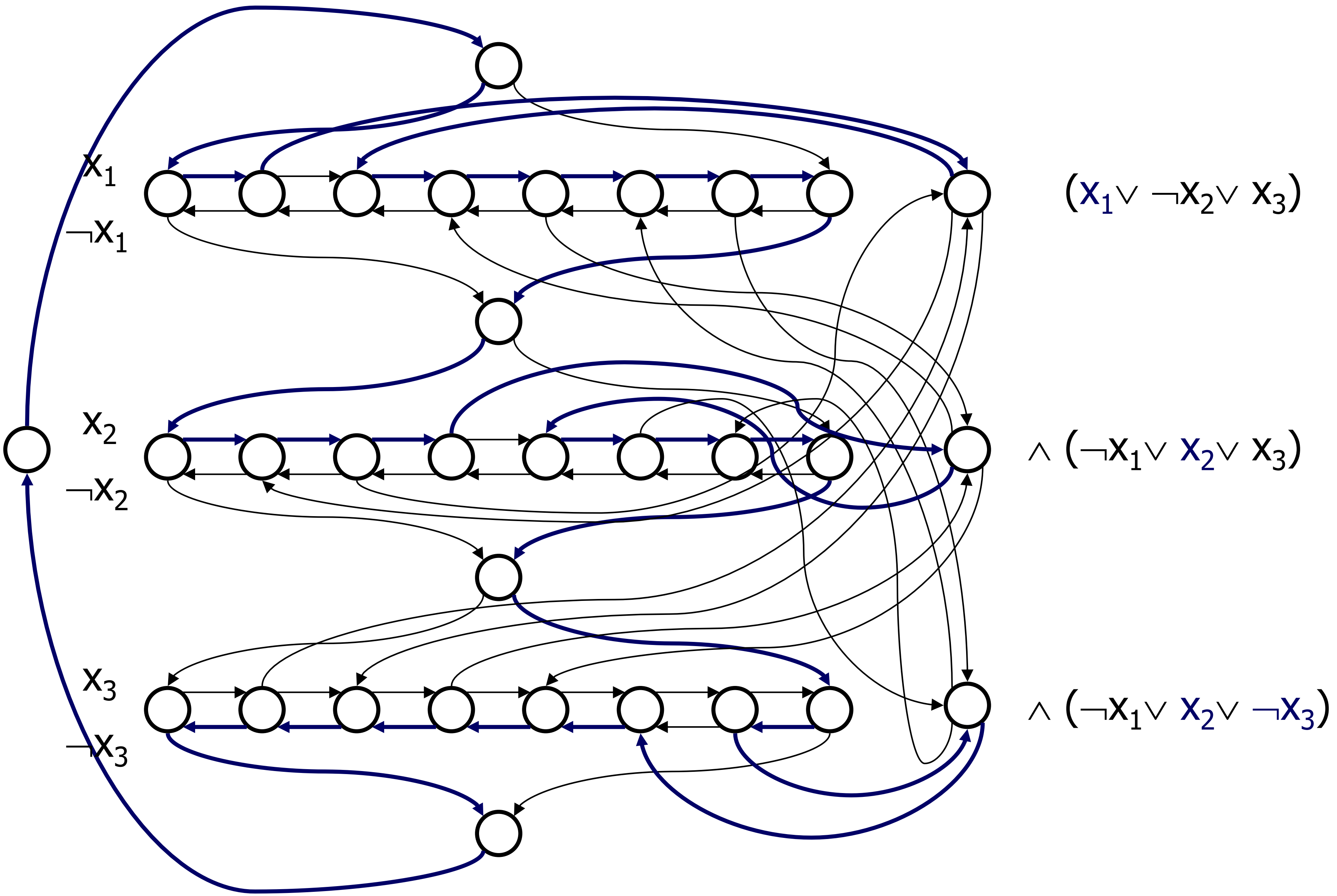
Paris, May 24, 2000

Please send inquiries regarding the Millennium Prize Problems to prize.problems@claymath.org.

- Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture
- Hodge Conjecture
- Navier-Stokes Equations
- P vs NP
- Poincaré Conjecture
- Riemann Hypothesis
- Yang-Mills Theory

