Diskrete Mathematik

1. Graphen

1.1 Def.: Sei M eine Menge und $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ eine natürliche Zahl. Bezeichne

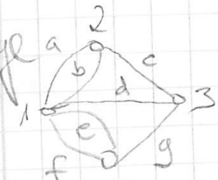
a) $[k] := \{1, 2, \dots, k\} \subseteq \mathbb{N}$ die Menge der ersten k natürlichen Zahlen

b) $\binom{M}{k} := \{\{m_1, \dots, m_k\} : m_i \in M, i = 1, \dots, k\}$ die Menge der k-elementigen Teilmengen von M

c) $\left(\!\binom{M}{k}\!\right) := \{\{\!\{m_1, \dots, m_k\}\!\} : m_i \in M, i = 1, \dots, k\}$ " " " Multiteilmengen von M (d.h. $m_i = m_j$ für $i \neq j$ ist möglich).

1.2. Def. (Graph):

a) Ein (ungerichteter) Graph ist ein 2-Tupel $G = (V, E)$ aus einer (endlichen) Menge von Knoten und einer Multimenge $E \subseteq \{\!\{\{\!\{u, v\}\!\} : u, v \in V\}\!\}$ von Kanten. Für einen Graphen G bezeichnen $V = V(G)$ seine Knoten und $E = E(G)$ seine Kantenmenge.



$V = \{1, 2, 3, 4\}$

$E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

$e = \{1, 4\}$
$f = \{1, 4\}$

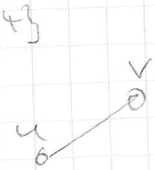
G heißt nicht trivial, falls $E(G) \neq \emptyset$.

b) Falls "die Bedeutung aus dem Kontext klar ist", schreiben $\{u, v\}$ oder uv anstelle von $\{\!\{u, v\}\!\}$ (einschl. $\{u, u\}$ und uu), und $u \in uv$,
und wir identifizieren eine Kante mit ihren Endknoten und schreiben $e = uv$.

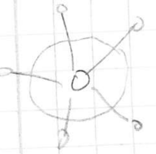
c) $e = uu \in E$ heißt Schlinge oder Schleife.
$e, f \in E$ mit $e \neq f$, $e = uv$, $f = uv$ heißen Mehrfachkanten.
Ein Graph ohne Schleifen und Mehrfachkanten heißt einfach.
Wenn nicht besonders darauf hingewiesen wird, betrachten wir einfache Graphen.

$\Gamma(1) = \{2, 3, 4\}$
$d(1) = 5$

d) u, v mit $uv \in E$ heißen benachbart oder adjazent.



$\Gamma(u) := \{v \in V : uv \in E\}$ Nachbarschaft von $u \in V$.



e) $uv \in E$ ist inzident zu $u, v \in V$
$\delta(u) := \{uv \in E\}$ zu u inzidente Kanten
$d(u) = \deg(u) = |\delta(u)|$ Grad von $u \in V$

$\delta(G) = 3$
$\Delta(G) = 5$

$u \in V$ mit $d(u) = 0$ heißt isolierter Knoten
$u \in V$ mit $d(u) = 1$ heißt Blatt.

$\delta(G) = \Delta(G) = 5$

→ ① G' heißt (knoten) induzierter Untergraph von G, wenn $E' = E \cap \binom{V'}{2}$.

→ ② d) F.d.B.R.i. schreiben wir Pfade und Kreise auch als Folgen von Knoten, Kanten als alternierende Folgen von Knoten und Kanten, z.B. und schreiben z.B. einen Pfad P als $P = v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n$, $v_i \neq v_j$, $i,j = 0,\dots,n$

$P = v_0, v_1, \dots, v_n$, oder $P = v_0, v_0v_1, v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n, v_n$.

