Diskrete Mathematik

1. Graphen

1.1 Def.: Sei M eine Menge und $k \in \mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$ eine natürliche Zahl. Bezeichne

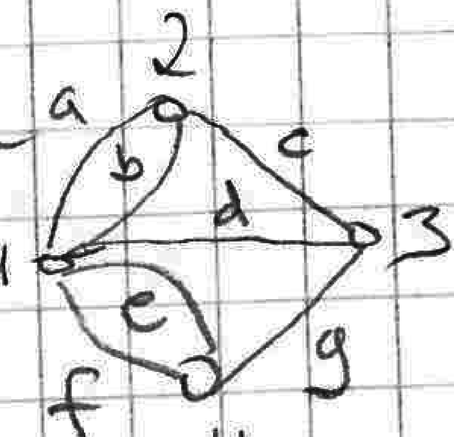
a) $[k] := \{1,2,\dots,k\} \subseteq \mathbb{N}$ die Menge der ersten k natürlichen Zahlen

b) $\binom{M}{k} := \{\{m_1,\dots,m_k\} : m_i \in M,\ i=1,\dots,k\}$ die "Menge der k-elementigen Teilmengen von M"

c) $\left(\binom{M}{k}\right) := \{\{\{m_1,\dots,m_k\}\} : m_i \in M,\ i=1,\dots,k\}$ " " " Multiteilmengen von M (d.h. $m_i = m_j$ für $i \neq j$ ist möglich).

1.2 Def. (Graph):

a) Ein (ungerichteter) Graph ist ein 2-Tupel $G=(V,E)$ aus einer (endlichen) Menge von Knoten und einer Multimenge $E \subseteq \{\{\{u,v\}\} : u,v \in V\}$ von Kanten. Für einen Graphen G bezeichnen $V=V(G)$ seine Knoten und $E=E(G)$ seine Kantenmenge.



$V=\{1,2,3,4\}$
$E=\{a,b,c,d,e,f,g\}$
$e=\{1,4\}$
$f=\{1,4\}$

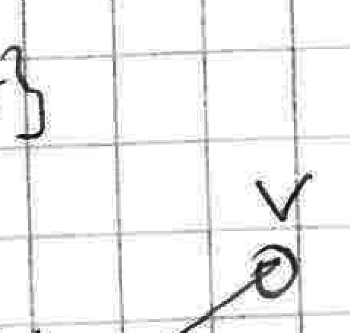
b) Falls "die Bedeutung aus dem Kontext klar ist", schreiben $\{u,v\}$ oder uv anstelle von $\{\{u,v\}\}$ (einschl. $\{u,u\}$ und uu), und $u \in uv$, und wir identifizieren eine Kante mit ihren Endknoten und schreiben $e=uv$.

G heißt nicht trivial, falls $E(G) \neq \emptyset$.

c) $e = uu \in E$ heißt Schlinge oder Schleife.
$e,f \in E$ mit $e \neq f$, $e=uv$, $f=uv$ heißen Mehrfachkanten.
Ein Graph ohne Schleifen und Mehrfachkanten heißt einfach.
Wenn nicht besonders darauf hingewiesen wird, betrachten wir einfache Graphen.

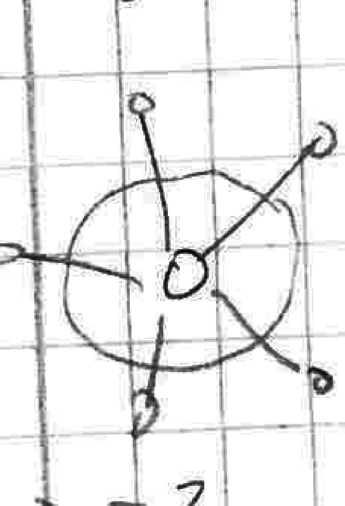
$N(1)=\{2,3,4\}$
$d(1)=5$

d) u,v mit $uv \in E$ heißen benachbart oder adjazent.



$N(u) := \{v \in V : uv \in E\}$ Nachbarschaft von $u \in V$.

e) $uv \in E$ ist inzident zu $u,v \in V$

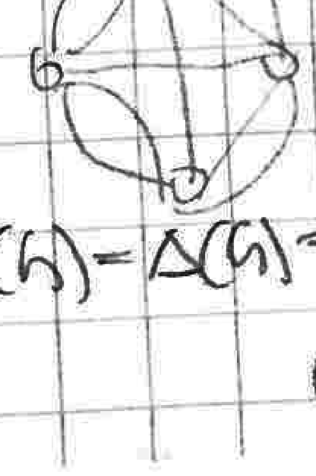


$\delta(u) := \{uv \in E\}$ zu u inzidente Kanten

$d(u) = \deg(u) = |\delta(u)|$ Grad von $u \in V$

$\delta(G)=3$
$\Delta(G)=5$

$u \in V$ mit $d(u)=0$ heißt isolierter Knoten



$u \in V$ mit $d(u)=1$ heißt Blatt.

$\delta(G)=\Delta(G)=5$

→ ① G' heißt (knoten) induzierter Untergraph von G, wenn $E' = E \cap \binom{V'}{2}$.

→ ② d) z.B. schreiben wir Pfade und Kreise auch als Folgen von Knoten, Kanten als alternierende Folgen von Knoten und Kanten, z.B. und schreiben z.B. einen Pfad P als $P = v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n$, $v_i \neq v_j$, $i,j = 0,\dots,n$

$P = v_0, v_1, \dots, v_n$, oder $P = v_0, v_0v_1, v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n, v_n$.

d) $T_n = v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n$, Tour der Länge n ($v_i = v_j$ für $i \neq j$ möglich)

$v_iv_{i+1} \neq v_jv_{j+1}$ $\forall i \neq j$. (mit versch. Kanten)

$T_n = \underline{v_0}v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}\underline{v_0}$ geschlossene Tour der Länge n

$v_iv_{i+1} \neq v_jv_{j+1}$ $\forall i \neq j$ (mit versch. Kanten)

alexander.kremer@fu-berlin.de

$\delta(G) := \min_{u \in V} d(u)$ Minimalgrad von G

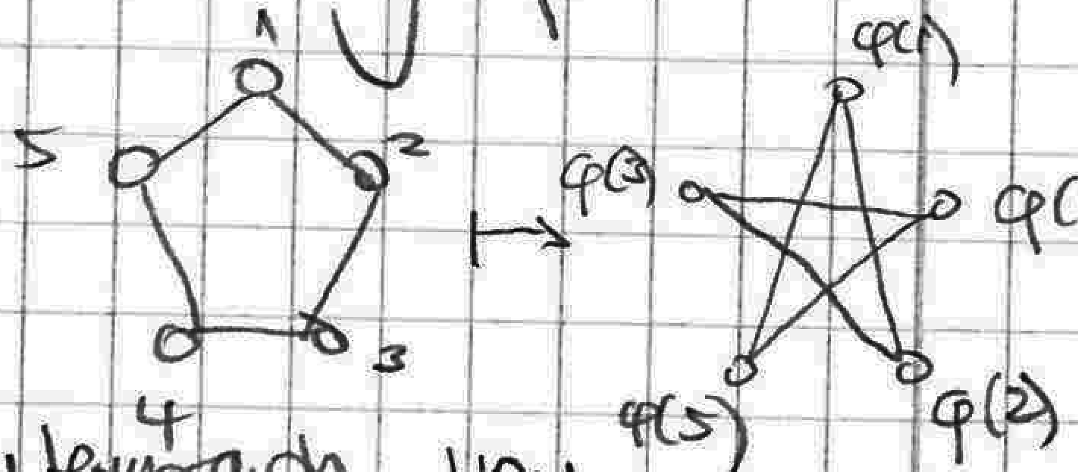
$\Delta(G) := \max_{u \in V} d(u)$ Maximalgrad von G

Ein Graph G mit $\delta(G) = \Delta(G) = k$ heißt k-regulär.

Die 0/1 Matrix $(a_{ve}) \in \{0,1\}^{V \times E}$ mit $a_{ve} = \begin{cases} 1, & v \in e \\ 0, & v \notin e \end{cases}$ heißt Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix von G.

f) Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ sind **isomorph**, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : V \to V'$ gibt, so daß gilt

$uv \in E \iff \varphi(u)\varphi(v) \in E'$.



g) Ein Graph $G' = (V', E')$ ist ein **Untergraph** oder in G **enthalten** von $G = (V, E)$, wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ gilt. Wir schreiben $G' \subseteq G$. G' heißt **(Knoten-) induzierter** Untergraph von G, wenn $E' = E \cap \binom{V'}{2}$ gilt, wir schreiben $G' = G[V']$.

h) Durch eine Funktion $w : E \to \mathbb{R}$ von **Kantengewichten** wird ein Graph **gewichtet**.

i) Analog definiert man die Begriffe für **gerichtete Graphen** oder **Digraphen** (directed graph) $D = (V, A)$ mit **gerichteten Kanten** oder **Bögen** $A \subseteq V \times V$.

Man schreibt

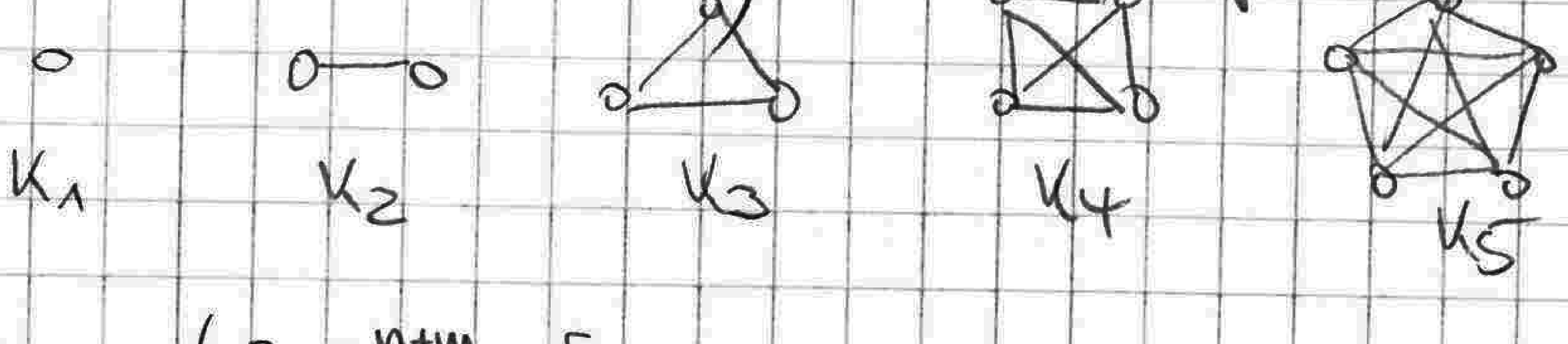
$\delta^+(u) := \delta^{out}(u) := \{uv \in A\}$, $u \in V$

$\delta^-(u) := \delta^{in}(u) := \{vu \in A\}$, $u \in V$

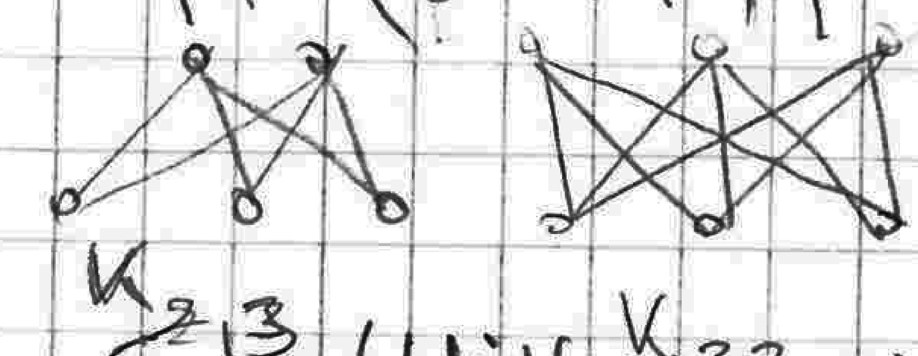
usw.

1.3 Bsp. (von Graphen)

a) $K_n := \left(\{v_i\}_{i=1}^n, \binom{\{v_i\}}{2}\right)$ **vollständiger Graph** auf n Knoten $v_1, \dots, v_n$



b) $K_{n,m} := \left(\{v_i\}_{i=1}^{n+m}, \{v_iv_j : 1 \le i \le n, n+1 \le j \le n+m\}\right)$ **vollständiger bipartiter Graph** auf n und m Knoten



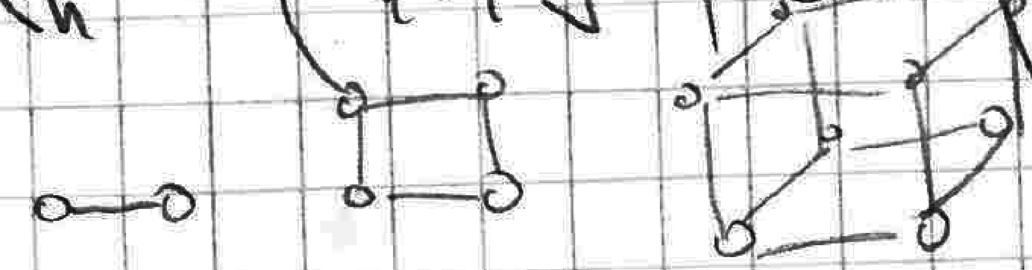
$G = (U \dot\cup V, E)$ mit $E \subseteq \{uv : u \in U, v \in V\}$ **bipartiter Graph**

c) $P_n := \left(\{v_i\}_{i=0}^n, \{v_{i-1}v_i : i = 1, \dots, n\}\right)$ **Weg der Länge** n (Kanten) (mit verschiedenen Knoten) von v_0 nach v_n

d) $C_n := \left(\{v_i\}_{i=1}^n, \{v_iv_{i+1}, i = 1, \dots, n-1\} \cup \{v_nv_1\}\right)$ **Kreis der Länge** n (mit versch. Knoten)

② ←

e) $Q_n = \left(\{0,1\}^n, \left\{ u,v \in \binom{\{0,1\}^n}{2} : |u-v| = e_j \text{ für } j \in [n] \right\} \right)$ e_j: j-ter Einheitsvektor



Q_1 Q_2 Q_3 Hyperwürfel

Satz 1.4: Für jeden einfachen Graphen $G=(V,E)$ gilt:

$$\sum_{u \in V} d(u) = 2|E|.$$

Bew.: Def. Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix $(a_{ve}) \in \{0,1\}^{V \times E}$ durch

$$a_{ve} := \begin{cases} 1, & v \in e \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\sum_{u \in V} d(u) = \sum_{u \in V} \sum_{e \in E} a_{ue} = \sum_{e \in E} \underbrace{\sum_{u \in V} a_{ue}}_{=2} = \sum_{e \in E} 2 = 2|E|. \quad \square$$

Korollar 1.5: In einem einfachen Graphen ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

Def. 1.6 (Zusammenhang): Sei $G=(V,E)$ ein Graph.

a) $\mathcal{P}(u,v) := \{ P \subseteq G : P \text{ Pfad von } u \text{ nach } v \}$
v erreichbar von u $:\Leftrightarrow$

b) $u,v \in V$ zusammenhängend $:\Leftrightarrow \mathcal{P}(u,v) \neq \emptyset$

d) G zusammenhängend $\Leftrightarrow$ u,v zusammenhängend $\forall u,v \in V$

e) Betrachte Äquivalenzrelation
$u \sim v :\Leftrightarrow u,v$ zusammenhängend.
$G[[u]]$ Zusammenhangskomponente von u.

Def 1.7 (Eulertour): Sei G ein (nicht notw. einf.) Graph und $T \subseteq G$ eine Tour in G.
T heißt Eulertour $:\Leftrightarrow E(T) = E(G)$,
d.h. T besucht alle Kanten von G genau einmal.
G ist eulersch $:\Leftrightarrow \exists$ Eulertour $T \subseteq G$.

c) $d(u,v) := \min_{P \in \mathcal{P}(u,v)} |E(P)|$ Abstand von u und v

f) $e \in E$ Brücke in G $:\Leftrightarrow \left| \{ G[[v]] : v \in V \} \right| < \left| \{ (V, E \setminus \{e\})[[v]] : v \in V \} \right|$
d.h. durch Löschen von e erhöht sich die Zahl der Zusammenhangskomponenten.

Satz 1.8 (Eulertour): Ein Graph G ist eulersch genau dann wenn er zusammenhängend ist und höchstens 2 Knoten ungeraden Grades besitzt.

Lemma 1.9: Eine Kante ist eine Brücke genau dann wenn sie in keinem Kreis enthalten ist.

Bew.: Übungsaufgabe □

Korollar 1.10: Ein nichttrivialer Graph G, dessen Knoten alle geraden Grad haben, enthält einen Kreis.

Bew.: Wenn das stimmt nicht, dann sind alle Kanten Brücken $\Rightarrow$ G besteht aus einer Menge von Pfaden ↯. □

Korollar 1.11: Die Kanten eines nichttrivialen Graphen G, dessen Knoten alle geraden Grad haben, lassen sich in disjunkte Kreise zerlegen.