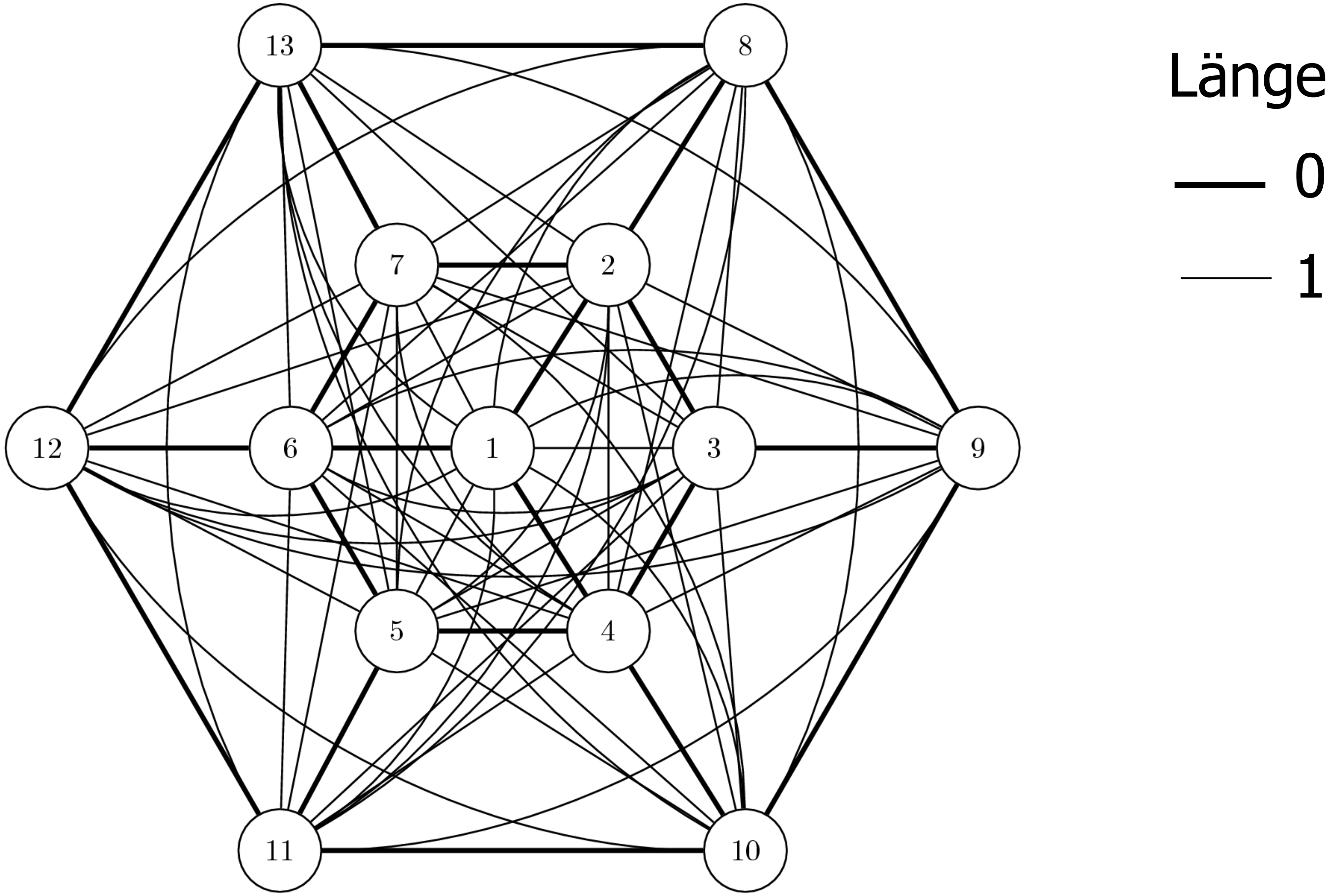
- Rules
- Millennium Meeting Videos

Das Hamiltonkreisproblem ist auch schwierig

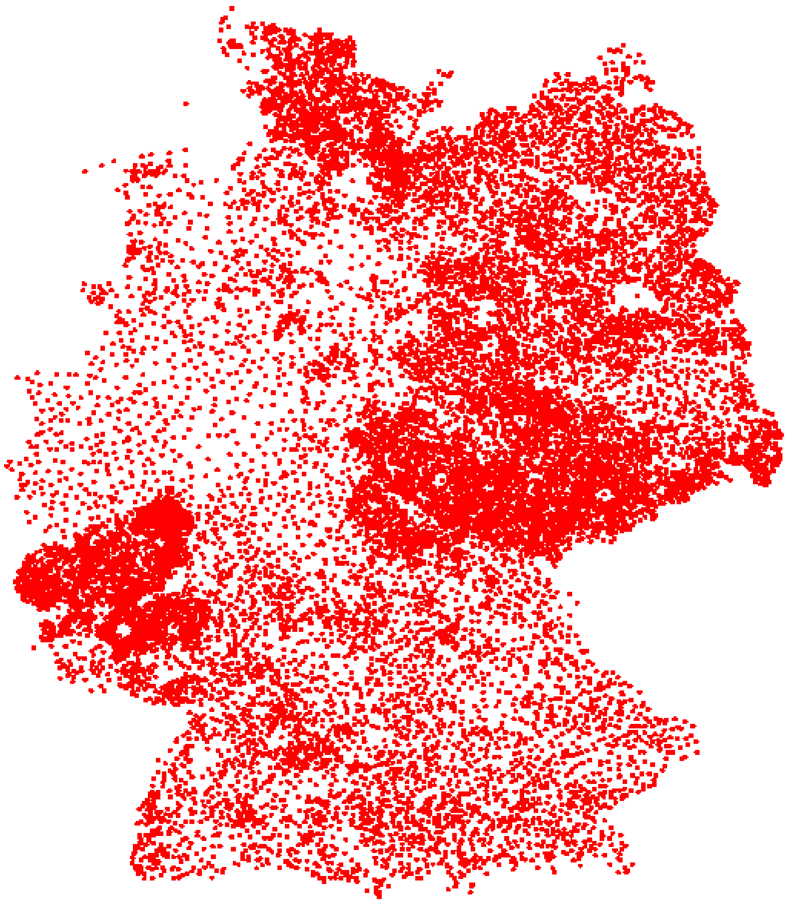


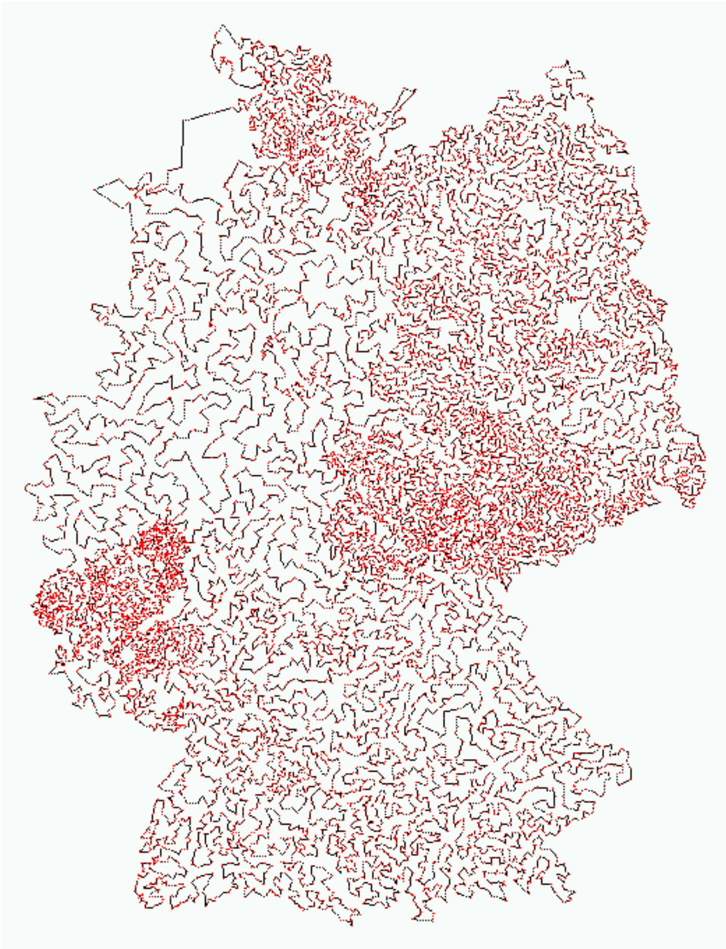
Das Travelling Salesman Problem

Freie Universität Berlin



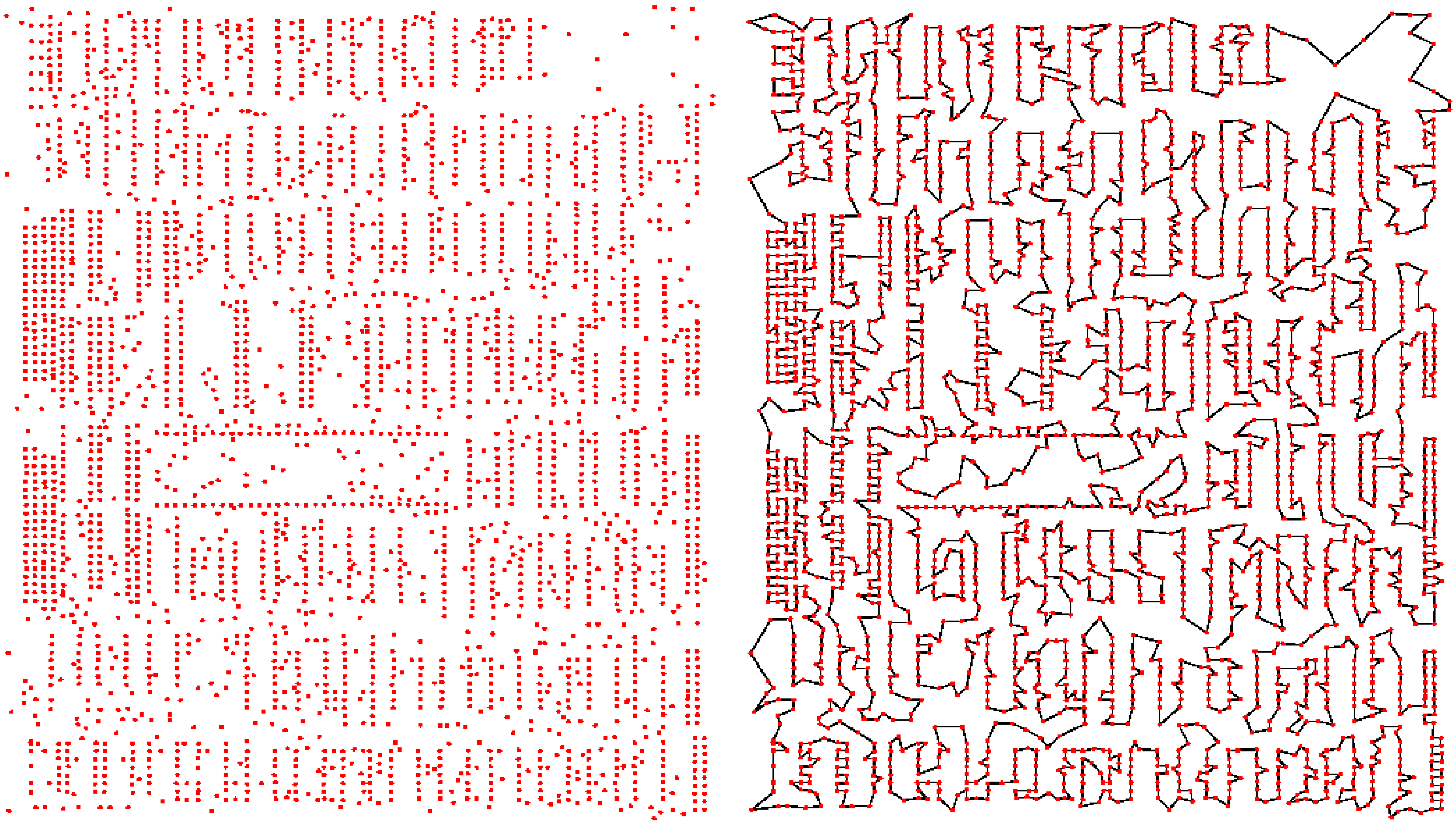
Das TSP





D15112

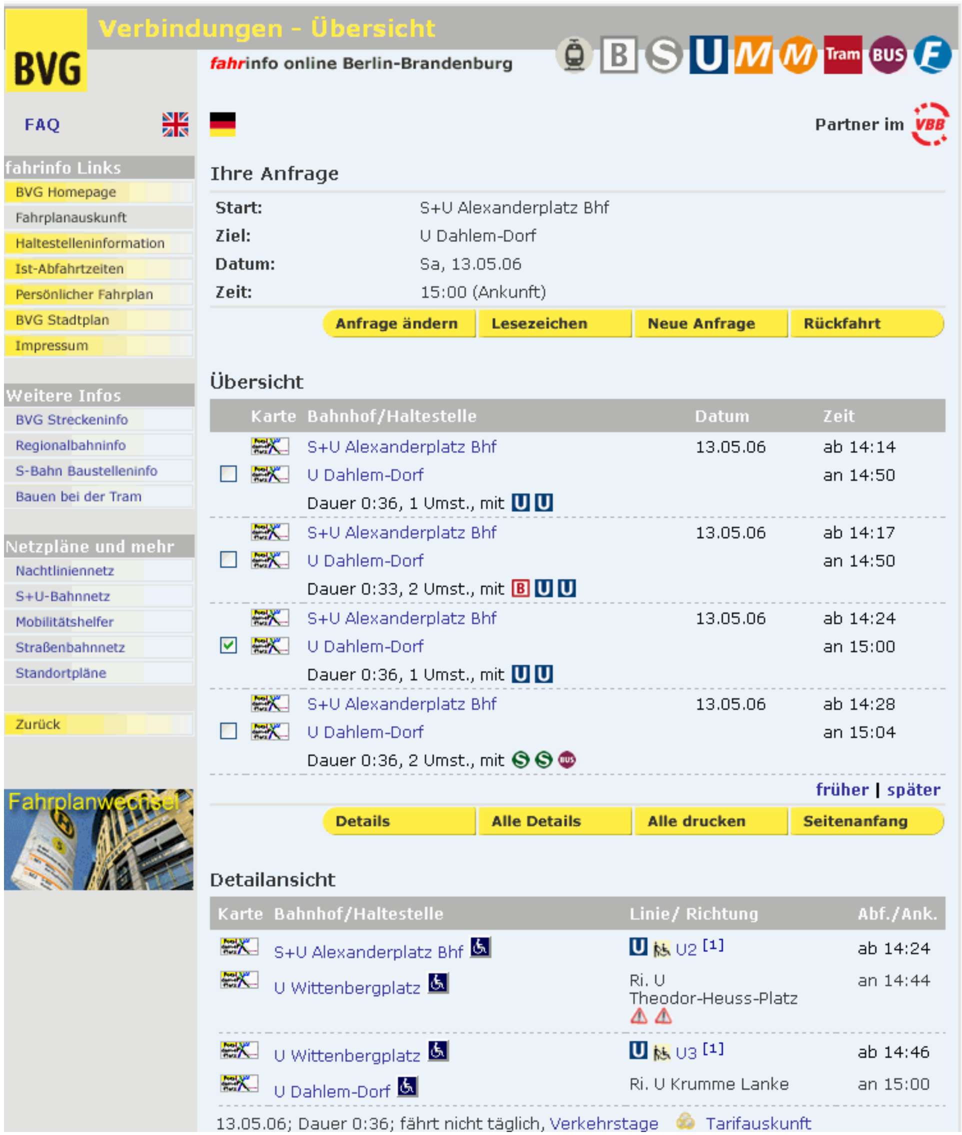
Das TSP

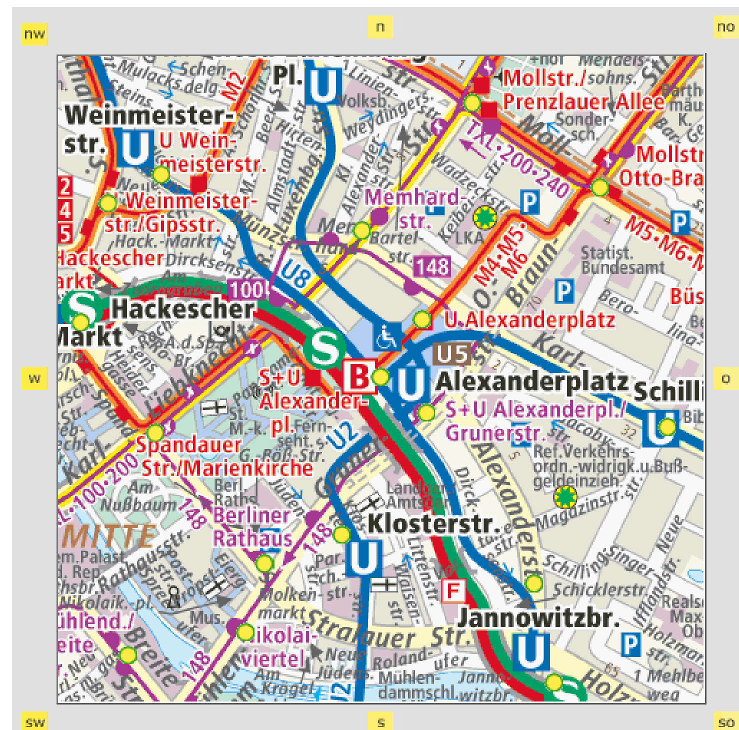


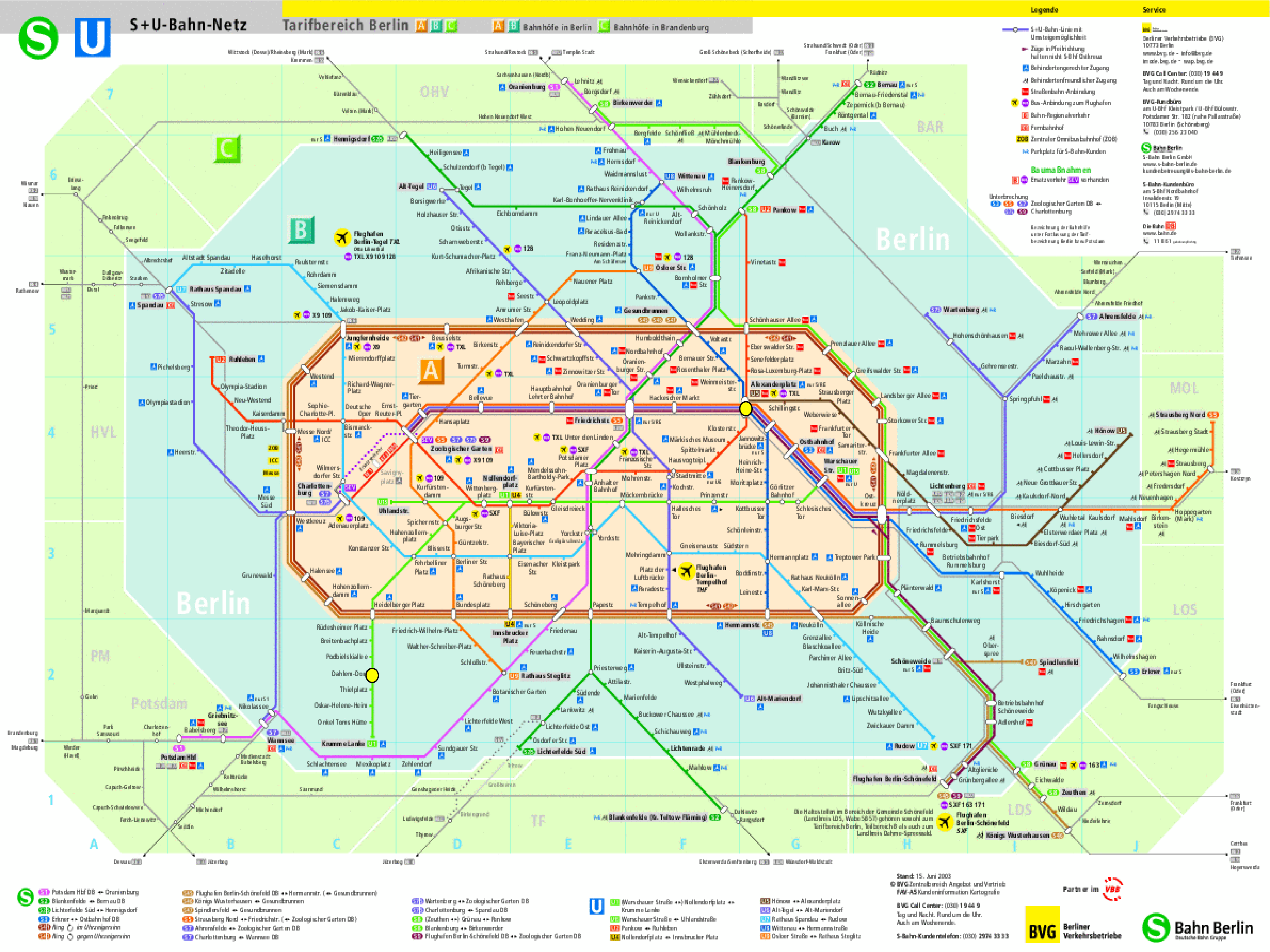
PCB3038

Edsger Wybe Dijkstra (1930-2002)

Das-Kürzeste-Wege-Problem



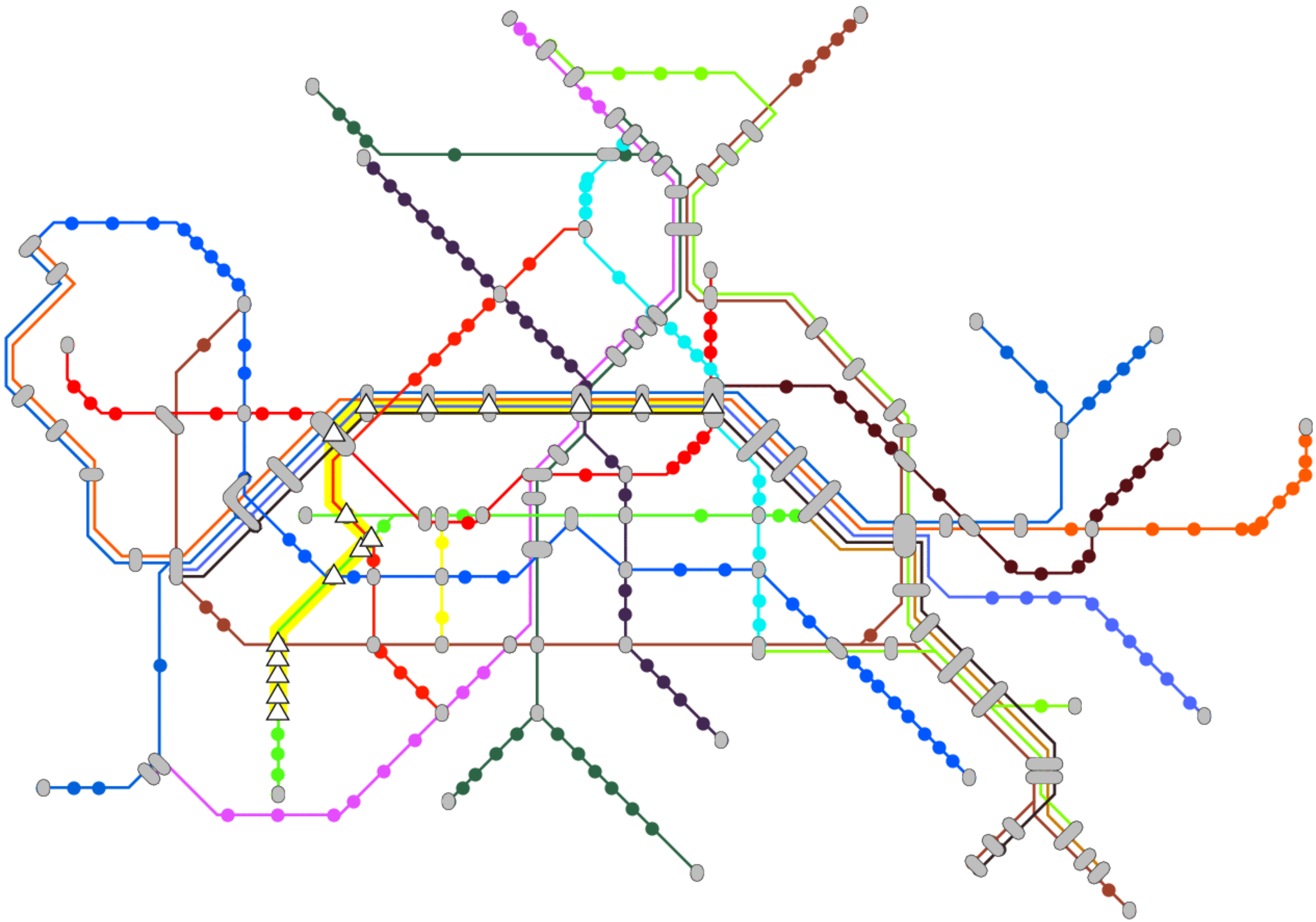