$T_n = v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n$ Tour der Länge n ($v_i = v_j$ für $i \neq j$ möglich)

$v_iv_{i+1} \neq v_jv_{j+1}$ $\forall i \neq j$. (und versch. Kanten)

$T_n = \underline{v_0}v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}\underline{v_0}$ geschlossene Tour der Länge n

$v_iv_{i+1} \neq v_jv_{j+1}$ $\forall i \neq j$ (und versch. Kanten)

alexander.kremer@fu-berlin.de

$\delta(G) := \min_{u \in V} d(u)$ <u>Minimalgrad</u> von G

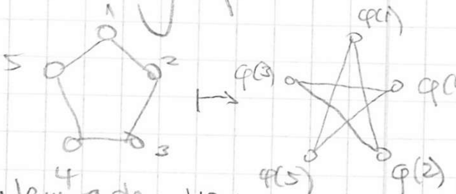
$\Delta(G) := \max_{u \in V} d(u)$ <u>Maximalgrad</u> von G

Ein Graph G mit $\delta(G) = \Delta(G) = k$ heißt <u>k-regulär</u>.

Die 0/1 Matrix $(a_{ve}) \in \{0,1\}^{V \times E}$ mit $a_{ve} = \begin{cases} 1, & v \in e \\ 0, & v \notin e \end{cases}$ heißt Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix von G.

f) Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ sind <u>isomorph</u>, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : V \to V'$ gibt, so daß gilt

$uv \in E \iff \varphi(u)\varphi(v) \in E'$.



g) Ein Graph $G' = (V', E')$ ist ein <u>Untergraph</u> oder <u>in G enthalten</u> von $G = (V, E)$, wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ gilt. Wir schreiben $G' \subseteq G$. G' heißt <u>(Knoten-) induzierter</u> Untergraph von G, wenn $E' = E \cap \binom{V'}{2}$ gilt, wir schreiben $G' = G[V']$.

h) Durch eine Funktion $w : E \to \mathbb{R}$ von <u>Kantengewichten</u> wird ein Graph <u>gewichtet</u>.

i) Analog definiert man die Begriffe für <u>gerichtete Graphen</u> oder <u>Digraphen</u> (directed graph) $D = (V, A)$ mit <u>gerichteten Kanten</u> oder <u>Bögen</u> $A \subseteq V \times V$.

Man schreibt

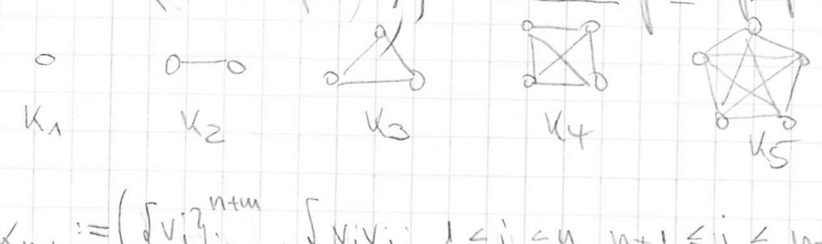
$\delta^+(u) := \delta^{out}(u) := \{uv \in A\}$, $u \in V$

$\delta^-(u) := \delta^{in}(u) := \{vu \in A\}$, $u \in V$

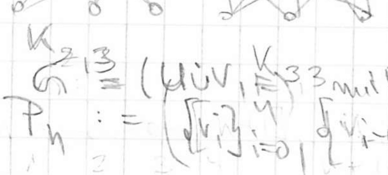
usw.

<u>1.3 Bsp.</u> (von Graphen)

a) $K_n := \left(\{v_i\}_{i=1}^n, \binom{\{v_i\}}{2}\right)$ <u>vollständiger Graph auf n Knoten</u> $v_1, \dots, v_n$



b) $K_{n,m} := \left(\{v_i\}_{i=1}^{n+m}, \{v_i v_j : 1 \le i \le n, n+1 \le j \le n+m\}\right)$ <u>vollständiger bipartiter Graph</u> auf n und m Knoten



$G = (U \dot\cup V, E)$ mit $E \subseteq \{uv : u \in U, v \in V\}$ <u>bipartiter Graph</u>

c) $P_n := \left(\{v_i\}_{i=0}^n, \{v_{i-1} v_i : i = 1, \dots, n\}\right)$ <u>Weg der Länge n</u> (Kanten) (mit verschiedenen Knoten) von v_0 nach v_n

$C_n := \left(\{v_i\}_{i=1}^n, \{v_i v_{i+1}, i = 1, \dots, n-1\} \cup \{v_n v_1\}\right)$ <u>Kreis der Länge n</u> (mit versch. Knoten)