Bew.: $E(G) \neq \emptyset$ enthält einen Kreis C, $E(G) \setminus C \neq \emptyset$ ebenso usw. □

Bew. von Satz 1.8:

"$\Rightarrow$" Sei $E = v_0, e_1, v_1, \ldots, v_m$ Eulertour in G, $e_i = v_{i-1}v_i$, $i = 1, \ldots, m$.

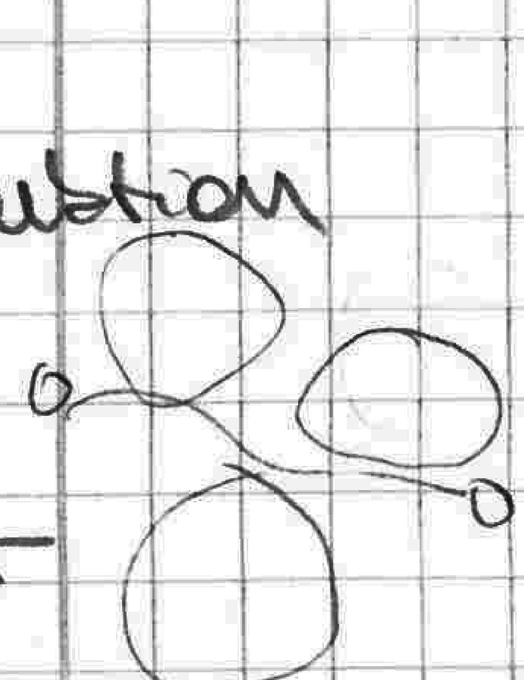
$$|\delta(v)| = |\{e_i, e_{i+1} : v = v_i\}| \equiv 0 \bmod 2, \quad v = v_1, \ldots, v_{m-1}.$$

und E verbindet alle Knoten miteinander.

"$\Leftarrow$" G enthält 0 oder 2 Knoten mit ungeradem Grad

1. $\deg(u), \deg(v) \equiv 1 \bmod 2 \Rightarrow \exists$ Pfad $P \in \mathcal{P}(u,v)$. Sei $G' = (V, E \setminus P)$
2. $\deg(v) \equiv 0 \bmod 2 \ \forall v \in V \Rightarrow \exists$ Kreis $C \subseteq E(G)$. Sei $G' = (V, E \setminus C)$

G' enthält nur Knoten geraden Grades, und alle Zusammenhangskomponenten von G' sind per Induktion eulersch, d.h. enthalten Eulertouren.



Verbinde P bzw. C und diese Eulertouren zu einer Eulertour von G, indem man P bzw. C folgt und jedesmal, wenn man eine Zusammenhangskomponente von G' zum ersten Mal besucht, die zugehörige Eulertour "einschiebt". □

2. Bäume

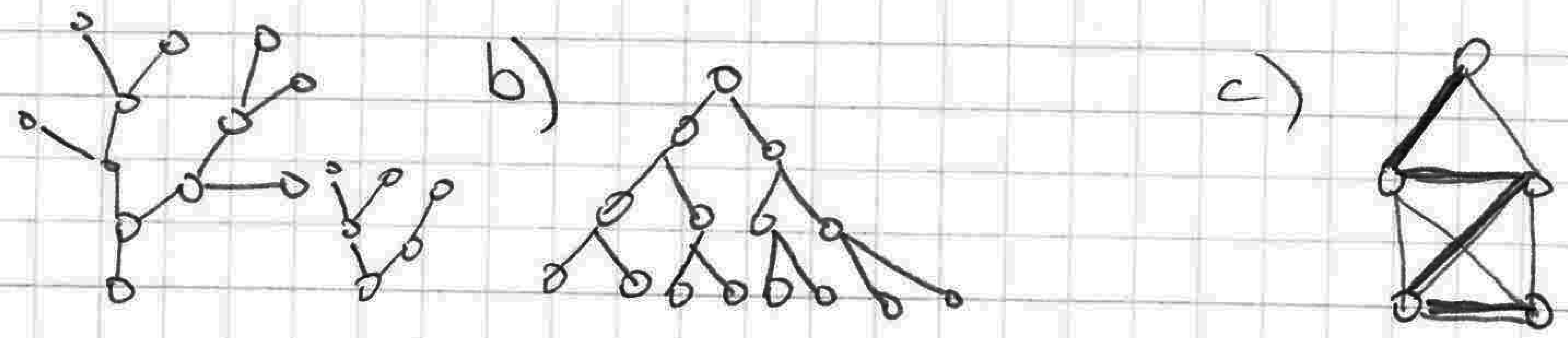
2.1 Def. (Baum, Wald):

a) Ein <u>Baum</u> ist ein zusammenh. Graph, der keinen Kreis enthält.

b) Ein <u>Wald</u> ist ein Graph, dessen Zusammenhangskomponenten Bäume sind.

2.2 Bsp:

a) b) c)



$\underbrace{\text{Baum} \quad \text{Baum}}_{\text{Wald}}$ "typischer" Stadtbaum aufspannender Baum

2.3 Def. (Aufspannender Baum): Sei $G=(V,E)$ ein Graph.

T <u>aufspannender Baum</u> (von G) $:\Leftrightarrow T \subseteq G$ Baum, $V(T) = V(G)$.

2.4 Satz: Ein Graph ist zusammenhängend genau dann, wenn er einen aufspannenden Baum enthält.

Bew.: "$\Leftarrow$": Sei T aufspannender Baum von G.

T zusammenh. $\Rightarrow \forall u,v \in V: \exists$ uv-Pfad $P \subseteq T \subseteq G \Rightarrow G$ zus.

"$\Rightarrow$": $G = (V,E)$ ist zusammenhängend.

1. Fall: $\nexists$ Kreis $C \subseteq G \Rightarrow G$ ist Baum $\Rightarrow G$ ist aufsp. Baum

2. Fall: $\exists$ Kreis $C \subseteq G$ mit Kante $xy \in E(C)$. Lösche xy, d.h. betrachte $G' := (V, E \setminus \{xy\})$.

Beh.: G' ist zusammenhängend.

Begr.: z.z.: $\forall u,v \in V: \exists$ uv-Pfad $P' \subseteq G'$.

G zus. $\Rightarrow \exists$ uv-Pfad $P \subseteq G$.

α) $xy \notin P \Rightarrow P \subseteq G'$ ✓.

β) $xy \in P \Rightarrow \big(V(P) \cup V(C), (E(P) \cup E(C)) \setminus \{xy\}\big)$ enthält uv-Pfad P'.

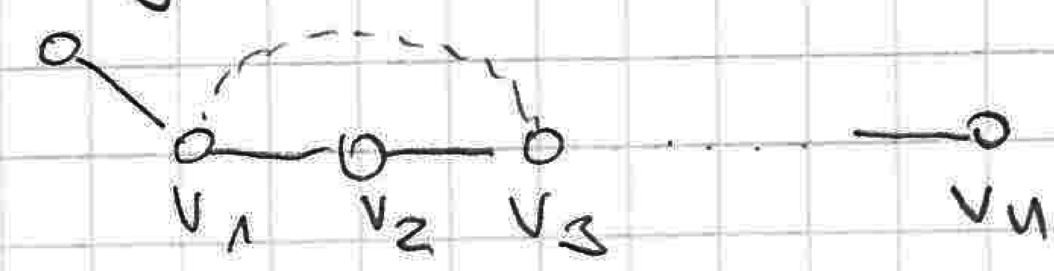
Lösche Kanten aus Kreisen, bis keine Kreise mehr existieren und Fall 1 gilt. $\square$

2.5 (Blatt-) Lemma: Ein Baum mit ≥ 2 Knoten enthält mindestens 2 Blätter.

Bew.: Sei $P = v_1, v_2, \dots, v_n$ ein Pfad max. Länge im Baum T.

Beh.: $\deg(v_1) = \deg(v_n) = 1$, d.h. v_1, v_n sind 2 Blätter von T.

Ann.: $\deg(v_1) \geq 2 \Rightarrow |\Gamma(v_1)| \geq 2 \Rightarrow \exists\, u \in \Gamma(v_1),\ u \neq v_2$.



1. Fall: $u \neq v_i,\ i = 1, \dots, n \Rightarrow u, v_1, \dots, v_n$ ist Pfad länger als P ↯

2. Fall: $u = v_i,\ i \in \{3, \dots, n\} \Rightarrow T$ enthält Kreis $v_1, \dots, v_i, u$ ↯ □

2.6 Satz: Ein Baum $G = (V, E)$ hat $|E| = |V| - 1$ Kanten.

Bew.: Induktion nach $|V|$.

Ind.Anf.: $|V| = 1$ ✓

Ind.Schritt $n \to n+1$: Sei B Baum mit $|V| = n+1$ Knoten.

$\overset{\text{Blatt-lemma}}{\Rightarrow}$ $\exists$ Blatt $v \in V$: $\deg(v) = 1$. Lösche v aus B.

Beh.: $B' := (V', E') = (V \setminus \{v\}, E \setminus \delta(v))$ ist ein Baum mit $|V'| = n$.

Bgr.: B' besitzt keinen Kreis und ist wegen $\deg_B(v) = 1$ zus. ✓

$\overset{\text{Ind.Ann}}{\Rightarrow}$ $|E'| = n-1 \Rightarrow |E| = |E' \cup \{\delta(v)\}| = n$. □

Korollar 2.7: Ein Graph $G = (V, E)$ ist ein Baum genau dann, wenn er zusammenhängend ist und $|V| - 1$ Kanten hat.

Bew.: "$\Rightarrow$": Def 2.1 und Satz 2.6.

"$\Leftarrow$" G zusammenh. $\overset{\text{Satz 2.4}}{\Rightarrow}$ $\exists$ aufsp. Baum $T \subseteq G$

$\Rightarrow |E(G)| \geq |E(T)| = |V(T)| - 1 = |V(G)| - 1$

$\Rightarrow E(G) = E(T) \Rightarrow G = T$. □

Korollar 2.8: Ein Wald G mit t Bäumen enthält $|V(G)| - t$ Kanten.

Korollar 2.9: Ein Graph G mit t Zus.komp. enthält mindestens $|V(G)| - t$ Kanten.

Satz 2.10: Für einen Graphen $G=(V,E)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

i) G ist ein Baum.

ii) G ist zusammenhängend und hat $|V|-1$ Kanten

iii) G enthält keinen Kreis " "

iv) G ist zusammenhängend und jede Kante ist eine Brücke

v) Für je zwei Knoten u,v existiert genau ein Pfad in G.

vi) G enthält keinen Kreis, und durch Hinzufügen einer beliebigen Kante uv entsteht in $G'=(V, E\cup\{uv\})$ genau ein Kreis.

Bew.: i) $\Leftrightarrow$ ii) Korollar 2.7

ii) $\Rightarrow$ iii): ii) $\Rightarrow$ i) $\Rightarrow$ G enthält keinen Kreis.

iii) $\Rightarrow$ iv): G habe t Komponenten $\Rightarrow$ Bäume (G kreisfrei)

Sei $uv\in E$, dann ist $G' := (V, E\setminus\{uv\})$ Wald mit t' Bäumen.

$\Rightarrow |V|-t-1 \overset{\text{Kor. 2.8}}{=} |E|-1 = |E(G')| \overset{\text{Kor. 2.8}}{=} |V|-t'$

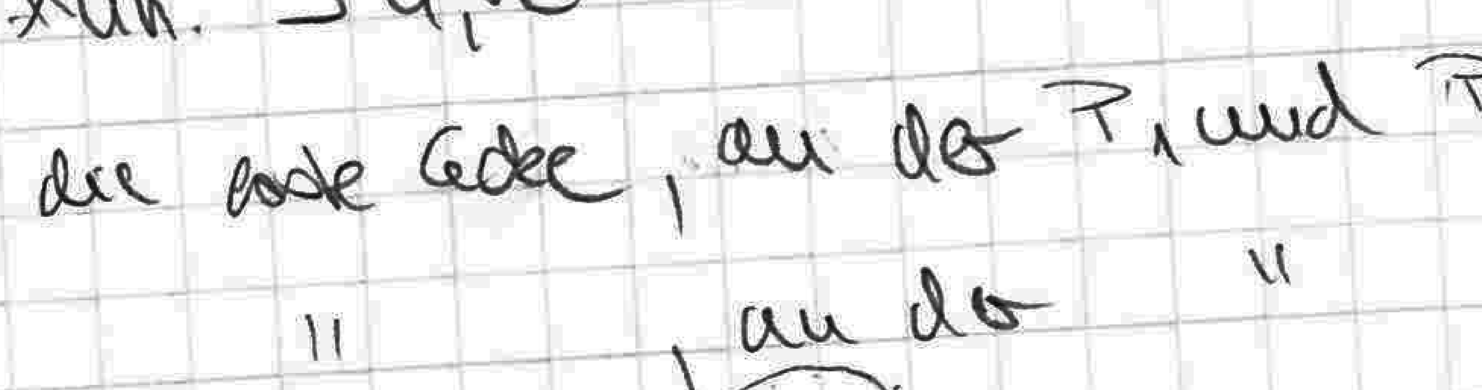
$\Rightarrow t' = t+1 \Rightarrow uv$ ist eine Brücke.

$|E| = |V|-t \Rightarrow |V|-1 \Rightarrow t=1 \Rightarrow G$ ist zus.

iv) $\Rightarrow$ v): Ann. $\exists\, u,v\in V$ verbunden durch zwei Pfade $P_1 \neq P_2$.

Sei $x\in V$ die letzte Ecke, an der P_1 und P_2 sich trennen

Sei $y\in V$ " an der " sich nach x wieder treffen.



Dann bilden die beiden Teilwege $P_1(x,y)$ und $P_2(x,y)$, von x nach y in P_1 und P_2 einen Kreis C

$\overset{\text{Lemma 1.9}}{\Rightarrow}$ Keine Kante in C ist eine Brücke ↯.

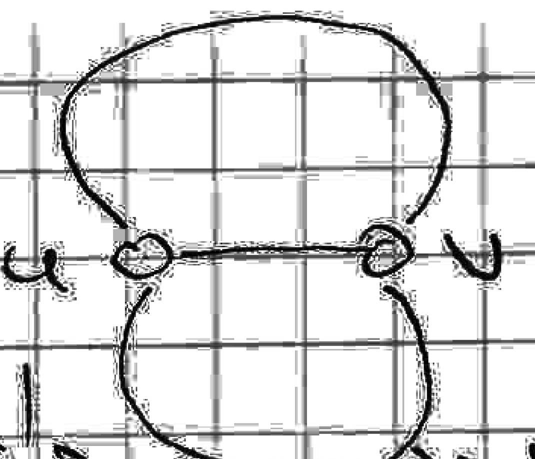
v) $\Rightarrow$ vi): Beh.: G enthält keinen Kreis.

Begr. Knoten auf einem Kreis sind durch mind. 2 Pfade verbunden.

Beh.: Durch Hinzufügen einer Kante uv entsteht ein Kreis.

Begr.: $\exists$ uv-Pfad P in G $\Rightarrow (V(P), E(P)\cup\{uv\})$ ist ein Kreis

Beh.: Es existiert genau ein Kreis.



Bew.: Ann.: Es existieren 2 Kreise C_1, C_2

dann wären $(V(C_1), E(C_1)\setminus\{u,v\})$ und $(V(C_2), E(C_2)\setminus\{u,v\})$

zwei verschiedene u-v-Pfade in G ↯.

vi) ⇒ i): Ann. G ist nicht zusammenhängend, dann ex.