S+U-Bahn-Netz
Tarifbereich Berlin A B C
A B Bahnhöfe in Berlin
C Bahnhöfe in Brandenburg
Legende
Service
Baumaßnahmen
Berlin
S1 Potsdam Hbf DB ↔ Oranienburg
S2 Blankenfelde ↔ Bernau DB
S25 Lichterfelde Süd ↔ Hennigsdorf
S3 Erkner ↔ Ostbahnhof DB
S41 Ring im Uhrzeigersinn
S42 Ring gegen Uhrzeigersinn
S45 Flughafen Berlin-Schönefeld DB ↔ Hermannstr. (↔ Gesundbrunnen)
S46 Königs Wusterhausen ↔ Gesundbrunnen
S47 Spindlersfeld ↔ Gesundbrunnen
S5 Strausberg Nord ↔ Friedrichstr. (↔ Zoologischer Garten DB)
S7 Ahrensfelde ↔ Zoologischer Garten DB
S7 Charlottenburg ↔ Wannsee DB
S75 Wartenberg ↔ Zoologischer Garten DB
S75 Charlottenburg ↔ Spandau DB
S8 (Zeuthen ↔) Grünau ↔ Pankow
S85 Blankenburg ↔ Birkenwerder
S9 Flughafen Berlin-Schönefeld DB ↔ Zoologischer Garten DB
U1 (Warschauer Straße ↔) Nollendorfplatz ↔ Krumme Lanke
U15 Warschauer Straße ↔ Uhlandstraße
U2 Pankow ↔ Ruhleben
U4 Nollendorfplatz ↔ Innsbrucker Platz
U5 Hönow ↔ Alexanderplatz
U6 Alt-Tegel ↔ Alt-Mariendorf
U7 Rathaus Spandau ↔ Rudow
U8 Wittenau ↔ Hermannstraße
U9 Osloer Straße ↔ Rathaus Steglitz
Stand: 15. Juni 2003
Partner im VBB
BVG Berliner Verkehrsbetriebe
S-Bahn Berlin