② ←

c) $Q_n = \left(\{0,1\}^n, \{ \{u,v\} \in \binom{\{0,1\}^n}{2} : |u-v| = e_j \text{ für } j \in [n] \} \right)$

e_j: j-ter Einheitsvektor

Hyperwürfel

Satz 1.4: Für jeden einfachen Graphen $G=(V,E)$ gilt:

$$\sum_{u\in V} d(u) = 2|E|.$$

Bew.: Def. Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix $(a_{ve}) \in \{0,1\}^{V\times E}$ durch

$$a_{ve} := \begin{cases} 1, & v\in e \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\sum_{u\in V} d(u) = \sum_{u\in V}\sum_{e\in E} a_{ue} = \sum_{e\in E} \underbrace{\sum_{u\in V} a_{ue}}_{=2} = \sum_{e\in E} 2 = 2|E|. \quad \square$$

Korollar 1.5: In einem einfachen Graphen ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

Def. 1.6 (Zusammenhang): Sei $G=(V,E)$ ein Graph.

a) $P(u,v) := \{ P \subseteq G : P \text{ Pfad von } u \text{ nach } v \}$

v erreichbar von u :⇔

b) $u,v \in V$ zusammenhängend $:\Leftrightarrow P(u,v) \neq \emptyset$

d) G zusammenhängend $\Leftrightarrow u,v$ zusammenhängend $\forall u,v\in V$

e) Betrachte Äquivalenzrelation

$u \sim v :\Leftrightarrow u,v$ zusammenhängend

$G[[u]]$ Zusammenhangskomponente von u.

Def. 1.7 (Eulertour): Sei G ein (Multi- bzw. einf.) Graph und $T \subseteq G$ Tour T in G.

T heißt Eulertour $\Leftrightarrow E(T) = E(G)$,

d.h. T besucht alle Kanten von G genau einmal.

G ist eulersch $:\Leftrightarrow \exists$ Eulertour $T \subseteq G$.

c) $d(u,v) := \min_{P\in P(u,v)} |E(P)|$ Abstand von u und v

f) $e\in E$ Brücke in G $:\Leftrightarrow \left|\{ G[[v]] : v\in V\}\right| < \left|\{ (V, E\setminus\{e\})[[v]] : v\in V \}\right|$

d.h. durch Löschen von e erhöht sich die Zahl der Zusammenhangskomponenten.

Satz 1.8 (Eulertour): Ein Graph G ist eulersch genau dann wenn er zusammenhängend ist und höchstens 2 Knoten ungeraden Grades besitzt.

Lemma 1.9: Eine Kante ist eine Brücke genau dann wenn sie in keinem Kreis enthalten ist.

Bew.: Übungsaufgabe. □

Korollar 1.10: Ein nichttrivialer Graph G, dessen Knoten alle geraden Grad haben, enthält einen Kreis.

Bew.: Ann. das stimmt nicht, dann sind alle Kanten Brücken $\Rightarrow$ G besteht aus einer Menge von Pfaden ↯. □

Korollar 1.11: Die Kanten eines nichttrivialen Graphen G dessen Knoten alle geraden Grad haben, lassen sich in disjunkte Kreise zerlegen.

Bew.: $E(G) \neq \emptyset$ enthält einen Kreis C, $E(G) \setminus C \neq \emptyset$ ebenso usw. □

Bew. von Satz 1.8:

"$\Rightarrow$" Sei $E = v_0, e_1, v_1, \ldots, v_m$ Eulertour in G, $e_i = v_{i-1}v_i$, $i = 1, \ldots, m$.

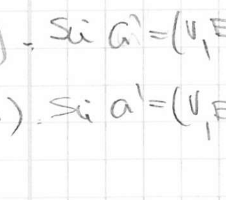
$$|\delta(v)| = |\{e_i, e_{i+1} : v = v_i\}| \equiv 0 \mod 2, \quad v = v_1, \ldots, v_{m-1}.$$

und E verbindet alle Knoten miteinander.