Knoten u, v in verschiedenen Komponenten von G

⇒ uv Brücke in $G' = (V, E \cup \{uv\})$

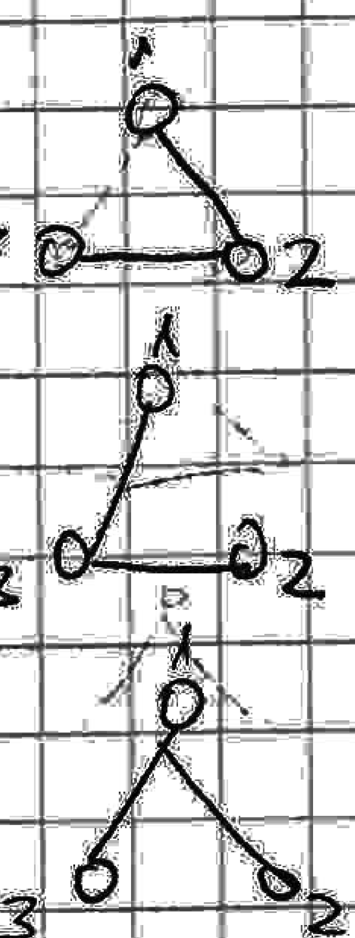
⇒ uv ist nicht in einem Kreis enthalten ↯. □

Frage: Was ist die Anzahl $t(n)$ der aufspannenden Bäume in K_n?

a) $n=1$ $K_1 =$ o   o $= 1$ $t(1) = 1$ 1^{-1}

$n=2$ $K_2 =$ o—o   o—o $t(2) = 1 = 2^0$

$n=3$ $K_3 =$ 



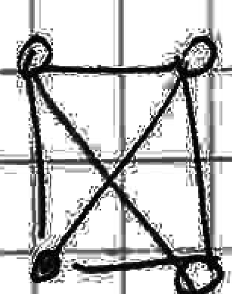
$E(T_1) = \{12, 23\}$ $t(3) = 3 = 3^1$

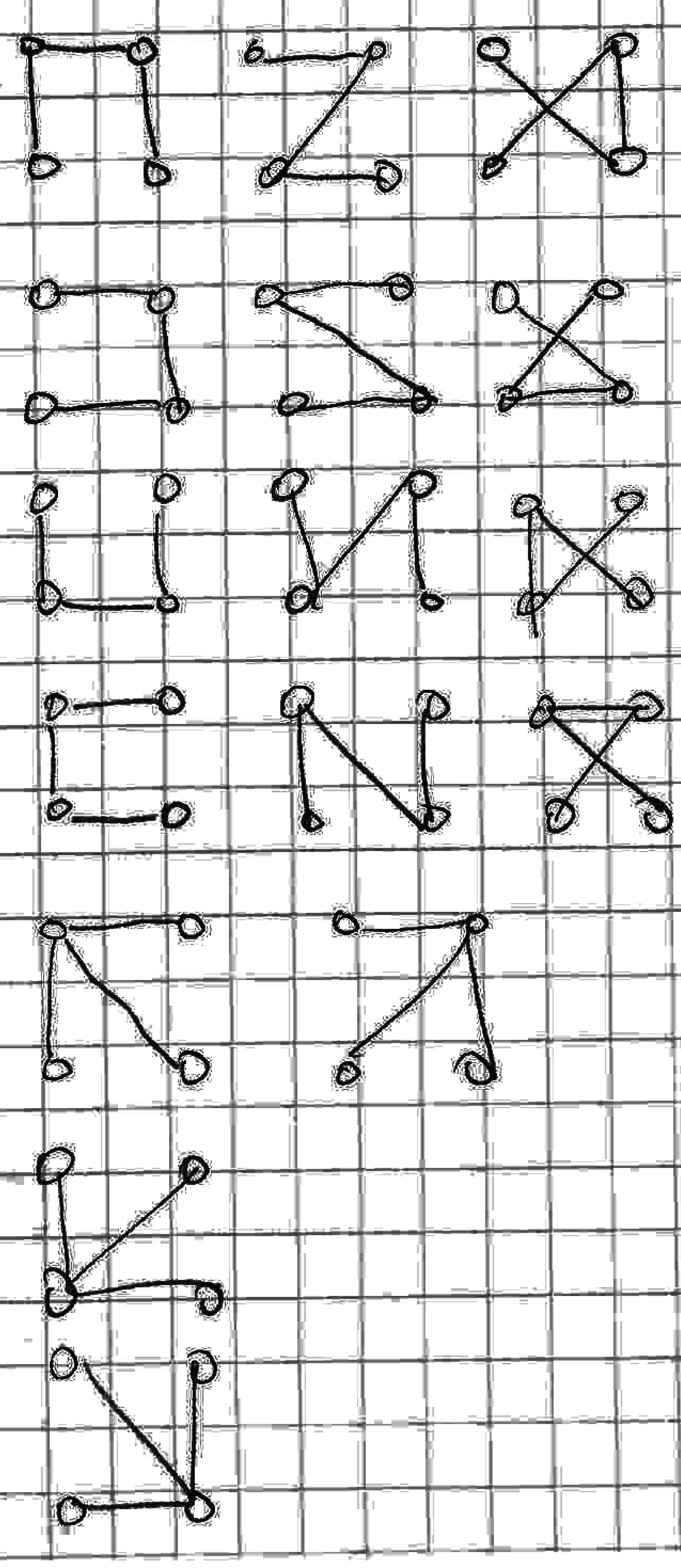
$E(T_2) = \{13, 23\}$

$E(T_3) = \{12, 13\}$

verschieden ≠ isomorph

verschieden ⇔ verschiedene Kanten

$n=4$ $K_4 =$ 



Pfade

$t(4) = 16 = 4^2$

$n=5$ $t(5) = 125 = 5^3$

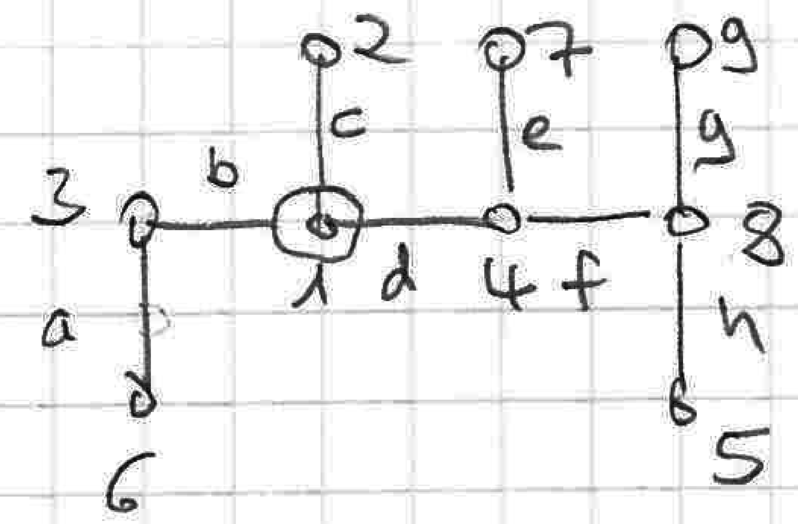
8

Satz 2.11 (Cayley [1889]): K_n enthält $t(n) := n^{n-2}$ verschiedene aufspannende Bäume, $n \in \mathbb{N}$.

Bem. 2.12: $T=(V,E)$, $T'=(V,E')$ verschieden $\Leftrightarrow E \neq E'$.

Verschiedene Bäume können isomorph sein.

Bsp 2.13: Darstellungs- oder Speicherungsarten für Graphen



a) Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix

$$(a_{ve}) = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & & \\ & & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & \end{array}\right) \end{array}$$

$\rightarrow$ Platzbedarf $O(|V||E|)$

Optimierungsmodelle

b) Knoten-Knoten-Adjazenzmatrix

$$(a_{uv}) = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccccc} & 1 & 1 & 1 & & & & & \\ 1 & & & & & & & & \\ 1 & & & & & 1 & & & \\ 1 & & & & & & 1 & & 1 \\ & & & & & & & 1 & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & 1 \\ & & & 1 & & & & 1 & \end{array}\right) \end{array}$$

$O(|V|^2)$, $uv \in E$ in $O(1)$

c) Kantenliste

1	1	1	3	4	4	5	8
2	3	4	6	7	8	8	9

$O(|E|)$, "Sparse"

a–c) nutzen nicht Baumstruktur aus

d) Vorgängerliste: Vorgänger auf dem Weg zur Wurzel

Wurzel 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	1	1	8	3	4	4	8

$\underbrace{\hphantom{1\ 1\ 1\ 8\ 3\ 4\ 4\ 8}}_{|V|-1 \text{ Elemente}}$

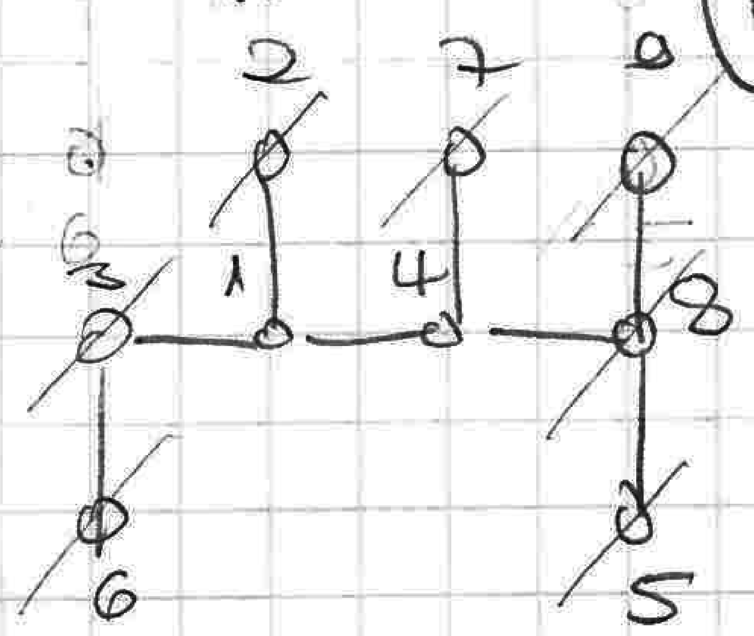
Frag: Ist Vorgängerliste: $\{\text{aufsp. Bäume} \subseteq K_n\} \to [n]^{n-1}$ bijektiv?

Dann wäre $t(n) = n^{n-1}$?

Nein, denn $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1, & 1, & 1, & 8, & 3, & 4, & 9, & 8 \end{pmatrix} \in [9]^8$ Kreis!

beschreibt keinen Baum.

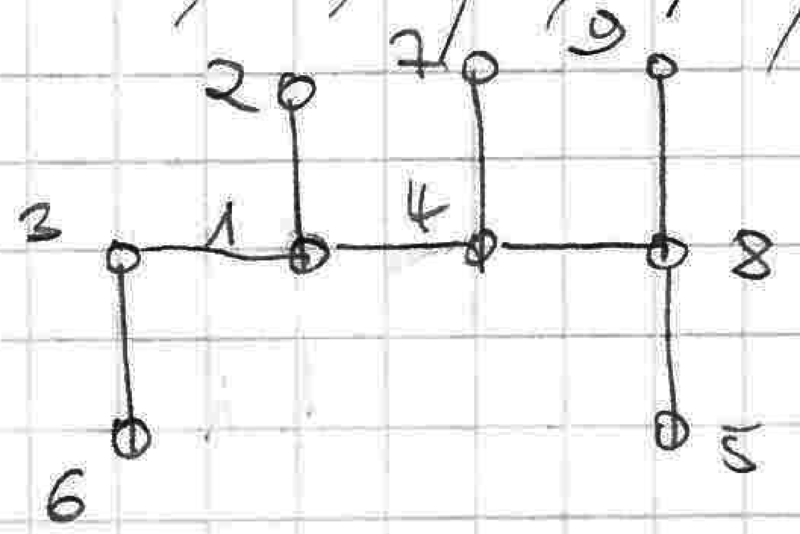
e) Prüfercode (Prüfer [1918]): Vorgänger des Blatts mit minimalem Index und $\neq$ der Wurzel auf dem Weg zur Wurzel

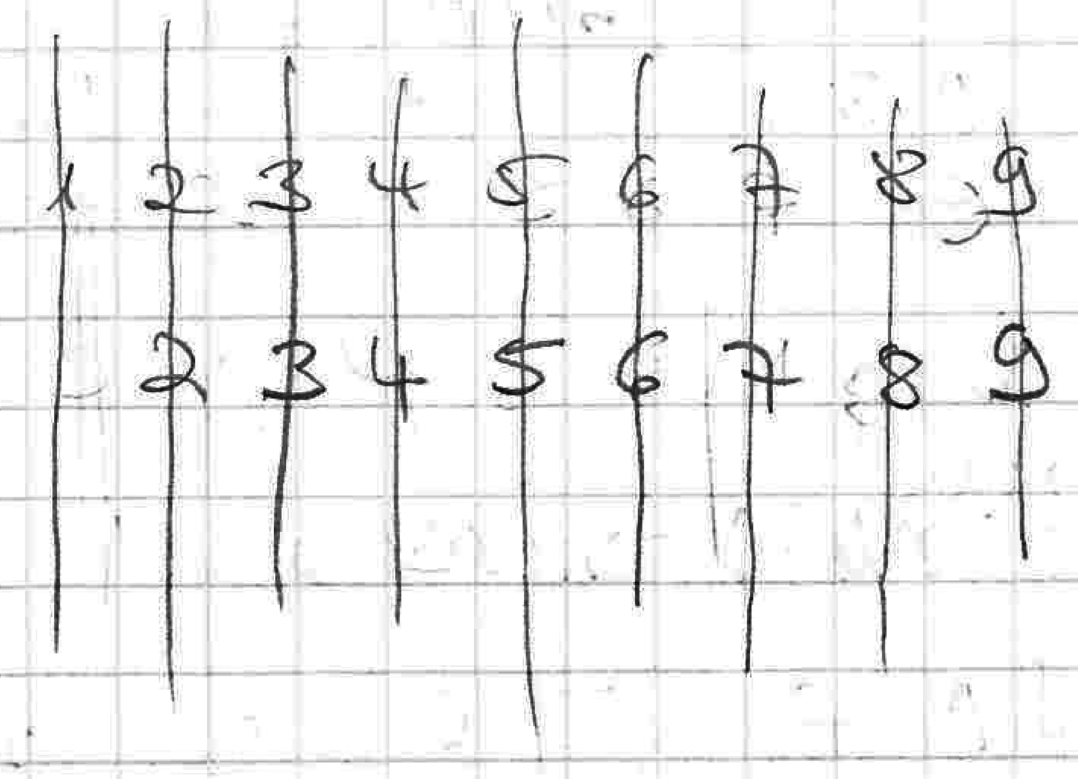


i	1	2	3	4	5	6	7	8
v	2	5	6	3	7	9	8	4
u	1	8	3	1	4	8	4	1

$\underbrace{1\ 8\ 3\ 1\ 4\ 8\ 4}_{\text{Prüfercode}}$ $\underbrace{1}_{\text{überflüssig}}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8
v	2	5	6	3	7	9	8	4
u	1	8	3	1	4	8	4	1





Vermutung: Prüfercode: $\{\text{aufsp. Bäume} \subseteq K_n\} \to [n]^{n-2}$ bijektiv

$\Rightarrow |\{\text{aufsp. Bäume in } K_n\}| = |[n]^{n-2}| = n^{n-2}$

"Gleichheitsregel" oder "Identitätsprinzip".

Alg 2.13 (Prüfer codierung):

Input: Baum $T = (V = [n], E \subseteq \binom{[n]}{2})$ (mit Wurzel 1)

Output: $u(T) := (u_1, \ldots, u_{n-2})(T) \in [n]^{n-2}$

for $i = 1$ to $n-2$ {

$v_i \leftarrow \min\{v \in V \setminus \{1\} : \deg(v) = 1\}$

$u_i \leftarrow u$ mit $uv_i \in E$

$V \leftarrow V \setminus \{v_i\}$, $E \leftarrow E \setminus \{uv_i\}$

}

Lemma 2.14: Sei $T = ([n], E)$ ein Baum mit Prüfercode $u(T)$.

a) $|\{i : u_i = v\}| = \deg(v) - 1 \quad \forall v \in V$

b) $u_i \neq v,\ i = 1, \dots, n-2 \iff v$ ist ein Blatt

Bew.: a) $|\{i : u_i = v\}| = |\{i : u_i v_i \in E\}| \leq \deg(v) + 1$

Außerdem gilt:

Kante wird entfernt
aber u_i verbleibt in T
d.h. es ex. eine weitere Kante

$$\sum_{v \in V \setminus \{1\}} |\{i : u_i = v\}| = n - 2$$

$$\|$$

$$\sum_{v \in V} |\{i : u_i = v\}| \leq \sum_{v \in V} \left[\deg(v) - 1\right] = 2\underbrace{|E|}_{=(n-1)} - n = n - 2$$

$$\Rightarrow |\{i : u_i = v\}| = \deg(v) + 1.$$ □

Alg. 2.15 (Prüferdecodierung):

Input: $u \in [n]^{n-2},\ n \in \mathbb{N}$

Output: $E = \{u_i v_i,\ i = 1, \dots, n-1\}$, $T(u) = ([n], E)$

1. $E \leftarrow \emptyset$
2. for $i = 1$ to $n-1$ {
3. $\quad w_i \leftarrow \min\{v \in V : v \notin \{w_1, \dots, w_{i-1}, u_i, \dots, u_{n-2}, 1\}\}$
4. $\quad E \leftarrow E \cup \{u_i w_i\}$
5. }

Satz 2.16: Sei $\mathcal{T}_n = \{T \subseteq K_n$ aufsp. Baum$\}$.
Dann ist $T(u(T)) = T \quad \forall T \in \mathcal{T}_n$, d.h.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}_n \arrow[r, bend left, "u"] & {[n]^{n-2}} \arrow[l, bend left, "T"] \end{tikzcd}$$

u und T sind invers zueinander und insbesondere bijektiv.

Bew. (von Satz 2.11): $|\mathcal{T}_n| \overset{\text{Satz 2.16}}{\underset{\text{Identitätsprinzip}}{=}} |[n]^{n-2}| = n^{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}.$

16.04.13

Bew. (von Satz 2.16): Induktion über n.