Graph des Schnellbahnnetzes

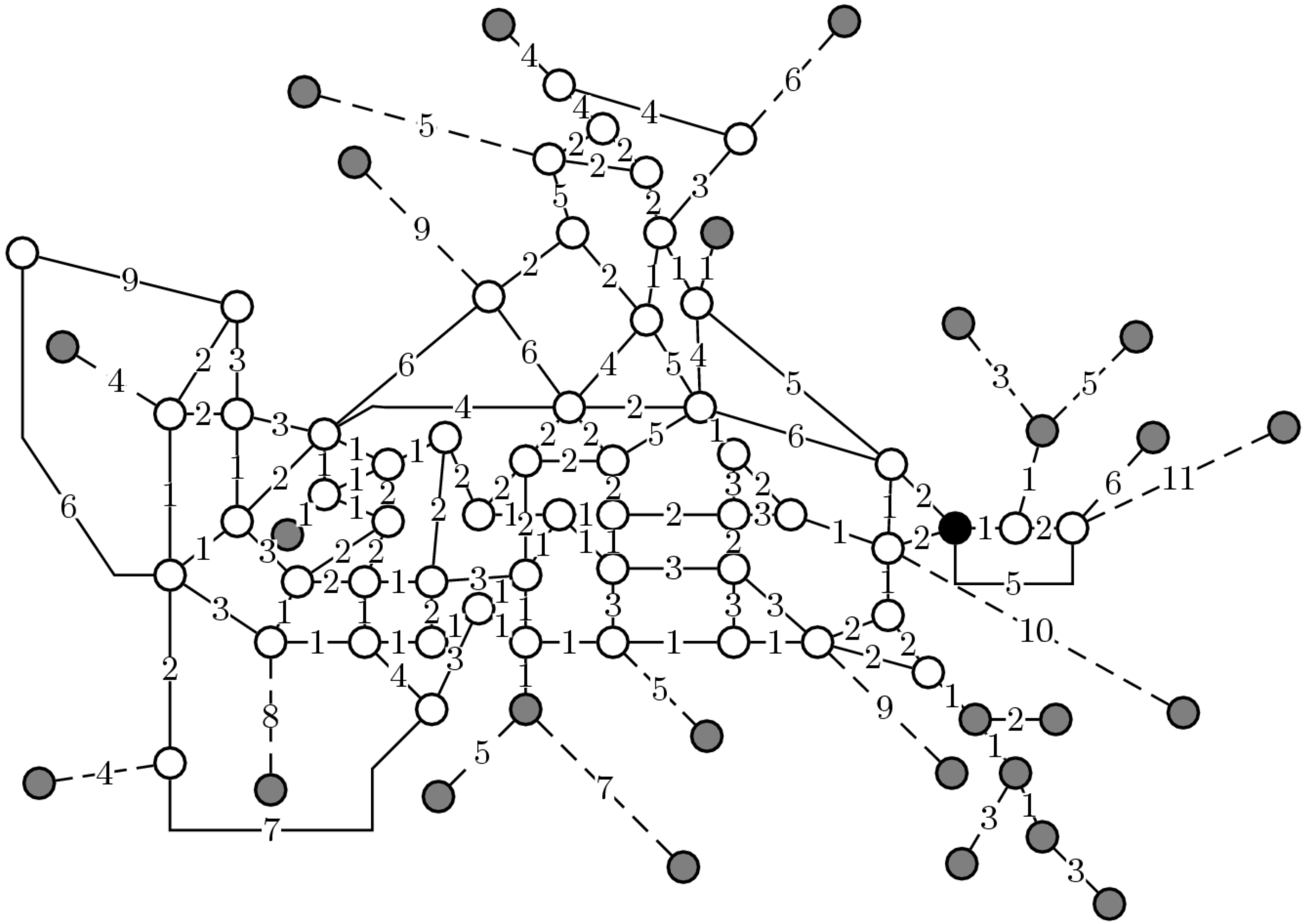
(306 Knoten, 445 Kanten)



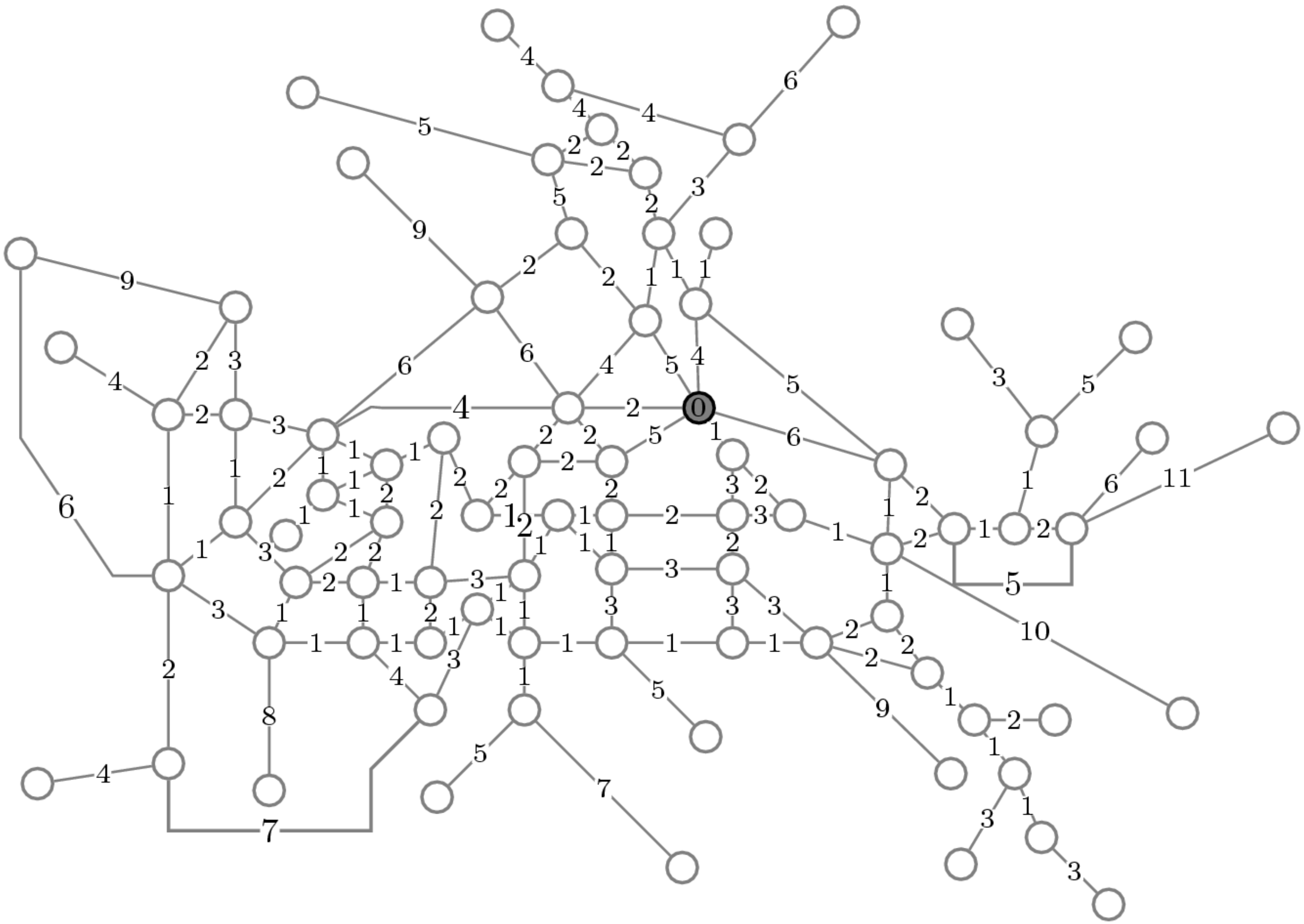
Preprocessing

(80 Knoten, 122 Kanten)