"$\Leftarrow$" G enthält 0 oder 2 Knoten mit ungeradem Grad

1. $\deg(u), \deg(v) \equiv 1 \mod 2 \Rightarrow \exists$ Pfad $P \in \mathcal{P}(u,v)$. Sei $G' = (V, E \setminus P)$
2. $\deg(v) \equiv 0 \mod 2 \ \forall v \in V \Rightarrow \exists$ Kreis $C \subseteq E(G)$. Sei $G' = (V, E \setminus C)$

G' enthält nur Knoten geraden Grades, und alle Zusammenhangskomponenten von G' sind per Induktion eulersch, d.h. enthalten Eulertouren.



Verbinde P bzw. C und diese Eulertouren zu einer Eulertour von G, indem man P bzw. C folgt und jedesmal, wenn man eine Zusammenhangskomponente von G' zum ersten Mal besucht, die zugehörige Eulertour "einschiebt". □

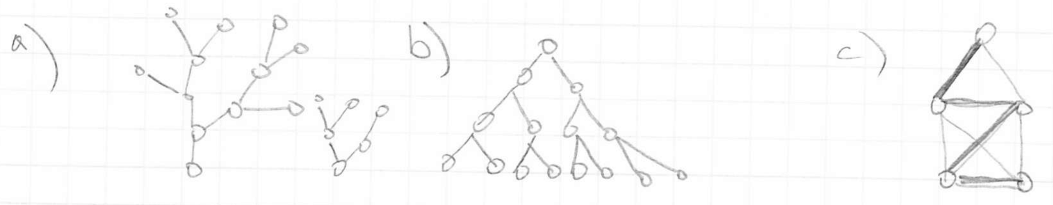
2. Bäume

2.1 Def. (Baum, Wald):

a) Ein Baum ist ein zusammenh. Graph, der keinen Kreis enthält.

b) Ein Wald ist ein Graph, dessen Zusammenhangskomponenten Bäume sind.

2.2 Bsp.:



$\underbrace{\text{Baum} \quad \text{Baum}}_{\text{Wald}}$ "typischer" Suchbaum   aufspannender Baum

2.3 Def. (Aufspannender Baum): Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

T aufspannender Baum (von G) $:\Leftrightarrow T \subseteq G$ Baum, $V(T) = V(G)$.

2.4 Satz: Ein Graph ist zusammenhängend genau dann, wenn er einen aufspannenden Baum enthält.

Bew.: "$\Leftarrow$": Sei T aufspannender Baum von G.

T zusammenh. $\Rightarrow \forall u, v \in V: \exists$ uv-Pfad $P \subseteq T \subseteq G \Rightarrow G$ zus.

"$\Rightarrow$": $G = (V, E)$ ist zusammenhängend.

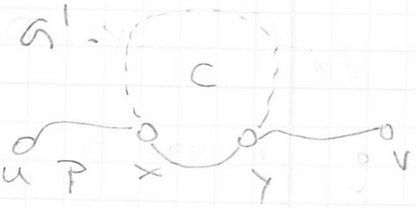
1. Fall: $\nexists$ Kreis $C \subseteq G \Rightarrow G$ ist Baum $\Rightarrow G$ ist aufsp. Baum

2. Fall: $\exists$ Kreis $C \subseteq G$ mit Kante $xy \in E(C)$. Lösche xy, d.h. betrachte $G' := (V, E \setminus \{xy\})$.

Beh.: G' ist zusammenhängend.

Begr.: z.z.: $\forall u, v \in V: \exists$ uv-Pfad $P' \subseteq G'$.

G zus. $\Rightarrow \exists$ uv-Pfad $P \subseteq G$.



α) $xy \notin P \Rightarrow P \subseteq G'$ ✓.

β) $xy \in P \Rightarrow \left(V(P) \cup V(C), \left(E(P) \cup E(C)\right) \setminus \{xy\}\right)$ enthält uv-Pfad P'.

Lösche Kanten aus Kreisen, bis keine Kreise mehr existieren und Fall 1 gilt. $\square$

2.5 (Blatt-) Lemma: Ein Baum mit ≥ 2 Knoten enthält mindestens 2 Blätter.

Bew.: Sei $P = v_1, v_2, \dots, v_n$ ein Pfad max. Länge im Baum T.

Beh.: $\deg(v_1) = \deg(v_n) = 1$, d.h. v_1, v_n sind 2 Blätter von T.