$n = 1$ ✓

$n = 2$ ✓

$n \to n+1$: Sei $T = ([n], E)$, $u = (u_1, \dots, u_{n-2}) = u(T)$,

$B = \{v \in V : \deg(v) = 1\}$ Blätter von T

$U = \{u_1, \dots, u_{n-2}\}$

Dann gilt:

$v_1 = \min \{ v \in V \setminus \{1\} : \deg(v) = 1 \}$ (Alg. 2.13.2)

$u_1 = u$ mit $uv_1 \in E$ (Alg. 2.13.3)

Es ist
$$\begin{matrix} & \mathcal{B} & & & \\ & \Downarrow & & & \\ & v_1 & v_2 & v_3 & & v_{n-2} \\ u = & u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_{n-2} \end{matrix}$$

$v_1 = \min \mathcal{B}$, $\mathcal{B} = \{ v \in [n] : v \notin u, v \neq 1 \}$

$\Rightarrow w_1 = \min \{ v \in V : v \notin \underbrace{\{ w_1, \dots, w_{i-1}, u_i, \dots, u_{n-2}, 1 \}}_{= u \cup \{1\}} \}$

$= v_1$

Setze $T' = ([n] \setminus \{v_1\}, E \setminus \{u_1 v_1\})$. Dann ist

$u(T') = (u_2, \dots, u_{n-2})$ ~~und die~~

Ind. Ann. für $[n] \setminus \{v_1\} \cong [n-1]$

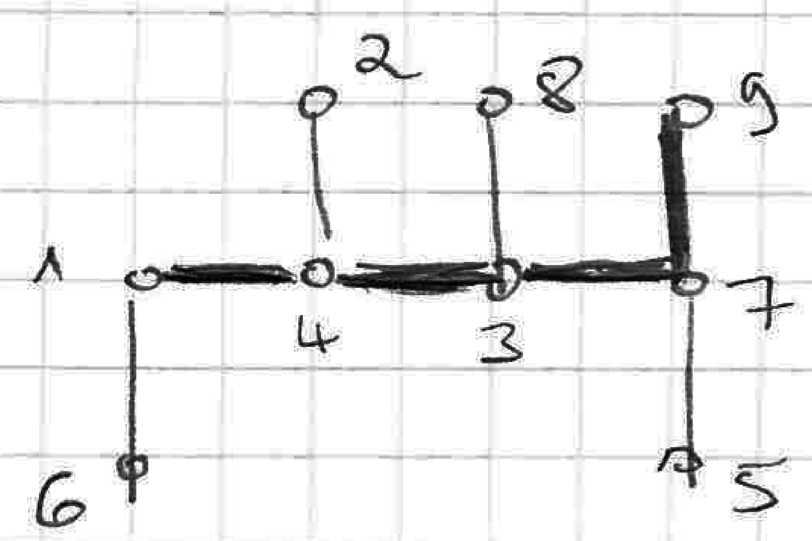
$\Rightarrow T(u(T')) = T'$

$\overset{v_1 = w_1}{\Rightarrow} T(u(T)) = T$. $\square$

$u_1 v_1 = u_1 w_1$

Bsp 2.13 (Fortsetzung):

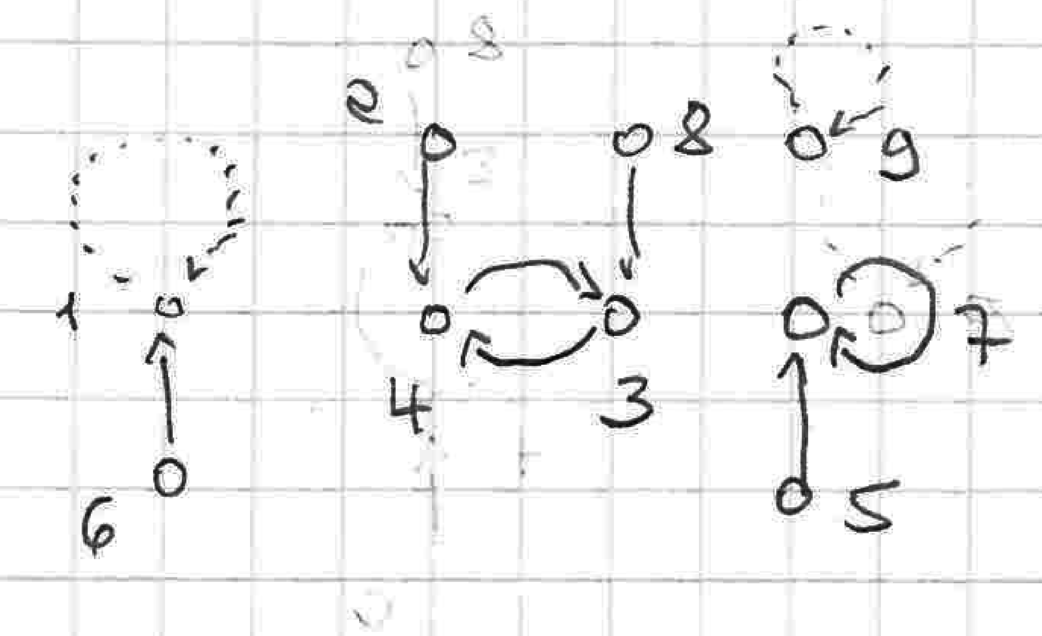
f) Digraph: Kreise des 1n-Pfades (aufgefasst als Permutation) + Vorgänger auf dem Weg vom 1n-Pfad



$$\underbrace{P}_{\text{"Rückgrat"}} = \begin{array}{c|ccc|c} 1 & 3 & 4 & 7 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 3 & 7 & 9 \end{array} \quad \text{sortieren}$$

Permutation der Zahlen 3, 4, 7

Permutation der Zahlen 1, 3, 4, 7, 9



$$\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 4 & 3 & 7 & 1 & 7 & 3 & 9 \end{array}$$

$f = f(T)$ $\qquad f(T): \{2, \dots, n-1\} \to [n]$

Beh.: $\mathcal{T}_n \rightleftarrows \{\{2, \dots, n-1\} \to [n]\}$ bijektiv.

$T(f) = f^{-1}$

Alg. 2.17: $T(f)$

Input: $f: \{2, \dots, n-1\} \to [n]$

Output: $T = T(f) \in \mathcal{T}_n$

0. $f(1) \leftarrow 1$, $f(n) \leftarrow n$
1. Konstruiere Digraph $D(f) \leftarrow ([n], \{(v, f(v)) : v \in [n]\})$
2. Bestimme gerichtete Kreise $C_1, \dots, C_k$ in $D(f)$
3. Sortiere $U = \bigcup_{i=1}^{k} V(C_i) = \{u_1, \dots, u_r\}$, $u_1 \leq \dots \leq u_r$
4. Setze $E' \leftarrow \{\{f(u_i), f(u_{i+1})\}, i = 1, \dots, r-1\}$
   $E'' \leftarrow \{\{v, f(v)\} : v \notin U\}$
5. $T \leftarrow (V, E' \cup E'')$.

Lemma 2.18: Alg. 2.17 ist korrekt (konstruiert einen aufsp. Baum)

a) Betrachte Komponenten D_i, $i = 1, \dots, k$, von $D(f)$.

Beh.: D_i enthält genau einen gerichteten Kreis C_i (inkl. $(\{1\}, \{11\})$ und $(\{n\}, \{nn\})$)

Begr.: $A(D(f)) = \{(v, f(v)) : v = 1, \dots, n\}$, d.h. $\delta^+(v) = 1 \ \forall v \in V$, d.h. jeder Knoten hat genau einen Nachfolger. Sei $V' \leftarrow V$ und entferne rekursiv Knoten ohne Vorgänger aus V', d.h. $v \in V$ mit $\delta^-(v) = 0$, bis

$$|\delta^+(v)| = 1, \; |\delta^-(v)| \geq 1 \quad \forall v \in V'$$

$$\Rightarrow |\delta^+(v)| = |\delta^-(v)| = 1 \quad \forall v \in V'$$

und $D(f)[V']$ ist eine Menge disjunkter gerichteter Kreise $C_1, \dots, C_k$, an denen gerichtete Bäume $D(f)[V \setminus V']$ "hängen".

Insbesondere ist o.B.d.A. $C_1 = (\{1\}, \{11\})$ und $C_k = (\{n\}, \{nn\})$.

b) und $U = V'$.

b) $P = f(u_1) f(u_2), \dots, f(u_{r-1}) f(u_r)$ ist ein $1n$-Pfad.

$\sigma: U \to U, \; u_i \to f(u_i)$ ist eine Permutation.

c) T ist ein entsp. Baum des K_n ✓ □

Alg. 2.19: $f(T)$

Input: Baum $T = ([n], E) \in \mathcal{T}_n$

Output: $f = f(T): \{2, \dots, n-1\} \to [n]$

1. $P = v_1, \dots, v_r$ $1n$-Pfad in T, $v_1 = 1$, $v_r = n$

$$\begin{array}{c|c|c} 1 = u_1 & \dots & u_r = n \\ v_1 & \dots & v_r = n \end{array}$$

2. Sortiere $W = \{v_1, \dots, v_r\} = \{w_1, \dots, w_r\}$, $1 = w_1 \leq \dots \leq w_r = n$

3. $f(v) = \begin{cases} v_i, & v = w_i, \; i = 2, \dots, r-1 \\ \text{Vorgänger auf dem Pfad von } W \text{ nach } v, & v \notin W \end{cases}$

Prop. 2.20: $f(T(f)) = f \quad \forall f: \{2, \dots, n-1\} \to [n]$.

Bew.: Wir erhalten $W = U$ und $f(u_i) = f(w_i) = v_i$, $i = 1, \dots, r$. □

Bew. von Satz 2.11 (2. Version):

$$|\{f: \{2, \dots, n-1\} \to [n]\}| = n^{n-2}.$$ □

Satz 2.21 Die Anzahl an aufspannenden Bäumen des K_n mit Knotengraden $d_1, \dots, d_n$ ist

$$t(n, d_1, \dots, d_n) = \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n} (d_i - 1)!} . \qquad (-1! := 1)$$

Bew.: Induktion über n.

Ind.-Anf.: $n = 1$: $t(1,0) = 1 = \frac{-1!}{-1!} = 1$.

$n = 2$: $t(2,1,1) = 1 = \frac{0!}{0!\,0!} = 1$.

Ind.-Schritt $n-1 \to n > 2$: $\sum_{i=1}^{n} \underbrace{d_i}_{n \text{ Zahlen} \geq 0} = 2n-2$

$\Rightarrow \exists i \in [n] : d_i = 1$. Sei o.B.d.A. $d_n = 1$.

Sei $T(n, d_1, \dots, d_n) = \{ T \subseteq K_n \text{ aufsp. Baum} : \deg(i) = d_i \}$

und $T(n, d_1, \dots, \underset{1}{\underset{\parallel}{d_n}}, j) = \{ T \in T(n, d_1, \dots, d_n) : \Gamma(n) = \{j\} \}$, $j = 1, \dots, n-1$

$\Rightarrow T(n, d_1, \dots, \underset{1}{\underset{\parallel}{d_n}}) = \bigcup_{j=1}^{n-1} T(n, d_1, \dots, \underset{1}{\underset{\parallel}{d_n}}, j)$

Lösche n und jn:

Sei $T'(n, d_1, \dots, \underset{1}{\underset{\parallel}{d_n}}, j) = \{ (V(T) \setminus \{n\}, E(T) \setminus \{jn\}) : T \in T(n, d_1, \dots, d_n, j) \}$

$= T(n-1, d_1, \dots, d_j - 1, \dots, d_{n-1})$

$$\Rightarrow |T'(n, d_1, \dots, d_n, j)| = |T(n-1, d_1, \dots, d_j - 1, \dots, d_{n-1})| \overset{\text{Ind.-Ann.}}{=} \frac{(n-3)!\,(d_j - 1)}{\prod_{i=1}^{n-1} (d_i - 1)!}$$

auch für $d_j = 1$

$$\Rightarrow T(n, d_1, \dots, d_n) = \sum_{j=1}^{n-1} |T'(n, d_1, \dots, d_n, j)|$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-3)!\,(d_j - 1)}{\prod_{i=1}^{n-1} (d_i - 1)!} \qquad \left(\sum_{j=1}^{n-1} (d_j - 1) = 2n - 3 - (n-1) = n-2 \right)$$

$$= \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n} (d_i - 1)!} \qquad \square$$

22.04.13

Bew. von Satz 2.11 (3. Version):

$$t(n) = \sum_{\substack{d_1, \dots, d_n \geq 1 \\ \sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2}} \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n} (d_i - 1)!}$$

$$= \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} k_i = n-2}} \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n} k_i!} \overset{\text{Kor. 3.10}}{=} (1 + \dots + 1)^{n-2} = n^{n-2} \qquad \square$$

3. Binomial- und Multinomialkoeffizienten

3.1 Def. (Binomialkoeffizient): Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$.

$$\binom{n}{k} := \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (n-i)}{\prod_{i=1}^{k} i} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$ Binomialkoeffizient k aus n

3.2 Prop. (Einfache Eigenschaften von Binomialkoeffizienten):

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $n, k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$

b) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$, $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$.

Bew.: Nachrechnen. □

3.3 Bem. (Pascalsches Dreieck): Aus b) ergibt sich

$$\begin{array}{lccccccc}
n=0 & & & & \binom{0}{0} & & & \\
n=1 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
n=2 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
n=3 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}$$

als Berechnungsmöglichkeit für Binomialkoeffizienten.

3.4 Satz (Kombinatorische Bedeutung der Binomialkoeffizienten).

Sei M eine endliche Menge mit $|M| = n$ Elementen, $k \in \{0, \ldots, n\}$.

Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von M ist

$$\left|\binom{M}{k}\right| = \binom{|M|}{k}.$$

Bew.: Sei

$$\begin{bmatrix} M \\ k \end{bmatrix} := \{ (m_1, \ldots, m_k) \in M^k : m_i \neq m_j,\ i \neq j \}$$

die Menge der geordneten k-Tupel von verschiedenen Elementen aus M. Dann ist

$$\left|\begin{bmatrix} M \\ k \end{bmatrix}\right| = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = k!\,\left|\binom{M}{k}\right|$$

denn für jede k-Teilmenge $K \in \binom{M}{k}$ gibt es $k!$ Anordnungen. □

3.5 (Binomischer) Satz:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad x,y \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Bew.:

$$(x+y)^n = \overset{1}{(\underset{x_1}{x}+\underset{y_1}{y})}\overset{2}{(\underset{x_2}{x}+\underset{y_2}{y})}\cdot\ldots\cdot\overset{n}{(\underset{x_n}{x}+\underset{y_n}{y})}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underset{\uparrow}{x^k} y^{n-k} \qquad \square$$

Auswählen von k aus n X-Variablen

3.6 Korollar:

a) $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$

b) $(-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots = 0.$

3.7 Def. (Multinomial- oder Polynomialkoeffizient):

Seien $n, k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}_0$, $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$.

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} := \frac{n!}{\prod_{i=1}^{r} k_i!}$$

Multinomial- oder Polynomialkoeffizient $k_1, \ldots, k_r$ aus n.

3.8 Satz (Kombinatorische Bedeutung des Multinomialkoeffizienten). Sei M eine endliche Menge mit $|M| = n$ Elementen, $k_1, \ldots, k_r \in \{0, \ldots, n\}$, $k_1 + \ldots + k_r = n$.
Die Anzahl der Partitionen von M in r Teilmengen $M = \dot{\bigcup}_{i=1}^{r} M_i$ mit $|M_i| = k_i$, $i = 1, \ldots, r$, ist $\binom{|M|}{k_1, \ldots, k_r}$.

Bew.: Betrachte die Menge der Permutationen von M

$$\begin{bmatrix} M \\ n \end{bmatrix} = \{(m_1, \ldots, m_n) : m_i \neq m_j \ \forall i \neq j\}$$

$$= \{(\underbrace{m_1, \ldots, m_{k_1}}_{\in \begin{bmatrix} M \\ k_1 \end{bmatrix}}, \underbrace{m_{k_1+1}, \ldots, m_{k_1+k_2}}_{\in \begin{bmatrix} M \\ k_2 \end{bmatrix}}, \ldots, m_{k_1+\ldots+k_r}) : m_i \neq m_j \ \forall i \neq j\}$$

$$\Rightarrow \left|\begin{bmatrix} M \\ n \end{bmatrix}\right| = n! = k_1! \cdot\ldots\cdot k_r! \binom{M}{k_1, \ldots, k_r},$$

denn für jede Teilmenge M_i gibt es $k_i!$ Anordnungen. $\square$

3.9 Satz (Multinomial- oder Polynomialsatz):

$$(x_1+\dots+x_r)^n = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_r=n\\ k_1,\dots,k_r\geq 0}} \binom{n}{k_1,\dots,k_r} x_1^{k_1}\cdot\dots\cdot x_r^{k_r},\quad x_1,\dots,x_r\in\mathbb{C},\ n\in\mathbb{N}_0$$

Bew.:

$$(x_1+\dots+x_r)^n = \overset{1}{(x_1+\dots+x_r)}\cdot\overset{2}{(x_1+\dots+x_r)}\cdot\dots\cdot\overset{n}{(x_1+\dots+x_r)}$$
$$= \sum_{\substack{k_1+\dots+k_r=n\\ k_1,\dots,k_r\geq 0}} \binom{n}{k_1,\dots,k_r} x_1^{k_1}\cdot\dots\cdot x_r^{k_r}. \quad \square$$

Auswählen von $k_1,\dots,k_r$ Variablen $x_1,\dots,x_r$

3.10 Korollar: $r^n = (1+\dots+1)^n = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_r=n\\ k_1,\dots,k_r\geq 0}} \binom{n}{k_1,\dots,k_r} = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_r=n\\ k_1,\dots,k_r\geq 0}} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{r} k_i!}$.