Freie Universität Berlin

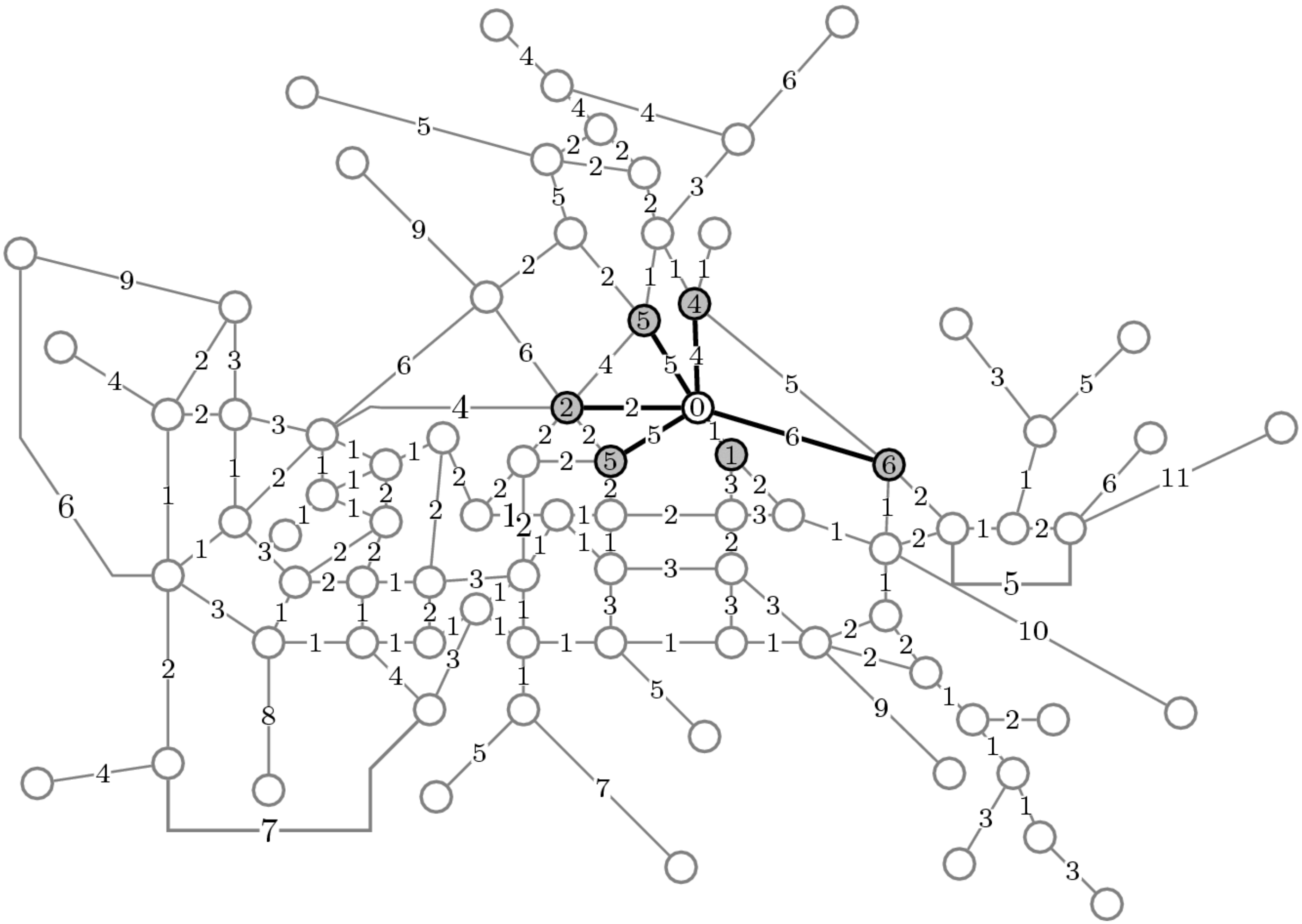


Dijkstras Algorithmus (0)

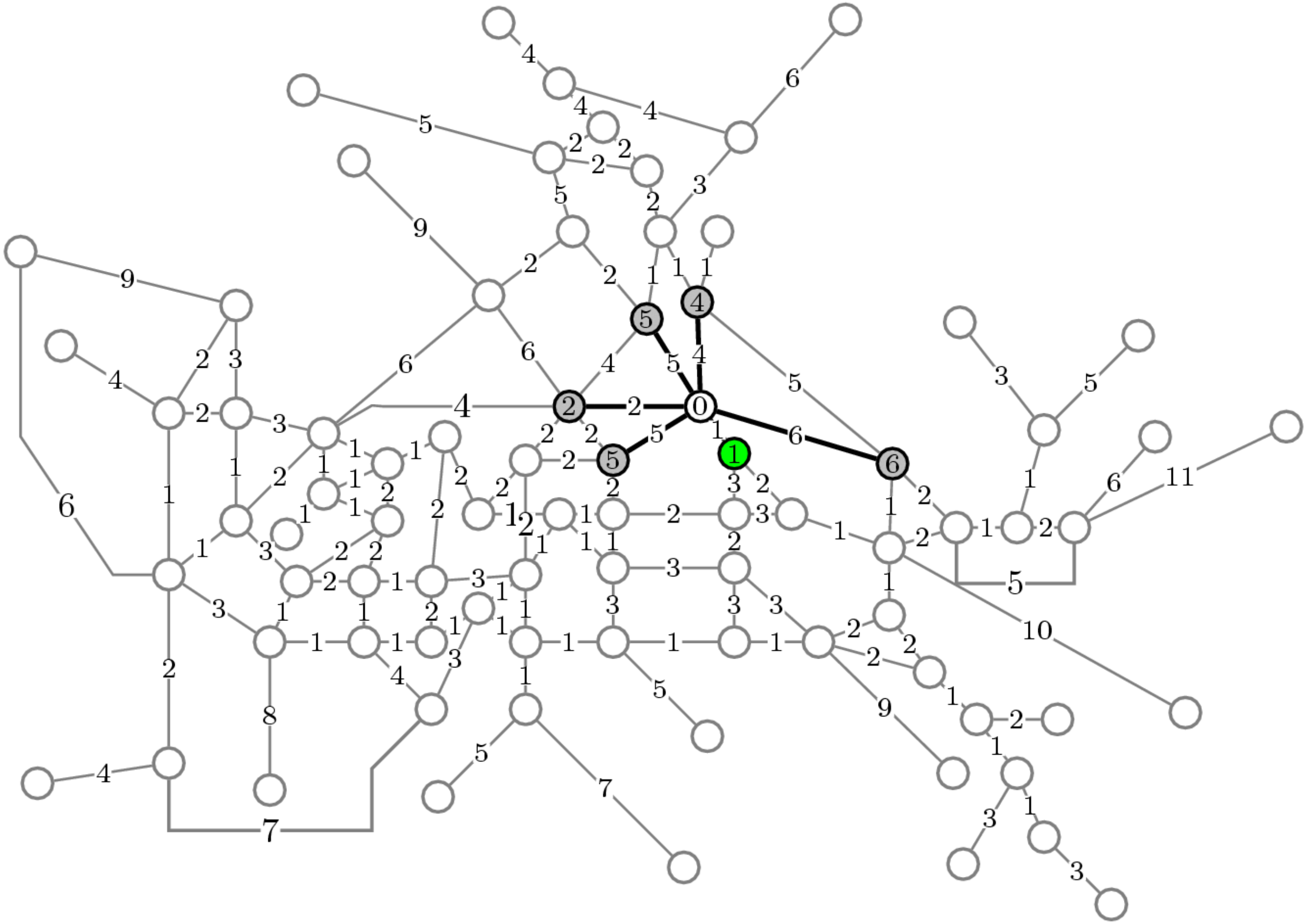


Dijkstras Algorithmus (1)