Ann.: $\deg(v_1) \geq 2 \Rightarrow |\Gamma(v_1)| \geq 2 \Rightarrow \exists u \in \Gamma(v_1), u \neq v_2$.

1. Fall: $u \neq v_i$, $i = 1, \dots, n \Rightarrow u, v_1, \dots, v_n$ ist Pfad länger als P ↯

2. Fall: $u = v_i$, $i \in \{3, \dots, n\} \Rightarrow T$ enthält Kreis $v_1, \dots, v_i, u$ ↯ □

2.6 Satz: Ein Baum $G = (V, E)$ hat $|E| = |V| - 1$ Kanten.

Bew.: Induktion nach $|V|$.

Ind. Anf. $|V| = 1$ ✓

Ind. Schritt $n \to n+1$. Sei B Baum mit $|V| = n+1$ Knoten.

Blatt-lemma $\Rightarrow \exists$ Blatt $v \in V$: $\deg(v) = 1$. Lösche v aus B.

Beh.: $B' := (V', E') = (V \setminus \{v\}, E \setminus \delta(v))$ ist ein Baum mit $|V'| = n$.

Bgr.: B' besitzt keinen Kreis und ist wegen $\deg_B(v) = 1$ zus. ✓

Ind.-Ann. $\Rightarrow |E'| = n - 1 \Rightarrow |E| = |E' \cup \{\delta(v)\}| = n$. □

Korollar 2.7: Ein Graph $G = (V, E)$ ist ein Baum genau dann, wenn er zusammenhängend ist und $|V| - 1$ Kanten hat.

Bew.: "$\Rightarrow$": Def 2.1 und Satz 2.6.

"$\Leftarrow$" G zusammenh. $\overset{\text{Satz 2.4}}{\Rightarrow} \exists$ aufsp. Baum $T \subseteq G$

$\Rightarrow |E(G)| \geq |E(T)| = |V(T)| - 1 = |V(G)| - 1$

$\Rightarrow E(G) = E(T) \Rightarrow G = T$. □

Korollar 2.8: Ein Wald G mit t Bäumen enthält $|V(G)| - t$ Kanten

Korollar 2.9: Ein Graph G mit t Zus. komp. enthält mindestens $|V(G)| - t$ Kanten.

Satz 2.10: Für einen Graphen $G=(V,E)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

i) G ist ein Baum.

ii) G ist zusammenhängend und hat $|V|-1$ Kanten

iii) G enthält keinen Kreis "

iv) G ist zusammenhängend und jede Kante ist eine Brücke

v) Für je zwei Knoten u,v existiert genau ein Pfad in G.

vi) G enthält keinen Kreis, und durch Hinzufügen einer beliebigen Kante uv entsteht in $G'=(V, E\cup\{uv\})$ genau ein Kreis.

Bew.: i) $\Leftrightarrow$ ii) Korollar 2.7

ii) $\Rightarrow$ iii): ii) $\Rightarrow$ i) $\Rightarrow$ G enthält keinen Kreis.

iii) $\Rightarrow$ iv): G habe t Komponenten $\overset{G \text{ kreisfrei}}{\Rightarrow}$ Bäume

Sei $uv\in E$, dann ist $G' := (V, E\setminus\{uv\})$ Wald mit t' Bäumen.

$\Rightarrow |V|-t-1 \overset{\text{Kor.2.8}}{=} |E|-1 = |E(G')| \overset{\text{Kor.2.8}}{=} |V|-t'$

$\Rightarrow t' = t+1 \Rightarrow uv$ ist eine Brücke.

$|E| = |V|-t \Rightarrow |V|-1 \Rightarrow t=1 \Rightarrow G$ ist zus.

iv) $\Rightarrow$ v): Ann. $\exists\, u,v\in V$ verbunden durch zwei Pfade $P_1\neq P_2$.

Sei $x\in V$ die erste Ecke, an der P_1 und P_2 sich trennen

Sei $y\in V$ " an der " sich nach x wieder treffen.

Dann bilden die beiden Teilwege $P_1(x,y)$ und $P_2(x,y)$ von x nach y in P_1 und P_2 einen Kreis C

$\overset{\text{Lemma 1.9}}{\Rightarrow}$ Keine Kante in C ist eine Brücke ↯.