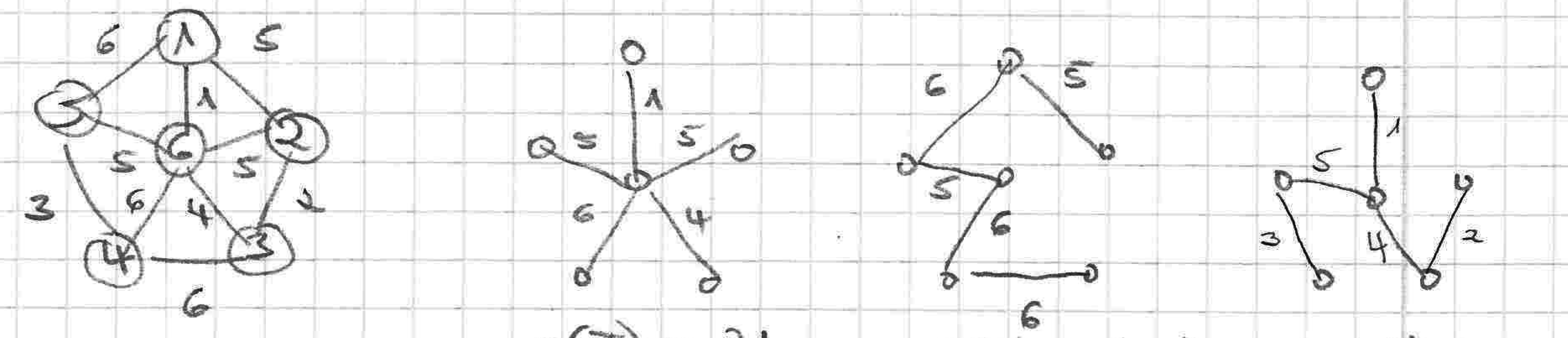
4. Minimale Spannbäume

4.1 Def. (Minimaler (auf)spannender Baum): Sei $G=(V,E)$ ein zusammenhängender Graph mit Kantengewichten $c\in\mathbb{R}^E$, $T_G=\{T\subseteq G \text{ aufsp. Baum von } G\}$ und $c(T):=\sum_{e\in T} c_e$ das Gewicht von $T\in T_G$. Dann heißt

$$T^*\in \underset{T\in T_G}{\operatorname{argmin}}\, c(T) \quad (\text{d.h. } T^*\in T_G \text{ mit } c(T^*)=\min_{T\in T_G} c(T))$$

minimaler aufspannender Baum von G.

4.2 Bsp.:

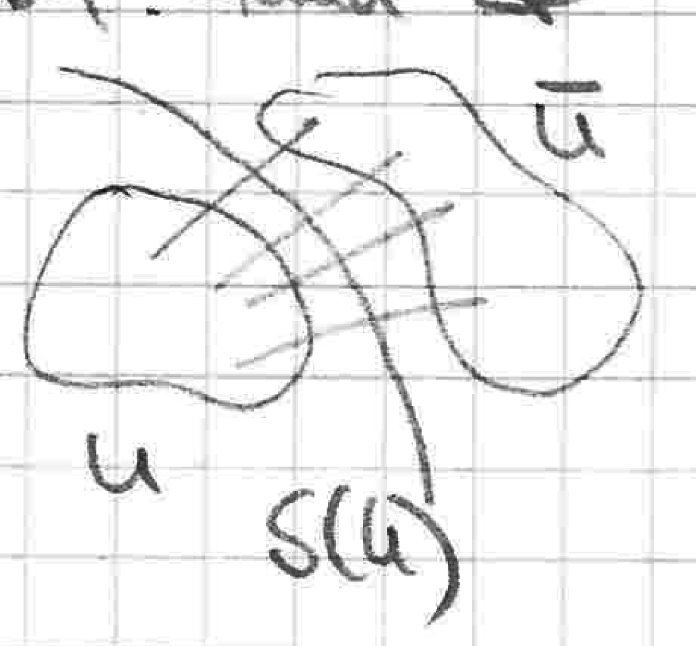


$c(T)=21$ $\quad c(T)=(28)$ $\quad c(T^*)=15$

4.3 Def. (Schnitt): Sei $G=(V,E)$ ein Graph, $\emptyset\subsetneq U\subsetneq V$ eine echte Teilmenge der Knoten. Dann ist

$$\delta(U):=\{uv\in E: u\in U, v\notin U\}$$

der von U induzierte Schnitt.



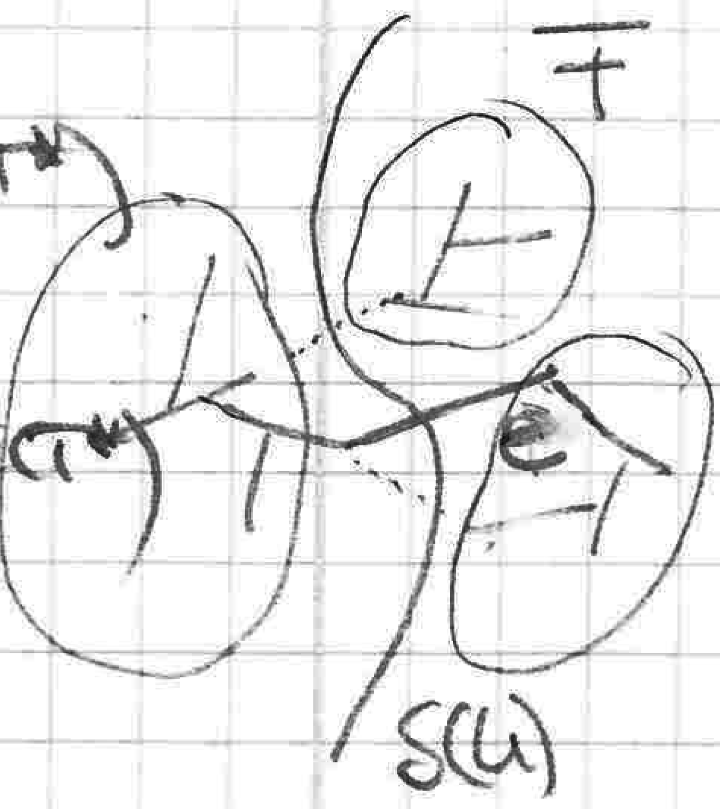
4.4 Satz: Sei $G=(V,E)$ zusammenhängend, $c\in\mathbb{R}^E$ und

a) $F\subseteq E: \exists T^* \in \arg\min_{T\in\mathcal{T}_G} c(T): F\subseteq E(T^*)$ (F ist in einem min. Spannbaum enthalten)

b) $\emptyset \subsetneq U \subsetneq V: S(U)\cap F=\emptyset$ (F schneidet S(U) nicht)

c) $e\in\arg\min_{e\in S(U)} c_e$.

Dann gilt: $\exists T^*\in \arg\min_{T\in\mathcal{T}_G} c(T): F\cup\{e\}\subseteq E(T^*)$



Bew.: Sei $T^*\in\arg\min_{T\in\mathcal{T}_G} c(T): F\subseteq E(T^*)$, $e\notin E(T^*)$

Satz 2.10 vi) $\Rightarrow$ $E(T^*)\cup\{e\}$ enthält einen Kreis C mit

$$|\underset{\ni e}{C}\cap S(U)| \underset{f \text{ ist keine Brücke}}{\geq 2}$$

Sei $f\in C\cap S(U)$, $f\neq e$ $\Rightarrow T'=(V, E(T^*)\cup\{e\}\setminus\{f\})$ ist ein Baum mit $F\cup\{e\}\subseteq E(T')$ und $|E(T^*)\cup\{e\}\setminus\{f\}|=|V|-1$

$$c(T')=c(T^*)+c_e-c_f\le c(T^*). \quad \square$$

23 Okt. 13

4.5 Alg. (Minimaler aufspannender Baum)

Input: $G=([n],E)$ zusammenhängend, $c\in\mathbb{R}^E$

Output: $T^*=([n],E^*)\in\arg\min_{T\in\mathcal{T}_G} c(T)$

1. $U_i\leftarrow\{i\}$, $E_i\leftarrow\emptyset$, $T_i\leftarrow(U_i,E_i)$, $i\in[n]$
2. for $k=1,\dots,n-1$ {
3. wähle $U_i\neq\emptyset$
4. wähle $e_i=u_iv_i\in\arg\min_{e\in S(U_i)} c_e$
5. bestimme $j: v_i\in U_j$
6. $U_i\leftarrow U_i\cup U_j$, $E_i\leftarrow E_i\cup\{u_iv_i\}\cup E_j$, $T_i\leftarrow(U_i,E_i)$,
7. $U_j\leftarrow\emptyset$, $E_j\leftarrow\emptyset$, $T_j\leftarrow(U_j,E_j)$
8. }
9. $T^*\leftarrow T_i=(U_i,E_i)$ mit $U_i\neq\emptyset$.

4.6 Satz: Alg. 4.5 ist korrekt.

Bew.: Satz 4.4 für $F=\bigcup_{i=1}^{n} E_i$, $U=U_i$, $e=e_i$, $k=1,\dots,n-1$. $\square$

4.9 Alg. (von Kruskal, Greedy-Min):

Input: $G = ([n], E)$ zusammenhängend, $|E| = m$, Gewichte $c \in \mathbb{R}^E$

Output: $T^* = ([n], E^*) \in \underset{T \in T_G}{\operatorname{argmin}}\ c(T)$

1. $E^* \leftarrow \emptyset$
2. Sortiere E nach aufsteigendem Gewicht s.d. $c_{e_1} \leq c_{e_2} \leq \ldots \leq c_{e_m}$
3. for $i = 1, \ldots, m$ {
4. if ($E^* \cup \{e_i\}$ enthält keinen Kreis) {
5. $E^* \leftarrow E^* \cup \{e_i\}$
6. }

4.10 Satz: Alg 4.9 ist korrekt.

Bew.: Alg. 4.9 ist ein Spezialfall von Alg. 4.5. Sei $i_1 = 1 < \ldots < i_{n-1}$ mit $|E^* \cap \{e_1, \ldots, e_{i_j}\}| \cap |E^* \cap \{e_1, \ldots, e_{i_j - 1}\}|$, $j = 1, \ldots, n-1$ und $e_{i_j} = u_{i_j} v_{i_j}$, $j = 1, \ldots, n-1$. Dann wähle in Alg. 4.5.3 U_i mit $U_i \ni u_{i_j}$. □

4.7 Alg. (von Prim):

Input: $G = ([n], E)$ zusammenhängend, Gewichte $c \in \mathbb{R}^E$

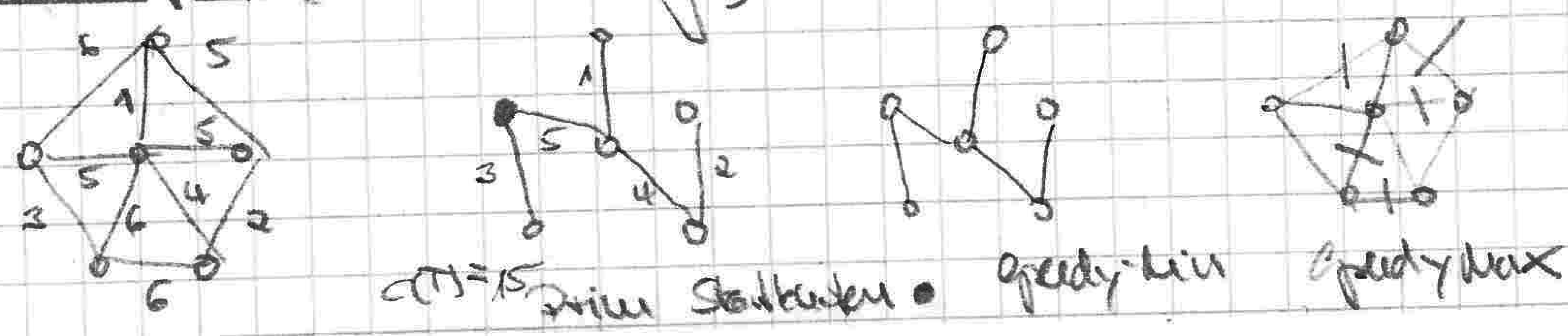
Output: $T^* = ([n], E^*) \in \underset{T \in T_G}{\operatorname{argmin}}\ c(T)$

1. $E^* \leftarrow \emptyset$
2. wähle $U \leftarrow \{u\}$, $u \in V$
3. for $i = 1, \ldots, n-1$ {
4. wähle $e_i = u_i v_i \in \underset{u_i \in U, v_i \notin U}{\operatorname{argmin}}\ c_{u_i v_i}$
5. $E^* \leftarrow E^* \cup \{e_i\}$
6. }

4.8 Satz Alg 4.7 ist korrekt.

Bew.: Wähle in Alg. 4.5.3 $U_i = U$. □

4.2 Bsp. (Wiederholung):



4.11 Alg. (Greedy-Max):

Input: $G=([n],E)$ zusammenhängend, $|E|=m$, $c\in\mathbb{R}^E$

Output: $T^*=([n],E^*)\in \arg\max_{T\in\mathcal{T}_G} c(T)$

1. $E^* \leftarrow E$
2. Sortiere E nach absteigendem Gewicht s.d. $c_{e_1}\geq \dots \geq c_{e_m}$.
3. for $i=1,\dots,m$ {
4.   if ($E^*\setminus\{e_i\}$ zusammenhängend) {
5. $E^*\leftarrow E^*\setminus\{e_i\}$
6. }.

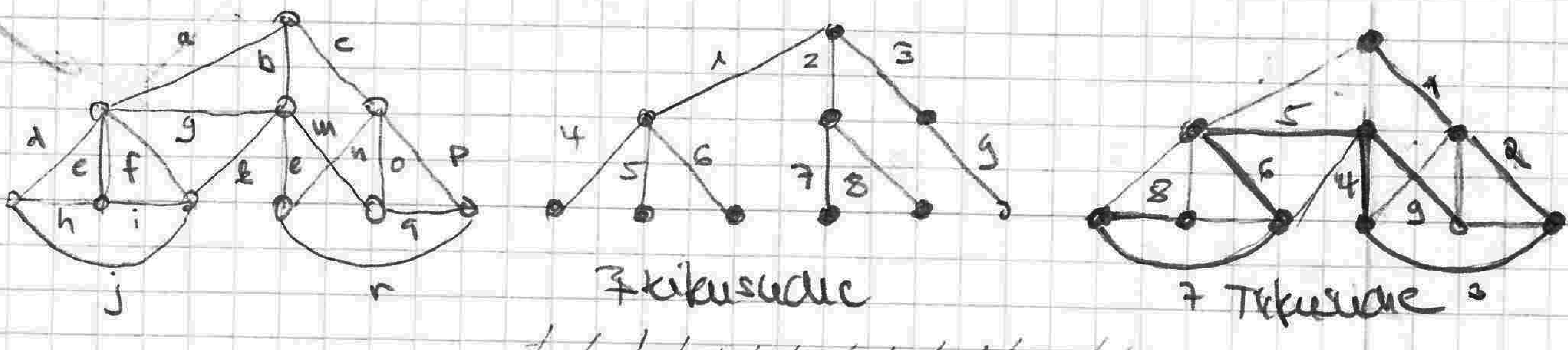
4.12 Satz: Alg. 4.11 ist korrekt.

Bew.: Induktion über m.