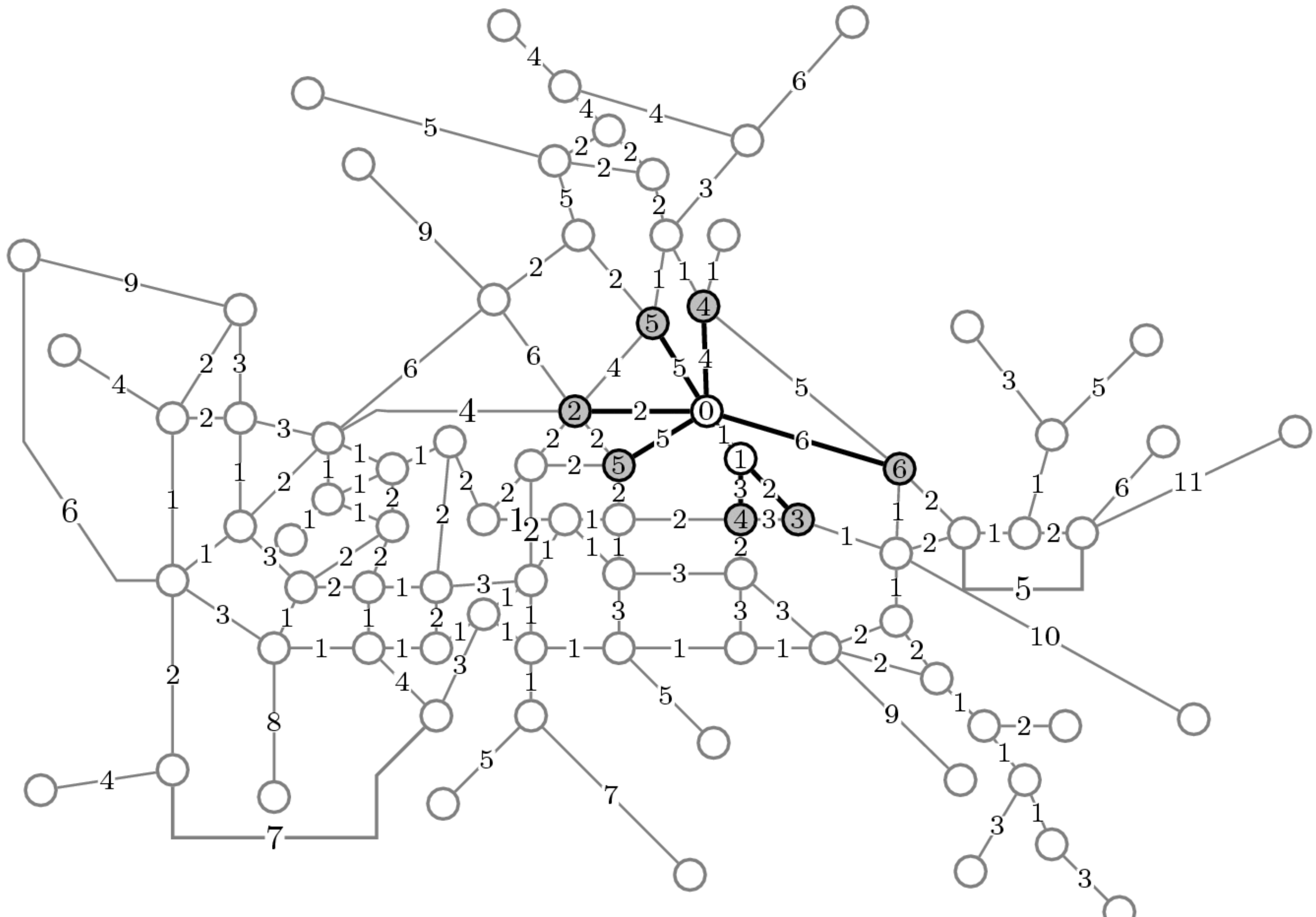
Freie Universität Berlin



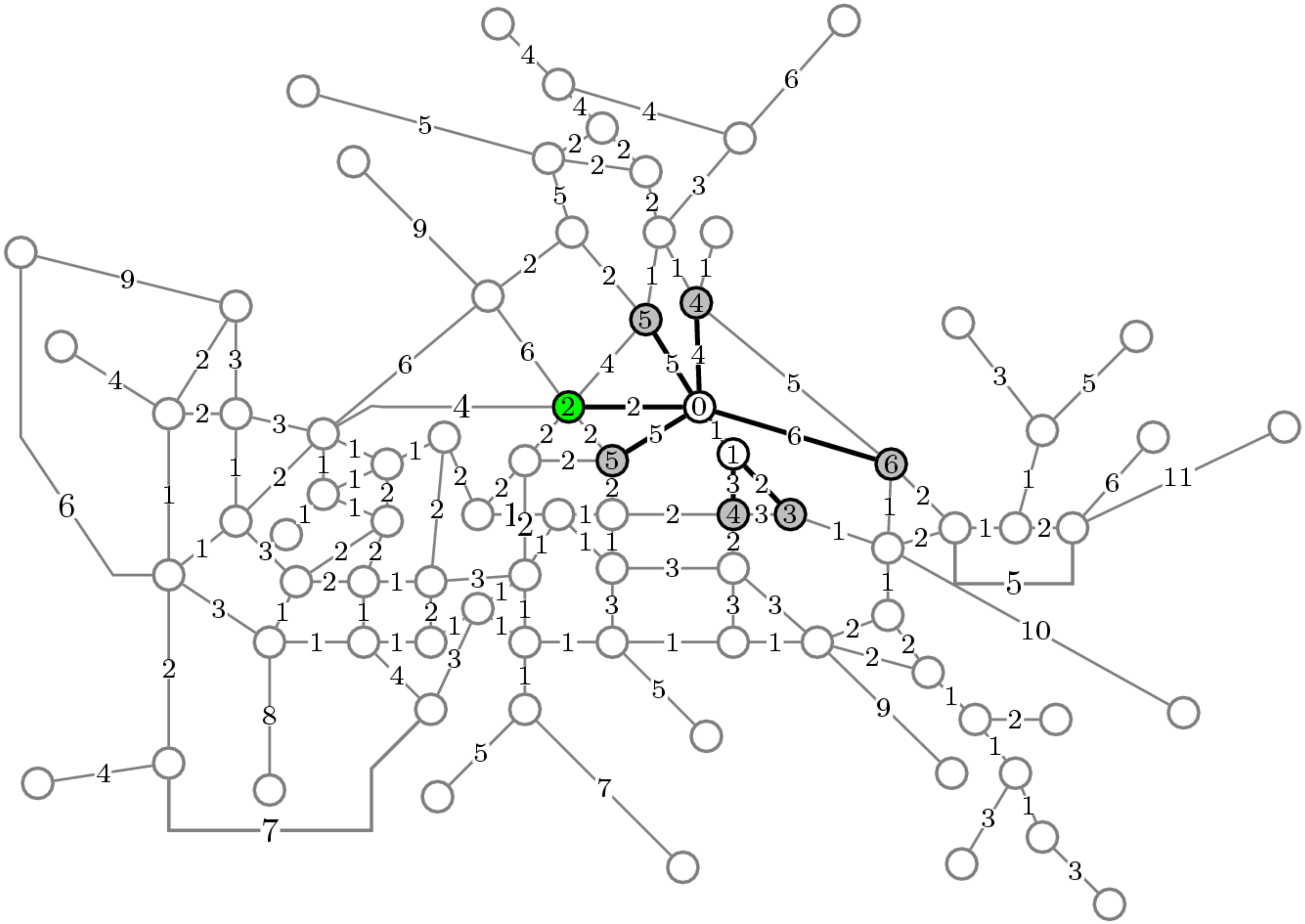
Dijkstras Algorithmus (2)



Dijkstras Algorithmus (3)