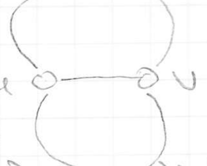
v) $\Rightarrow$ vi): Beh.: G enthält keinen Kreis.

Bgr.: Knoten auf einem Kreis sind durch mind. 2 Pfade verbunden.

Beh.: Durch Hinzufügen einer Kante uv entsteht ein Kreis.

Bgr.: $\exists$ uv-Pfad P in G $\Rightarrow (V(P), E(P)\cup\{uv\})$ ist ein Kreis

Beh.: Es entsteht genau ein Kreis.



Bew.: Ann.: Es entstehen 2 Kreise C_1, C_2,

dann wären $(V(C_1), E(C_1)\setminus\{u,v\})$ und $(V(C_2), E(C_2)\setminus\{u,v\})$

zwei verschiedene uv-Pfade in G ↯.

vi) $\Rightarrow$ i): Ann. G ist nicht zusammenhängend, dann ex.

Knoten u,v in verschiedenen Komponenten von G

$\Rightarrow$ uv Brücke in $G' = (V, E \cup \{uv\})$

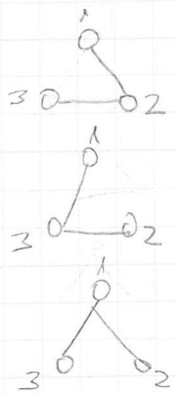
$\Rightarrow$ uv ist nicht in einem Kreis enthalten ↯. $\square$

Frage: Was ist die Anzahl $t(n)$ der aufspannenden Bäume in K_n?

a) $n=1$ $K_1 =$ o o $t(1) = 1$ 1^{-1}

$n=2$ $K_2 =$ o—o o—o $t(2) = 1 = 2^0$

$n=3$ $K_3 =$



$E(T_1) = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{Bmatrix}$ $t(3) = 3 = 3^1$

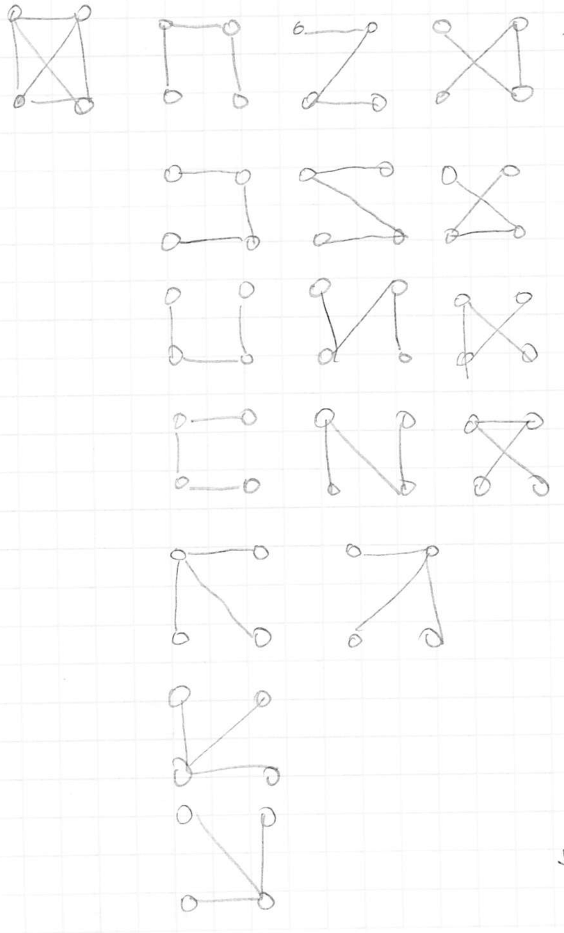
$E(T_2) = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{Bmatrix}$

$E(T_3) = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{Bmatrix}$

verschieden $\not\Rightarrow$ isomorph

verschieden $\Leftrightarrow$ verschiedene Kanten

$n = 4$ $K_4 =$



$t(4) = 16 = 4^2$

Pfade

$n = 5$ $t(5) = 125 = 5^3$ 8