Ind. Anf.: $m=1$ ✓

Ind. Schritt: $m\to m+1$. e_1 ist eine Brücke ✓. Sei e_1 keine Brücke. Dann bestimmt der Greedy-Min Alg. 4.9 einen minimalen aufspannenden Baum in $G'=([n],E\setminus\{e_1\})$, der auch ein min. aufspannender Baum in G ist. □

4.13 Bsp. (Breiten- und Tiefensuche).



~~a b c d e f g k l m n o p h j i r q~~
1 2 3 4 5 6 7 8 9

~~a b c n o p q h l m k g d e f i j~~
1 2 3 4 9 5 6 7 8

4.14 Alg. (Breiten- und Tiefensuche)

Input: $G=([n],E)$

Output: inklusionsmax. Wald $W=([n],E^*)$

1. $E^*\leftarrow\emptyset$
2. $U\leftarrow V$ Menge der unbesuchten Knoten
   $F\leftarrow E$, unbenutzten Kanten

```
3.  forall v ∈ V {
4.     if (v ∈ U) {
5.        U ← U \ {v}          (v ist besucht)
6.        S ← S(v) = S(v) ∩ F
7.        while (S ≠ ∅) {
8.           wähle e = uw ∈ S  s.d. u ∈ U
9.           S ← S \ {uw} ,  F ← F \ {uw}
10.          if (w ∉ U) {
11.             U ← U \ {w}
12.             S ← S ∪ (S(w) ∩ F)
13.          }
14.    }
15. }
```

4.15 Satz Alg. 4.14 ist korrekt.

Bew: Sei $\overline{V} = V \setminus U$ die Menge der besuchten Knoten. Dann gilt in Alg 4.14.6 stets $S \supseteq S(\overline{V})$. In 4.14.7–13 wird $\overline{V}$ um einen unbearbeiteten Knoten erweitert, solange dies möglich ist. In 4.14.3 wird ggf. eine neue Komponente eröffnet. □

4.16 Bem. Die Menge S kann mit verschiedenen Datenstrukturen implementiert werden.

a) S = First-in-First-out-Schlange (FIFO-Queue)
=> Alg. 4.14 = Breitensuche, engl. Breadth first search (BFS)

b) S = Last-in-First-out-Stapel (LIFO-Stack)
=> Alg. 4.15 = Tiefensuche, engl. Depth first search (DFS).

DFS läßt sich besonders einfach rekursiv programmieren und braucht nur wenig Speicherplatz.

5. Laufzeit von Algorithmen

5.1 Frage: Algorithmus A: Problem $\Pi = \{\text{Instanz}\} \to \{\text{Lösung}\}$

a) Existiert A zur Lösung von Π?

b) Welche Laufzeit hat A?

c) Wieviel Speicher benötigt A?

Klar: Die Laufzeit hängt von der Größe des Problems ab. Das Problem muß mit einem "Codierungsschema" codiert werden. Wir codieren Probleme als Folgen von Zahlen.

5.2 Def (Codierungslänge): Sei $z \in \mathbb{Z}$, $p/q \in \mathbb{Q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, p, q teilerfremd, $x \in \mathbb{Q}^n$, $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $G = ([n], E)$. Dann ist die Codierungslänge von z, $\frac{p}{q}$, x, A und G def. als

a) $\langle z \rangle := \underbrace{\lceil \log_2(|z|+1) \rceil}_{\text{Anzahl Bits}} + \underbrace{1}_{\text{Vorzeichen}}$

b) $\langle p/q \rangle := \langle p \rangle + \langle q \rangle$

c) $\langle x \rangle := \sum_{i=1}^{n} \langle x_i \rangle$

d) $\langle A \rangle := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \langle a_{ij} \rangle$

z	z_2	$\lvert z\rvert+1$	$\lceil \log_2(z+1) \rceil$	$\langle z \rangle$
0	0	1	0	1
1	1	2	1	2
2	10	3	2	3
3	11	4	2	3
4	100	5	3	4
5	101	6	3	4
6	110	7	3	4
7	111	8	3	4
8	1000	9	4	5

e) Bei Graphen hängt die Codierungslänge vom Codierungsschema ab:

29.04.13

i) Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix (a_{ve}): $\langle G \rangle = \langle (a_{ve}) \rangle = \underbrace{nm}_{\text{0en}} + \underbrace{2m}_{\text{1en}} = (n+2)m$

ii) Knoten-Knoten-Inzidenzmatrix (a_{uv}): $\langle G \rangle = \langle (a_{uv}) \rangle = n^2 + 2m$

iii) Kantenliste $E \subseteq \binom{[n]}{2}$: $\langle G \rangle \leq m \langle n \rangle \approx m \log_2 n$

f) $\{I \in \mathbb{Q}^k, k \in \mathbb{N}\} \supseteq \Pi$ Problem

$I \in \Pi$ Instanz mit wohldef. Codierungslänge

$L(I) \in \mathbb{Q}^k$, $k \in \mathbb{N}$ Lösung von I

5.3 Def. (Laufzeit und Speicherplatzbedarf von Algorithmen) Ein Algorithmus $A: \Pi \to \{L(I) : I \in \Pi\}$, $I \mapsto L(I)$ zur Lösung eines Problems führt eine Abfolge folgender elementarer Operationen auf einer Random-Access-Maschine (Computer), auf dem in konstanter Zeit auf jeden Speicherplatz zugegriffen werden kann) aus:

i) Addition und Subtraktion

ii) Multiplikation und Division

iii) Lesen, Schreiben, Löschen eines Datums

iv) Vergleichen

a) Die Laufzeit von A zur Log. von $I \in \Pi$ ist die Anzahl elementarer Operationen, die A zur Berechnung von $L(I)$ benötigt, multipliziert mit der Codierungslänge der größten auftretenden Zahl.

b) Der Speicherplatzbedarf von A zur Log von $I \in \Pi$ ist die maximale Anzahl an Bits, die A zur Berechnung von $L(I)$ verwendet.

c) $f_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto \max\{\text{Laufzeit von A zur Log von } I \in \Pi : \langle I \rangle \le n\}$

Laufzeitfunktion von A

d) $f_A^{\#} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto \max\{\#\text{el. Op.}$ "

$s_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto \max\{\text{Speicherpl.}$ "

Speicherplatzfunktion von A.

e) A hat polynomielle Laufzeit / ist ein polynomieller Alg.

$:\Leftrightarrow \exists$ Polynom $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f_A(n) \le p(n) \; \forall n \in \mathbb{N}$.

f) A hat polynomiellen Speicherplatzbed.

$:\Leftrightarrow \exists$ Polynom $q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $s_A(n) \le q(n) \; \forall n \in \mathbb{N}$.

g) Seien $g, f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zwei Funktionen.

$$g(n) = O(f(n)) :\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{N} : g(n) \le C f(n) \; \forall n \in \mathbb{N}$$

"Landausches O" $\quad$ g ist von der (Größen-)Ordnung von f

5.4 Beobachtung (Rechenregeln für Polynome in O-Notation):

a) $O(1) + O(1) = O(1)$

b) $O(1) + O(n) = O(n)$

c) $O(1) + O(n) + O(n^2) = O(n^2)$

5.5 Bem.: Man sagt

A hat quadratische Laufzeit $\Leftrightarrow f_A(n) = O(n^2)$ usw.

5.4 Bsp.:

a) Alg. (Fakultät)

Input: $k \in \mathbb{N}$

Output: $fak = k!$

Datenstrukturen: k, i, fak (Register)

		elementare Operationen: lesen	schreib.	vgl.	add	mult.	Σ
1. lese k, $fak \leftarrow 1$	$1\cdot($	1	1	1			$) = 2 = O(1)$
2. for $i = 1, \ldots, k$ {	$k\cdot($			1	1		$) = 2k = O(k)$
3. $fak \leftarrow fak \cdot i$	$k\cdot($					1	$) = k = O(k)$
4. }							$3k+2 = O(k)$

Codierungslänge Input: $\langle k \rangle = n$

elementare Operationen: $O(k) = O(2^{\langle k \rangle}) = O(2^n)$

Codierungslänge größte Zahl: $\langle k! \rangle \approx \langle k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k}/2 \rangle$

$\leq \langle k^k \rangle$

$\overset{\text{Übung}}{\leq} k\langle k \rangle = O(n2^n)$

$f_{Fakultät}(n) = O(2^n)\,O(n2^n) = O(n4^n)$, d.h. die Laufzeit von Fakultät ist exponentiell.

b) Alg. (GGT)

Input: $a, b \in \mathbb{N}$, $b \geq a$

Output: $ggT(a,b)$

Datenstrukturen: $a, b, c \in \mathbb{N}$

1. do {		
2. $c \leftarrow b$	$O(1)$	
3. $b \leftarrow a$	$O(1)$	
4. $a \leftarrow c \bmod b$	$O(1)$	
5. } while $(a \neq 0)$	$O(1)$	
6. output b	$O(1)$	

Durchläufe $= k_a$, $a_0 = a$

$c = q_1 a_0 + a_1$, $0 \leq a_1 < b$

$b = \underbrace{q_2}_{\geq 1} a_1 + a_2$, $0 \leq a_2 < a_1$

$\geq 2a_2$

$\Rightarrow a_0$ halbiert sich alle 2 Durchläufe

$\Rightarrow k_a \leq 2\log_2 a_0 = O(\langle a \rangle)$. Sei $\langle b \rangle = n \geq \langle a \rangle$

$f_{ggT}(n) \geq 2O(\langle a \rangle) = O(n)$ d.h. die # el. Op ist linear

$\Rightarrow f_{ggT}(n) = O(\langle a \rangle \langle b \rangle) = O(n^2)$, d.h. die Laufzeit von ggT ist quadratisch.

c) Alg (Kreischeck)

Input: $G=(V,E)$, $f\in\binom{V}{2}$, $f\notin E$, $|V|=n$, $|E|=m$

Output: Ja/1, falls $E\cup\{f\}$ einen Kreis enthält, Nein/0 sonst

1. Sei $f=uv$ $\quad O(1)$

2. Führe BFS in G mit Startknoten u aus (d.h. Modul 4.14.3 durch 3. für $u\in V$) $\quad O(\max\{m,n\})$

3. if $(v\in U)$ {output Nein/0} $\quad O(1)$

else { " Ja/1 }

$O(\max\{m,n\})$

Codierungslänge Input: $\underbrace{\langle G\rangle}_{\text{Kantenliste} \Rightarrow |V| = O(|E|)=O(m)} = O(\overbrace{m\langle n\rangle}^{=k})$

elementare Operationen: $O(|E|)=O(m)$

Codierungslänge größte Zahl: $\langle n\rangle = O(\langle n\rangle)$

$f_{\text{Kreischeck}}(k) = O(\langle n\rangle m) = O(k)$, d.h. linear.

$f^{\#}_{\text{Kreischeck}}(k) = O(m) = O\left(\frac{k}{\langle n\rangle}\right)$

d) Alg. 4.19 von Kruskal

Sortieren: $O(m\log m) = O(m^2)$

Einfügen und Kreischeck $O(m\cdot m)$

größte Zahl: $O(C)$, $C=\max\{\langle n\rangle, \langle c_e\rangle, e\in E\}$

$f_{\text{Kruskal}}(\overbrace{mC}^{=k}) = O(m^2C) = O(k^2)$, d.h. quadratisch

$f^{\#}_{\text{Kruskal}}(k) = O(m^2) = O\left(\frac{k^2}{C^2}\right)$.

05a

5.5 Def. (Entscheidungsproblem): Ein Problem Π mit $L(I) \in \{0,1\}$ $\forall I \in \Pi$ heißt Entscheidungsproblem.
"nein" "ja"

5.7 Def. (Komplexitätsklassen P und NP) Sei Π ein Entscheidungsproblem.

a) Π gehört zur Klasse P (der polynomial lösbaren Probleme), wenn es einen polynomialen Alg. zur Lsg von Π gibt.

b) Π gehört zur Klasse NP (der nicht-deterministisch polynomial lösbaren Probleme), wenn es einen nicht-deterministischen polynomialen Algorithmus zur Lösung von Π gibt, d.h. einen Alg., der für jede Ja-Instanz $I \in \Pi$ mit $L(I) = 1$ ein Zusatzobjekt $Q(I)$ errät, mit dessen Hilfe die Korrektheit von $L(I) = 1$ überprüft werden kann und in einer Laufzeit, die polynomial in $\langle I \rangle$ ist, überprüft, ob $Q(I)$ ein Objekt ist, aufgrund dessen Existenz die Antwort $L(I) = 1$ richtig ist.

30.04.13

5.7 Bsp. Folgende Entscheidungsprobleme sind in P

a) Ist ein Graph G zusammenhängend?

b) Ist ein Graph G eulersch?

Folgende Entscheidungsprobleme sind in NP:

c) Alle Probleme in P.

d) Enthält G einen Hamiltonkreis, d.h. einen Kreis, der jeden Knoten genau einmal besucht? (Hamiltonsches Kreisproblem)

e) Kann man die Knoten von G mit k Farben färben, so daß keine zwei benachbarten Knoten die gleiche Farbe haben? (k-Färbungsproblem)

f) Faktorisierung: Ist $n \in \mathbb{N}$ faktorisierbar (nicht prim?)

5.6 Bsp.: Sei $G=(V,E)$ ein Graph, $|V|=n$, $|E|=m$, $k\in\mathbb{N}$

Wir definieren folgende Entscheidungsprobleme

a) Hamiltonkreis:

Input: G

Output: $1 \Leftrightarrow \exists$ Hamiltonkreis $C\subseteq G: V(C)=V$.

b) Clique

Input: G, k

Output: $1 \Leftrightarrow \exists$ Clique $Q\subseteq V: uv\in E\ \forall u,v\in Q$, $|Q|\geq k$.

e) SAT

Input: Boolsche Variablen $x_1,\dots,x_n$

Klauseln $C_i = \bigvee \neg x_i$

Boolscher Ausdruck $\bigwedge C_i$

Output: $1 \Leftrightarrow$ Truth assignment $x_i \mapsto \{0,1\}: \bigwedge C_i = 1$.

c) Stabile Menge

Input: G, k

Output: $1 \Leftrightarrow \exists$ stabile Menge $S\subseteq V: uv\notin E\ \forall u,v\in S$, $|S|\geq k$

d) Färbung

Input: G, k

Output: $1 \Leftrightarrow \exists$ Partition $V=\bigcup_{i=1}^{k} V_i$ in $\underbrace{\text{stabile Mengen}}_{\text{Farbklassen}}$

f) Faktorisierung

Input: $n\in\mathbb{N}$

Output: $1 \Leftrightarrow \exists a,b\in\{2,\dots,n\}: n=ab$

g) Primzahltest

Input: $n\in\mathbb{N}$

Output: $1 \Leftrightarrow \nexists a,b\in\{2,\dots,n\}: n=ab$

Begr.: a) ist polynomial lösbar mit BFS (Übung).

b) BFS + Knotengrade bestimmen

c) Rückseitobjekt $Q(I)$ wird nicht benötigt.

d) Errichte G einen Hamiltonkreis $H(G)$. Dann rate $Q(G) = H(G)$ und verifiziere in polynomialer Zeit, daß $H(G)$ ein Hamiltonkreis in G ist.

e) Errate eine Färbung $V = \dot{\bigcup}_{i=1}^{k} V_i$ mit k Farben und überprüfe, $uv \notin E$ $\forall u,v \in V_i$, $i=1,..,k$. in polynomialer Zeit.

f) Rate Primfaktorzerlegung und verifiziere sie.

5.8 Bem.: Es ist nicht bekannt (und eines der Millenium-Probleme), ob $P = NP$ oder $P \neq NP$ ist.

5.9 Bemerk.: a) $\Pi \in NP$ sagt nichts darüber aus, wie man verifiziert, ob $I \in \Pi$ eine Nein-Instanz ist, d.h. wenn es einen Beweis für Ja gibt, muß es noch lange keinen Beweis für Nein geben, z.B.:

i) Ist G nicht hamiltonsch?

ii) Ist $n \in \mathbb{N}$ prim?

b) $\Pi \in NP$ sagt auch nichts darüber aus, wie $Q(I)$ zu finden ist.

5.10 Def. (Polynomiale Transformation): Seien Π, Π' Entscheidungsprobleme. Ein Algorithmus $A: \Pi \to \Pi'$ mit $L(I) = L(T(I))$ $\forall I \in \Pi$

ist eine polynomiale Transformation von Π in Π'. Man sagt Π wird auf Π' reduziert, und schreibt $\Pi \propto \Pi'$.

5.11 Def. (NP-vollständige Probleme): Ein Entscheidungsproblem Π^* heißt NP-vollständig, wenn es für jedes Problem $\Pi \in NP$ eine polynomiale Transformation von Π in Π^* gibt.

5.12 Satz (Karp [1972]): Das hamiltonsche Kreisproblem und das Stabile-Mengen-Problem sind NP-vollst.

Bew.: ohne Bew.

5.13 Def (Minimierungs- und Maximierungsproblem):

Sei Π ein Problem, für $I \in \Pi$ sei $X(I)$ eine Menge von Lösungen, $c: \{x : x \in X(I), I \in \Pi\} \to \mathbb{Q}$ eine Funktion, $L(I) = \operatorname{argmin}_{x \in X(I)} c(x)$. Dann heißt Π <u>Minimierungsproblem</u>. Π' mit Instanzen (I, z), $I \in \Pi$, $z \in \mathbb{Q}$, $L(I,z) = \begin{cases} 1, & L(I) \le z \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ heißt das zu Π gehörige Entscheidungsproblem.

Π ist in P, wenn es einen polynomiellen Alg. zur Lösung von Π gibt. Π ist NP-hard, wenn Π' NP-schwer ist. Analog für Maximierungsprobleme.