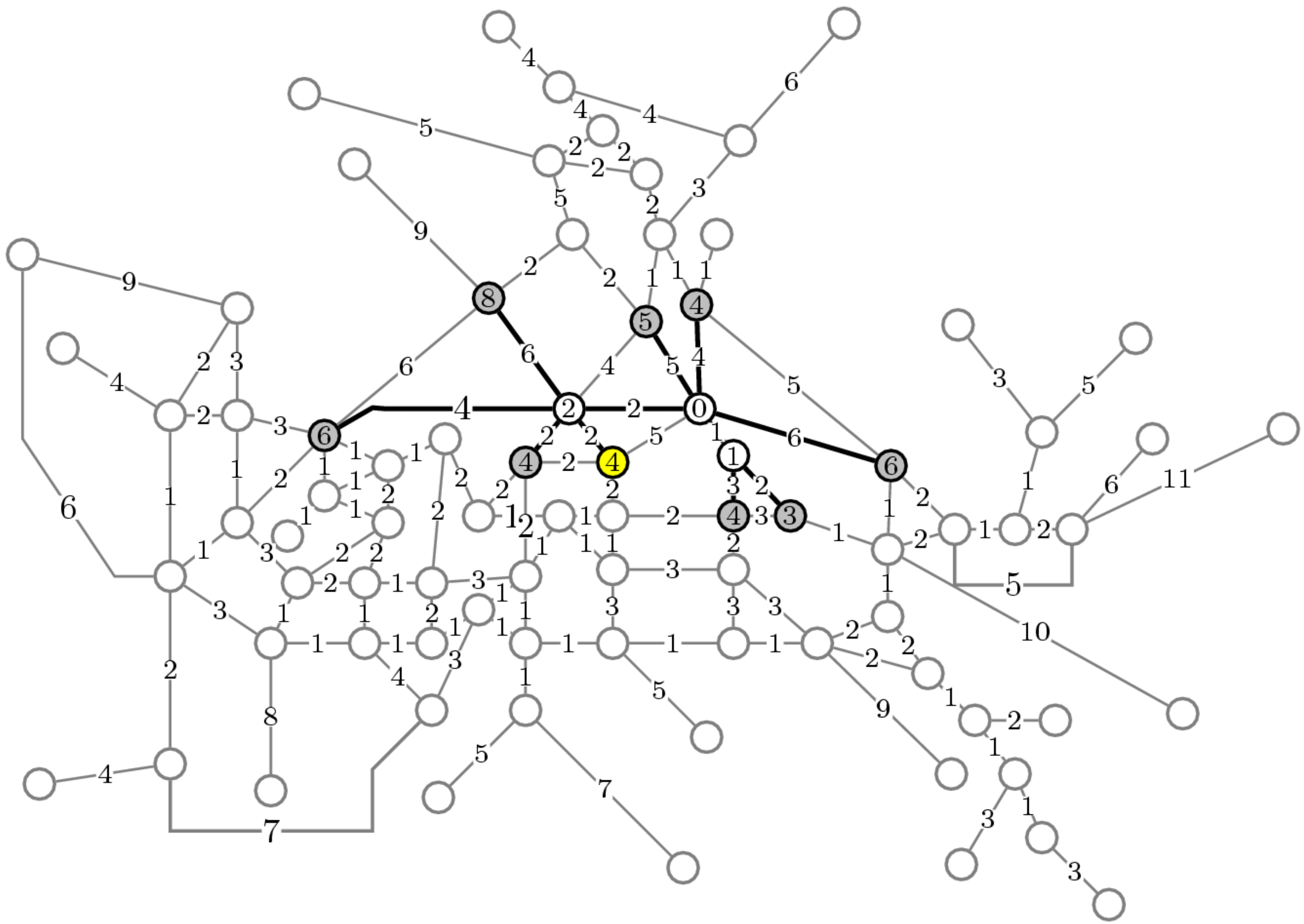


Dijkstras Algorithmus (4)

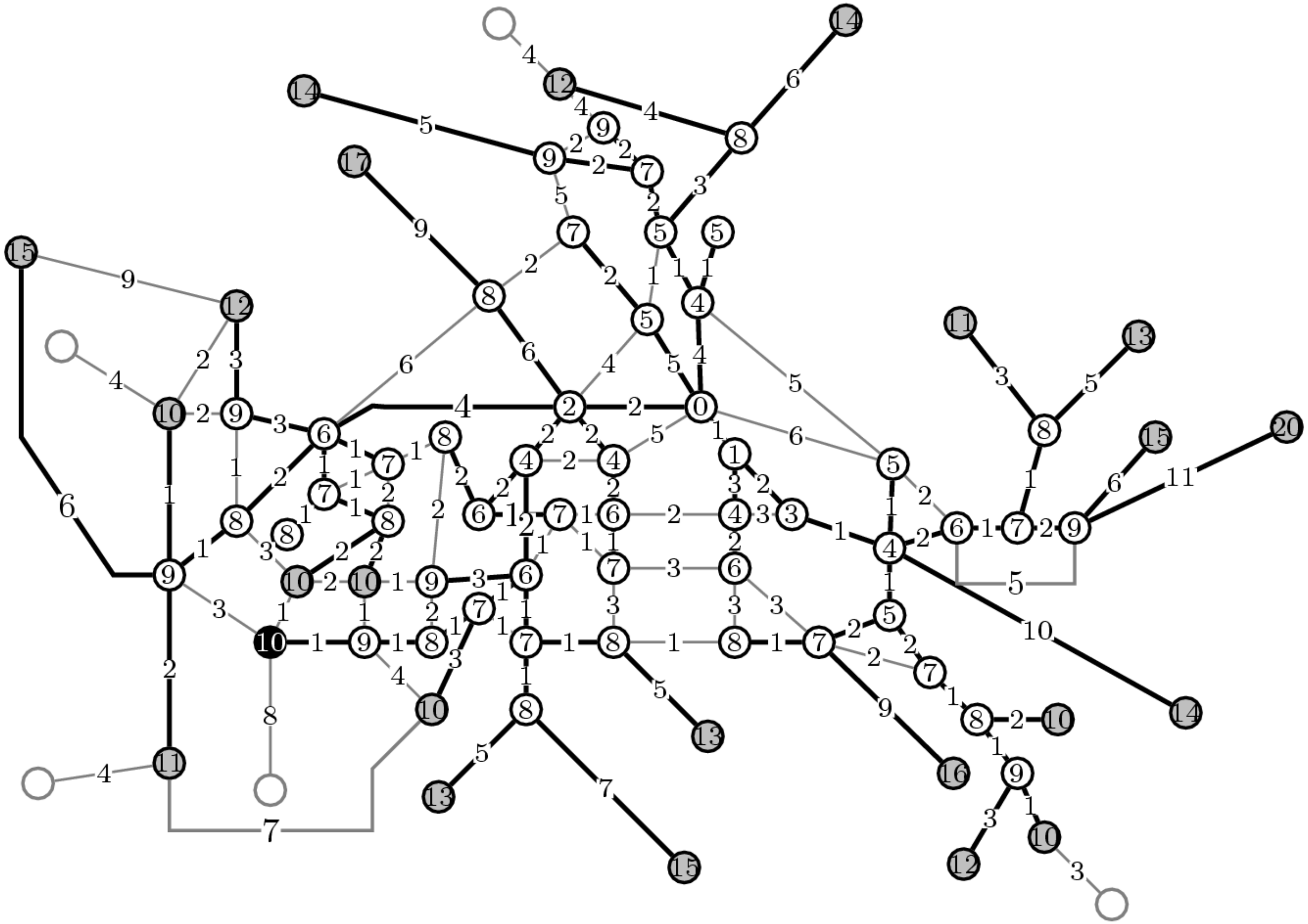


Dijkstras Algorithmus (5)

Freie Universität Berlin



Kürzeste-Wege-Baum



Laufzeit von Dijkstras Algorithmus [1959]

Freie Universität Berlin

- Setze alle Knotenmarkierungen = 0,
  Abstände = ∞, Vorgänger = leer — $O(n)$
- Setze Abstand Startknoten = 0, Vorg. = selbst — $O(1)$
- Wiederhole — $n\ *$
  - Finde den unmarkierten Knoten mit
    minimalem Abstand oder höre auf, fertig! — $O(n)$
  - Markiere ihn — $O(1)$
  - Für alle ausgehenden Kanten — $O(n)$
    - Update der Abstände und Vorgänger — $O(1)$

$O(n^2)$

Graphentheorie

- Bäume, Zusammenhang, Matchings, Flüsse, Färbungen

Diskrete Strukturen

- Graphen, Matroide, Designs, Mengensysteme

Zählen

- Elementares Zählen, Schubfachprinzip, Inklusion-Exklusion, Inversion, Erzeugende Funktionen

Algorithmen

- Laufzeit, Breiten/Tiefensuche, Dijkstra, Greedy, Kruskal, Ungarische Methode, Ford-Fulkerson

Vertiefung (falls genügend Zeit)

- Codierungstheorie, Lineare Optimierung

Literatur

M. Aigner: Diskrete Mathematik

J. Matousek, J. Nesetril: An invitation to Discrete Mathematics

R. Diestel: Graph Theory

D. West: Introduction to Graph Theory

Organisatorisches

Übungen

- Tutor Stephan Schwartz
- Zeit Mo 10-12, Raum noch offen, erste Übung 15.04.13
- Ausgabe Di per Webseite, Abgabe Di, erstes Blatt morgen

Scheinkriterien

- Zulassung zur Klausur: 50% der Übungspunkte
- Note: 100% Klausur
- Klausur: 90 Minuten, Termin noch offen

Sprechstunde

- immer nach der VL

Danke für die Aufmerksamkeit

Prof. Dr. Ralf Borndörfer

Freie Universität Berlin
Zuse-Institute Berlin
Takustr. 7
14195 Berlin-Dahlem

Fon (+49 30) 84185-243
Fax (+49 30) 84185-269

borndoerfer@zib.de

www.zib.de/borndoerfer