5.14 Bsp.: Die Optimierungsvarianten der Probleme aus Bsp. 5.6 heißen

a) Min-Hamiltonkreis = Traveling Salesman Problem (TSP)

b) Max-Clique

c) Max-Stabile Menge

e) Max-SAT

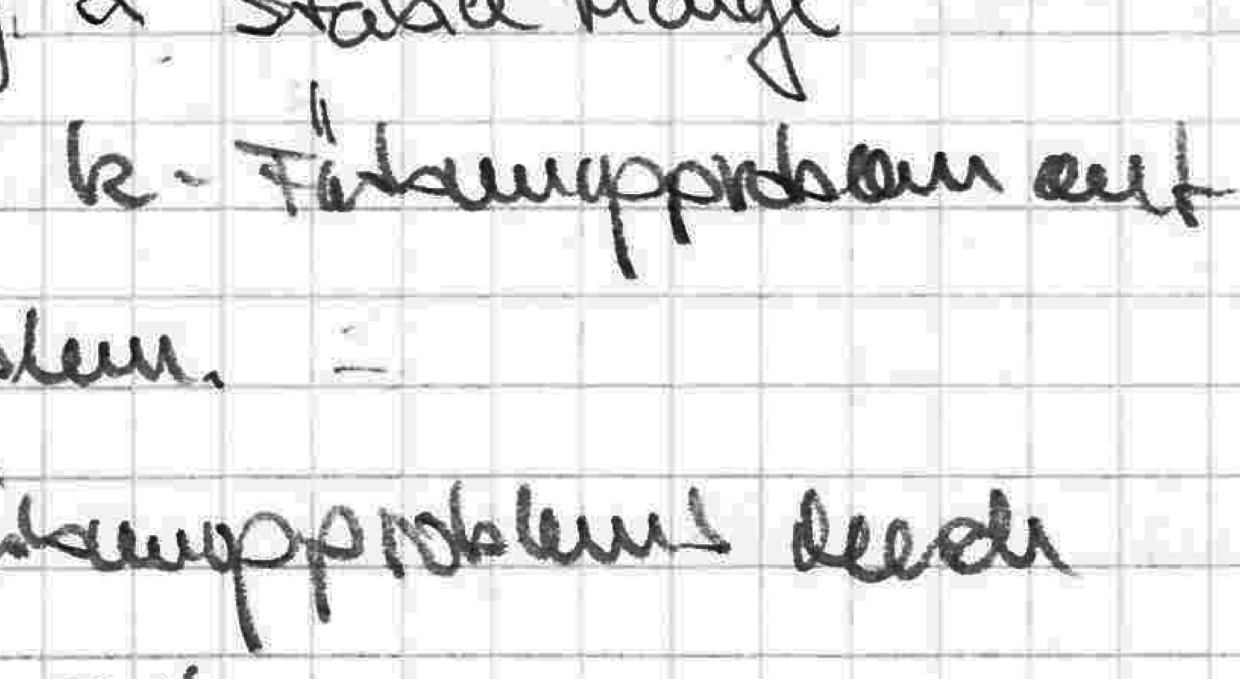
d) Min-Färbung = Coloring

5.15 Satz: k-Coloring $\propto$ Stabile Menge

Bew: Wir reduzieren das k-Färbungsproblem auf das Stabile-Mengen-Problem.

Sei eine Instanz des k-Färbungsproblems durch $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$ gegeben.

Wir konstruieren eine Instanz des Stabile-Mengen-Problems wie folgt:



k Kopien von G

$G' = (V', E')$ mit

$V' = V \times [k]$

$E' = \{(v,i)(v,j) : 1 \le i < j \le k\} \cup \{(u,i)(v,i), uv \in E, i \in [k]\}$

$k' = V'$

$\Rightarrow S' \subseteq V'$ stabil, $S' = \dot{\bigcup}_{i=1}^{k} S_i' = \dot{\bigcup}_{i=1}^{k} \{(v,i) \in S'\}$,

$S_i = \{v \in V : (v,i) \in S_i'\}$ stabil, $\dot{\bigcup} S_i = V$ k-Färbung von G. G' kann in polynomieller Zeit berechnet werden. $\square$

5.16 ~~Satz~~: Stabile Menge $\propto$ k-coloring.

Bew.: Sei eine Instanz des Stabile Mengen Problems durch $G=(V,E)$ und $k\in\mathbb{N}$ gegeben! Dann gilt:

$S\subseteq V$ stabil $\iff \forall uv\in E: u\notin S$ oder $v\notin S$

$\iff \forall uv\in E: \{u,v\}\cap V\setminus S \neq \emptyset$

d.h. $V\setminus S$ überdeckt alle Kanten

$\Rightarrow \exists S\subseteq V$ stabil, $|S|\geq k \iff \exists \bar{S}\subseteq V$ Knotenüberdeckung, $|\bar{S}|\leq |V|-k$.

Wir zeigen, wie man eine solche Knotenüberdeckung durch Färben findet.

Konstruiere dazu folgenden Graphen $G'=(V',E')$:

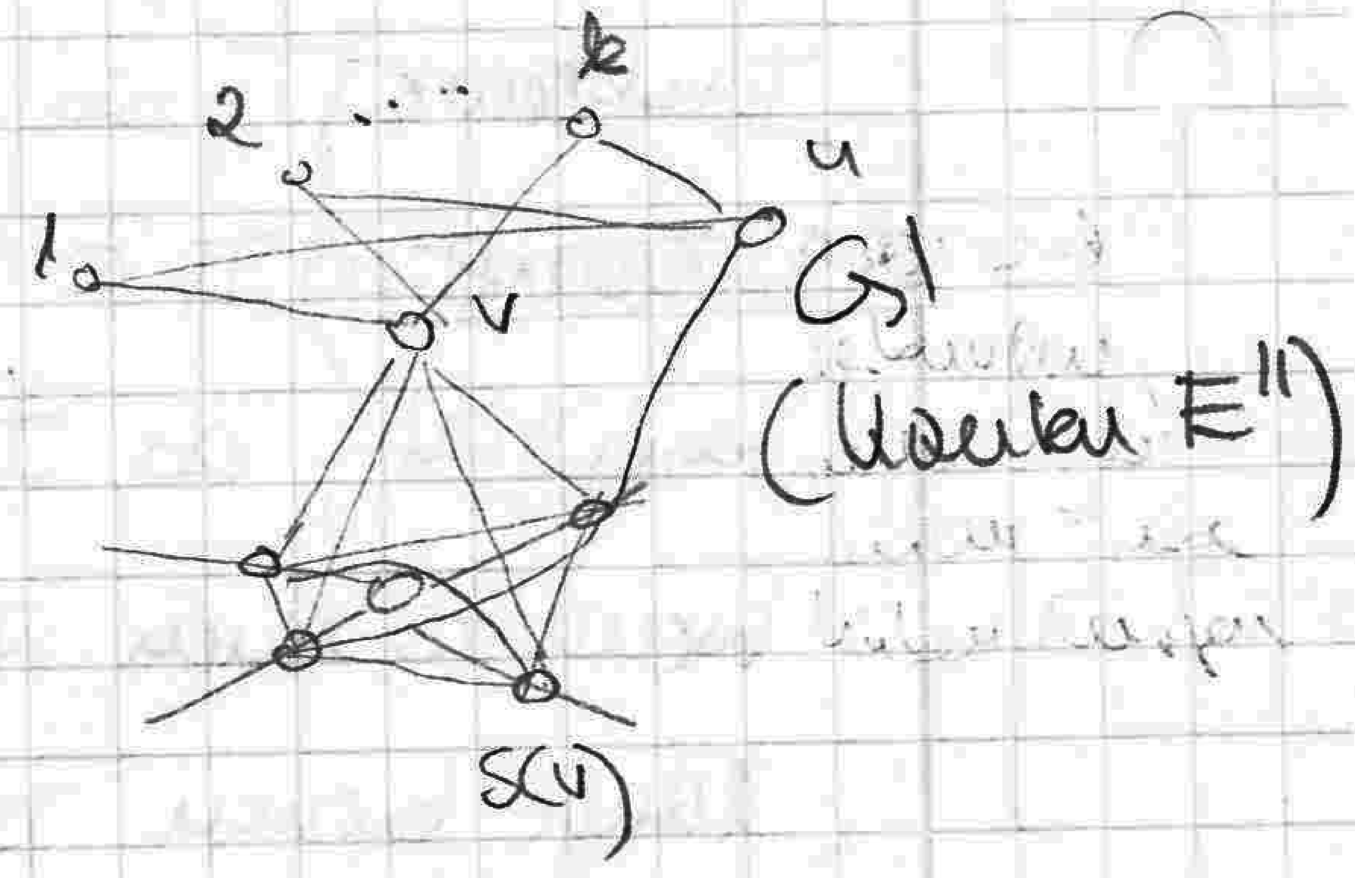
$V' = V\cup E\cup [k]$

$E'' = \{\{uv, vw\} : \underbrace{uv, vw}_{\text{gemeinsamer Knoten}}\in E\}$

$\cup\ \{\{v, vw\} : vw\in E\}$

$\cup\ \{\{i,v\} : i\in[k], v\in V\}$

$E' = \binom{V'}{2}\setminus E''$



Dann sind die maximalen stabilen Mengen, die einen Knoten v bzw i enthalten die Mengen $\{i,v\}, i\in[k]$, $\{v, S(v)\}$ bzw. $\{i,v\}, v\in V$.

Wir behaupten:

$\exists\, |V|$-Färbung von $G' \iff \exists\, |V|-k$ Knotenüberdeckung $\bar{S}$ von G

$\iff \exists$ stabile k-Menge S in G.

„$\Leftarrow$" O.B.d.A $|\bar{S}| = |V|-k$. Färbe den i-ten Knoten von $\bar{S}$ ($i=1,\dots,k$) mit Farbe i, ebenso alle seine noch ungefärbten inzidenten Kanten, und die restlichen k Knoten aus V mit den restlichen Farben, jeweils zusammen mit einem Knoten $i\in[k]$.

„$\Rightarrow$" Die Knoten $i\in[k]$ haben alle verschiedene Farben, jeder ist mit max. einem Knoten $v\in V$ gleichfarbig. Die restlichen $|V|-k$ Knoten V bestimmen die Farben für ihre inzidenten Kanten. □

6. Matroide und Unabhängigkeitssysteme

6.1 Def. (Unabhängigkeitssystem): Sei M eine endliche Menge. Eine Mengenfamilie $\mathcal{I} \subseteq 2^M$ heißt Unabhängigkeitssystem oder (abwärts-) monotones Mengensystem auf M wenn gilt:

a) $\emptyset \in \mathcal{I}$

b) $X \subseteq Y \in \mathcal{I} \Rightarrow X \in \mathcal{I}$.

6.2 Def. (Zirkuit, Basis, Rang): Sei $\mathcal{I}$ ein Unabh.-sys. auf M, $X, Y \subseteq M$.

a) $X \left\{\begin{matrix} \text{un} \\ - \end{matrix}\right\}$abhängige Menge $:\Leftrightarrow X \left\{\begin{matrix} \in \\ \notin \end{matrix}\right\} \mathcal{I}$

b) X Basis von Y $:\Leftrightarrow$ X max. unabhängige Teilmenge von Y

$\Leftrightarrow$ $X \in \mathcal{I}$ und $X' \in \mathcal{I}$, $X \subseteq X' \subseteq Y \Rightarrow X = X'$

c) $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathcal{I}) := \{X \subseteq M : X \text{ Basis von } M\}$ Basissystem von $\mathcal{I}$

d) X Zirkuit $:\Leftrightarrow$ X min. abhängige Menge

$\Leftrightarrow$ $X \notin \mathcal{I}$ und $X \supseteq Y \notin \mathcal{I} \Rightarrow Y = X$

e) $\mathcal{C} := \mathcal{C}(\mathcal{I}) := \{X \subseteq M : X \text{ Zirkuit von } \mathcal{I}\}$ Zirkuitsystem von $\mathcal{I}$

f) $\operatorname{rang}(X)$ $:\Leftrightarrow \max\limits_{B \text{ Basis von } X} |B|$ Rangfunktion von $\mathcal{I}$

g) u-rang (X) $:\Leftrightarrow \min\limits_{B \text{ Basis von } X} |B|$ untere Rangfunktion von $\mathcal{I}$

6.3 Bem.: Basis- und Zirkuitsystem eines US sind Antiketten, d.h. Mengensysteme $\subseteq 2^M$, s.d. keine 2 Elemente (Mengen) ineinander enthalten sind.

6.4 Def.: Opt. prob. →

6.5 Bsp.

a) $G = (V, E)$ zusammenh., $M = E$, $\mathcal{I} = \{W \subseteq E : W \text{ Wald}\}$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \{\text{aufspannende Bäume}\}$, $\mathcal{C} = \{\text{Kreise}\}$ $\max\limits_{X \in \mathcal{B}} c(X)$ max aufsp. Baum, $\max\limits_{X \in \mathcal{I}} c(X)$ max. Wald

$\Rightarrow \operatorname{rang} B = |V| - 1 \ \forall B$ Basis, $\operatorname{rang} X = |V| - \#\text{Komp. in } (V, X)$

b) $M = \{x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n\}$, $\mathcal{I} = \{\{x_i, i \in [k]\} : x_i, i \in I, \text{lin. unabh.}\}$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \{x_i, i \in [k], \text{Basis von } \operatorname{span} \sum_{i=1}^{k} x_i\}$ $\mathcal{C} = \{\text{min. Linearkombinationen}\}$

$\Rightarrow \operatorname{rang} X = \dim M \ \forall X$ Basis, $\operatorname{rang} X = \dim X$, $\max\limits_{X \in \mathcal{I}} c(X)$?

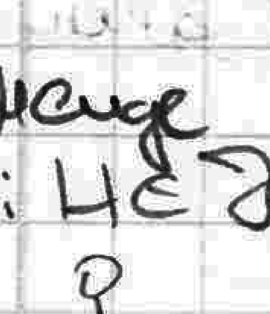
c) $G = (V, E)$, $M = V$, $\mathcal{I} = \{S \subseteq V : S \text{ stabil}\}$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \{\text{max. stabile Mengen}\}$ $\mathcal{C} = \{\{u,v\} : uv \in E\}$

$\operatorname{rang} X = \alpha(G[X])$ $\max\limits_{X \in \mathcal{I}} c(X) = \max\limits_{X \in \mathcal{B}} c(X)$ max. stabile Menge

d) $K_n = (V, E)$, $\mathcal{H} = \{H \subseteq E : H \text{ Hamiltonkreis}\}$, $\mathcal{I} = \{I \subseteq H : H \in \mathcal{H}\}$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{H}$, $\mathcal{C} = \{\{wx, wy, wz\} \in E, w, x, y, z \in V\}$



Sei $c' := K \cdot \mathbb{1} - c > 0$.

$\Rightarrow \operatorname{rang} H = |V| \ \forall H \in \mathcal{B}$. $\min\limits_{H \in \mathcal{B}} c(H) = \max\limits_{H \in \mathcal{B}} c'(H) = \max\limits_{H \in \mathcal{I}} c'(H)$ TSP

6.6 Proposition (Eigenschaften der Rangfunktion): Für die Rangfunktion eines US $\mathcal{I}$ auf einer Menge M gilt:

a) $\operatorname{rang} I \le |I| \ \forall I \in \mathcal{I}$ (Subkardinalität)

b) $I \subseteq J \Rightarrow \operatorname{rang} I \le \operatorname{rang} J \ \forall I, J \in \mathcal{I}$ (Monotonie)

c) $k \operatorname{rang}(I) \le \sum\limits_{i \in K} \operatorname{rang} I_i \ \forall I \subseteq M, I_i \in \mathcal{I}, i \in K$, $|\{i \in K : F_i \ni x\}| = k \ \forall x \in M\}$ (Starke Subadditivität)

$\mathcal{J} \subseteq I$
$\le |I|$

Bew.: a) $\text{rang}\, I = \max_{\mathcal{B} \text{ Basis von } I} |\mathcal{B}|$

b) $\mathcal{B} \subseteq I \in \mathcal{J}$ $\forall$ Basis von I

c) Sei $\mathcal{B}$ Basis von F. ~~Für $k=1$ und $F = \dot{\bigcup}_{i\in K} F_i$ ist~~

$k \,\text{rang}\, F = k|\mathcal{B}| = \sum_{i\in K} |\mathcal{B} \cap F_i| \le \sum_{i \in K} \text{rang}\, F_i$

~~Für $k>1$ sei für $F \subseteq M$ $F' = \{(m,i) : m \in F, i \in K\}$.~~ ~~mit k Kopien für jedes $m \in M$~~

~~$\Rightarrow \mathcal{J}' = \{ I'' \subseteq F' : \{ m \in M : (m,i) \in I''\} \in \mathcal{J}\}$ ist ein US und~~

~~$F' = \dot{\bigcup}_{i \in K} \underbrace{\{(m,i) : m \in F_i\}}_{= F_i''}$ mit $\text{rang}_{\mathcal{J}'} F_i'' = \text{rang}_{\mathcal{J}} F_i$~~

~~$\Rightarrow k\,\text{rang}\, F = k|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'| \le \sum_{i\in K} \text{rang}\, F_i'' = \sum_{i \in K} \text{rang}\, F_i$. $\square$~~

6.3 Def. (Optimierungsproblem über einem US): Sei $\mathcal{J}$ ein US über M und $c \in \mathbb{R}^M$.

$\max_{I \in \mathcal{J}} c(I)$ Optimierungsproblem über $\mathcal{J}$

$\max_{\mathcal{B} \in \mathbb{B}} c(\mathcal{B})$ " über $\mathbb{B}$.

6.7 Def. und Prop. (Matroid): Ein US $\mathcal{J}$ über M heißt Matroid, wenn eine der drei folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:

i) $X, Y \in \mathcal{J}$, $|Y| = |X|+1 \Rightarrow \exists\, y \in Y \setminus X : X \cup \{y\} \in \mathcal{J}$

ii) $X, Y \in \mathcal{J}$, $|Y| > |X| \Rightarrow \exists\, Z \subseteq Y, |X \cup Z| = |Y| : X \cup Z \in \mathcal{J}$

iii) $Z \subseteq M$, X, Y Basen von $Z \Rightarrow |X| = |Y|$.

Übung? ← Bew.: i) $\Rightarrow$ ii) ✓, ii) $\Rightarrow$ iii) Widerspruch

iii) $\Rightarrow$ i) Ann.: $\nexists\, y \in Y \setminus X : X \cup \{y\} \in \mathcal{J} \Rightarrow X$ Basis von $X \cup Y : |X| < |Y|$

6.8 Satz (Charakterisierung von Matroiden)

a) Eine Antikette $\mathcal{C} \subseteq 2^M$ ist genau dann das Zirkuitsystem eines Matroids, wenn gilt

$C_1, C_2 \in \mathcal{C}, C_1 \neq C_2, z \in C_1 \cap C_2 \Rightarrow \exists\, C_3 \in \mathcal{C} : C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus$

b) Eine Funktion $r: 2^M \to \mathbb{N}$ ist genau dann die Rangfunktion eines Matroids, wenn gilt:

"a) => $\mathcal{I}$": $\mathcal{I} = \{ I \subseteq M : \nexists C \in \mathcal{C} : C \subseteq I \}$ ist ein US. ✓

$\mathcal{I}$ ist ein Matroid:

$X, Y \in \mathcal{I}$, $|Y| = |X| + 1$. z.z. $\exists y \in Y : X \cup \{y\} \in \mathcal{I}$

α) $|Y \setminus X| = 1$, $Y \setminus X = \{y\} \Rightarrow X \cup \{y\} = Y$ ✓

β) $|Y \setminus X| \geq 2$. Ann.: $\forall y \in Y \setminus X : \exists C_y \in \mathcal{C} : C_y \subseteq X \cup \{y\}$.

Es gilt: $C_y \nsubseteq Y \in \mathcal{I} \Rightarrow \exists x_y \in X \cap C_y$

$|Y \setminus X| > |X \setminus Y| \Rightarrow \exists y_1, y_2 \in Y \setminus X : C_{y_1} \cap C_{y_2} \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$

Sei $x_{y_1} = x_{y_2} \in C_{y_1} \cap C_{y_2} \cap (X \setminus Y)$

$\overset{a)}{\Rightarrow} \exists C'_{y_2} \subseteq (C_{y_1} \cup C_{y_2}) \setminus \{x_{y_1}\}$, $C'_{y_2} \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow \exists C'_y \subseteq (X \cup \{y_1, y\}) \setminus \{x_{y_1}\} \quad \forall y \neq y_1$

~~Falls~~ zwei dieser Kreise y_1 enthalten, ex. Kreis $C \subseteq X$ ↯

d.h. jeder " C_y enthält ein Element $y \in Y \setminus X$,

das nur in C_y vorkommt. Wiederholung des Arguments

$\Rightarrow \exists C \subseteq X$ ↯.

07.05.13

i) $r(\emptyset)=0$

ii) $X\subseteq M,\ x\in M \Rightarrow r(X)\le r(X\cup\{x\})\le r(X)+1$

iii) $X\subseteq M,\ x,y\in M:\ r(X\cup\{x\})=r(X\cup\{y\})=r(X)$

$\Rightarrow r(X\cup\{x,y\})=r(X)$

oder äquivalent

iv) $X\subseteq M \Rightarrow 0\le r(X)\le |X|$ Subkardinalität

v) $X\subseteq Y\subseteq M \Rightarrow r(X)\le r(Y)$ Monotonie

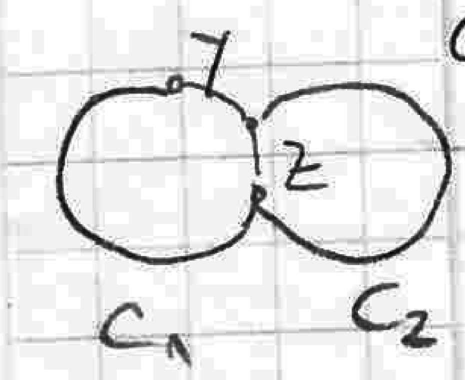
vi) $X,Y\subseteq M \Rightarrow r(X\cup Y)+r(X\cap Y)\le r(X)+r(Y)$ Submodularität

Bew: "$\mathcal{I}\Rightarrow a)$" Sei $C=C_1\cup C_2$, $C'=C\setminus\{z\}$. Falls $C'\notin\mathcal{I}$ ✓

Ann: $C'\in\mathcal{I}\Rightarrow C'$ Basis von $C \Rightarrow \operatorname{rang} C'=\operatorname{rang} C=|C_1|+|C_2|-2$

$C_1\in\mathcal{C}$

Sei $y\in C_1\setminus C_2 \Rightarrow C_1\setminus\{y\}\in\mathcal{I}$, $C_1\setminus\{y\}\subseteq C'$



$\overset{6.7\,ii)}{\Rightarrow} \exists Z\subseteq C': |(C_1\setminus\{y\})\cup Z|=|C'|=|C_1|+|C_2|-2,\ (C_1\setminus\{y\})\cup Z\in\mathcal{I}$

$\Rightarrow (C_1\setminus\{y\})\cup Z = C\setminus\{y\} \Rightarrow C_2\subseteq (C_1\setminus\{y\})\cup Z\notin\mathcal{I}$ ↯.

b) "$\mathcal{I}$ Matroid $\Rightarrow$ i), ii), iii)": Sei $r:=\operatorname{rang}$.

i) 6.6 a), ii) $r(X)\overset{6.6b)}{\le} r(X\cup\{x\})\overset{6.6c)}{\le} r(X)+r(\{x\})\le r(X)+1$

iii) $r(X\cup\{x,y\})\overset{ii)}{\le} r(X\cup\{x\})+1=r(X)+1$.

Ann: $r(X\cup\{x,y\})=r(X)+1$. Sei B Basis von X, $|B|=r(X)$

$\overset{r(X)=r(X\cup\{x\})}{\Rightarrow}$ B Basis von $X\cup\{x\}$, $r(X\cup\{x,y\})=r(X)+1 \overset{6.7\,ii)}{\Rightarrow} B\cup\{y\}$ Basis von $X\cup\{x,y\}$

$\Rightarrow r(X\cup\{y\})=r(X)+1$ ↯.

"i), ii), iii) $\Rightarrow \mathcal{I}$ Matroid": $\mathcal{I}=\{I\subseteq M: r(I)=|I|\}$

$\mathcal{I}$ ist ein US.

a) i) $\Rightarrow \emptyset\in\mathcal{I}$

b) $I,J\in\mathcal{I}$, $J\subseteq I$, $r(J)<|J| \Rightarrow r(I)<r(J)+|J\setminus I|<r(I)$ ↯

$\mathcal{I}$ ist ein Matroid.

c) $X,Y\in\mathcal{I}$, $|Y|=|X|+1$. Zz: $\exists y\in Y: r(X\cup\{y\})=|X|+1$.

Ann.: $\forall y\in Y: r(X\cup\{y\})=r(X)=|X|$

$\overset{iii)}{\Rightarrow} r(X\cup\{x,y\})=r(X)\overset{iii)}{=}r(X\cup\{x,y,z\})=r(X\cup Y)$

$\ge r(Y)=r(X)+1$ ↯.

"$\mathcal{I}$ Matroid $\Rightarrow$ iv), v), vi)": Sei $r \equiv$ rang. Es gilt i), ii), iii).

iv) Folgt aus i), ii). v) folgt aus ii). vi) Sei B Basis von $X \cup Y$.

$\overset{6.7.ii)}{\Rightarrow} \exists B_X \subseteq X \setminus Y, B_Y \subseteq Y \setminus X: B \cup B_X$ Basis von X, $B \cup B_X \cup B_Y$ Basis von $X \cup Y$

$\Rightarrow B \cup B_Y \begin{cases} \subseteq Y \\ \in \mathcal{I} \end{cases}$

$\Rightarrow r(X \cup Y) + r(X \cap Y) = \underbrace{|B| + |B_X|}_{= r(X)} + \underbrace{|B_Y| + |B|}_{\leq r(Y)} \leq r(X) + r(Y).$

"iv), v), vi) $\Rightarrow \mathcal{I}$ Matroid": $\mathcal{I} = \{I \in M : r(I) = |I|\}$

$\mathcal{I}$ ist ein US:

a) iv) $0 \leq r(\emptyset) \leq |\emptyset| = 0 \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{I}$

b) Sei $X \subseteq Y \in M$, $r(Y) = |Y|$, $Y \setminus X =: Z$.

$\overset{vi)}{\Rightarrow} \underbrace{r(X)}_{\leq |X|} + \underbrace{r(Z)}_{\leq |Z|} \geq r(\overset{= X \cup Z}{Y}) + r(\emptyset) = |Y| = |X| + |Z| \Rightarrow r(X) = |X| \in \mathcal{I}.$

$\mathcal{I}$ ist ein Matroid:

c) $X, Y \in \mathcal{I}$, $|Y| = |X| + 1$, $Z = Y \setminus X$. z.z.: $\exists y \in Y: r(X \cup \{y\}) = |X| + 1$.

Ann.: $\forall y \in Y: r(X \cup \{y\}) = r(X) = |X|$, Sei $y_1, y_2 \in Z$

$\overset{vi)}{\Rightarrow} \underbrace{r(X \cup \{y_1\})}_{= r(X)} + \underbrace{r(X \cup \{y_2\})}_{= \cancel{r(X)}} \geq r(X \cup \{y_1, y_2\}) + \cancel{r(X)} - r(X)$

$\Rightarrow \underbrace{r(X)}_{= |X|} = r(X \cup Z) \geq r(Y) = |X| + 1$ ↯. $\square$

13.06.

6.9 Bem.: Es ex. noch viele weitere Charakterisierungen dieser Art.

6.10 Bsp. (Matroide): Sei $G = (V, E)$ zusammenhängend, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, M n-elementige Menge

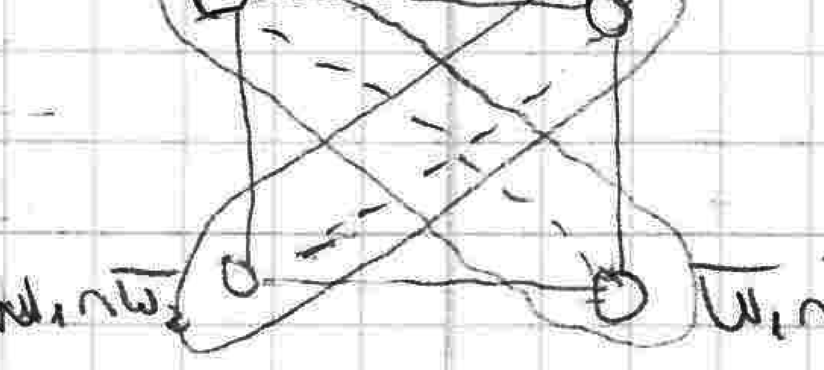
a) $\mathcal{I} = \{W \subseteq E : W \text{ Wald}\}$ graphisches Matroid

b) $\mathcal{I} = \{\{a_{\cdot j}, j \in J\} \subseteq [n] \text{ lin. unabh.}\}$ Matrixmatroid

c) $\mathcal{I} = \{F \subseteq E : \exists \text{ aufspannender Baum } T \subseteq E \setminus F\}$ Cographisches Matroid

$G \subseteq E$, $G \notin \mathcal{I} \Rightarrow \exists W \subseteq V : G \supseteq \delta(W)$

$\Rightarrow \mathcal{C} = \{\delta(W) \text{ min. und nonleer}\}$



Sei $\delta(W_1), \delta(W_2) \in \mathcal{C}$ zwei versch. Schnitte,

$e \in \delta(W_1) \cap \delta(W_2)$.

$\delta(W_1) \Delta \delta(W_2) = \delta(W_1) \cup \delta(W_2) - \delta(W_1) \cap \delta(W_2) \ldots$

$\Rightarrow \delta(W_1) \Delta \delta(W_2) = \delta(\underbrace{(W_1 \cap W_2) \cup (\overline{W_1} \cap \overline{W_2})}_{\neq \emptyset, \neq V}) \not\ni e$

$\Rightarrow \exists \delta(W) \in \mathcal{C} : \delta(W) \subseteq \delta(W_1) \Delta \delta(W_2).$

d) $\mathcal{I} = \binom{M}{k} = U_{n,k}$ <u>Uniformes Matroid</u>

$\mathcal{I} = \binom{M}{n} = U_{n,n}$ <u>Freies (triviales) Matroid</u>

e) $M = \dot{\bigcup}_{i=1}^{k} M_i$, $|M_i| = n_i$, $\sum n_i = n$, $k_i \leq n_i$, $i=1,\ldots,k$

$\mathcal{I} = \{ I \subseteq M : |I \cap M_i| \leq k_i, \ i=1,\ldots,k \}$ <u>Partitionsmatroid</u>

<u>6.11 Satz</u>: Jedes US ist als Durchschnitt von Matroiden darstellbar.

<u>Bew.</u>: Zz.: Ist $\mathcal{I}$ ein US auf M, dann gibt es Matroide $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_k$ mit $\mathcal{I} = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{I}_i$.

Sei $\mathcal{C}$ das Zirkuitsystem von $\mathcal{I}$

$\overset{6.8a)}{\Rightarrow}$ $\{C\}$ ist das Zirkuitsystem eines Matroids $\mathcal{I}_C$ $\forall C \in \mathcal{C}$

Wir zeigen: $\mathcal{I} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} \mathcal{I}_C$.

"$\subseteq$": $I \in \mathcal{I} \Rightarrow \nexists C \in \mathcal{C} : C \subseteq I \Rightarrow I \in \mathcal{I}_C \ \forall C \in \mathcal{C}$

"$\supseteq$": $I \in \bigcap_{C \in \mathcal{C}} \mathcal{I}_C \Rightarrow C \not\subseteq I \ \forall C \in \mathcal{C} \Rightarrow I \in \mathcal{I}$. $\square$

<u>6.12 Bsp.</u>: Sei $G = (V, E)$,

$\mathcal{I} = \{ S \subseteq V : S \text{ stabil} \}$, $\mathcal{C} = \{ \{u,v\} \subseteq V : uv \in E \}$

$\mathcal{I}_{\{u,v\}} = \{ S \subseteq V : |S \cap \{u,v\}| \leq 1 \}$, $\mathcal{I} = \bigcap_{uv \in E} \mathcal{I}_{\{u,v\}}$

<u>6.13 Frage und Def. (Orakel)</u>: Wie speichert man ein US / Matroid auf M?

a) Durch Auflistung von $\mathcal{I}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ oder rang?

Exponentieller Speicherplatzbedarf $\Rightarrow$ exp. Laufzeit

b) Durch ein <u>Unabh.</u>-, <u>Basis</u>-, <u>Zirkuit</u>- oder <u>Rangorakel</u>,

d.h. eine Funktion

$f : 2^M \to \{0,1\}$, $I \subseteq M \mapsto \begin{cases} 1, & I \in \mathcal{I}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

bzw. $\text{rang} : 2^M \to \mathbb{N}_0$, $I \mapsto \text{rang}\, I$.

c) Ein Aufruf eines Orakels zählt als elementare Operation

d) Ein polynomieller Alg., der Orakel aufruft, ist ein <u>orakel-polyn. Alg.</u>

<u>6.14 Alg. (Greedy-Alg. für US)</u>:

Input: $M = [n]$, $c \in \mathbb{R}^n$, Unabh.orakel $f : 2^M \to \{0,1\}$

Output: $I_G \in \mathcal{I}$.

```
Sortiere M nach Gewicht absteigend als c_1 ≥ ... ≥ c_n
I_G ← ∅
for i = 1, ..., n {
    if (c_i ≤ 0) break
    if (I_G ∪ {i} ∈ 𝓘) {        ⟺ f(I ∪ {i}) = 1
        I_G ← I_G ∪ {i}
    }
```

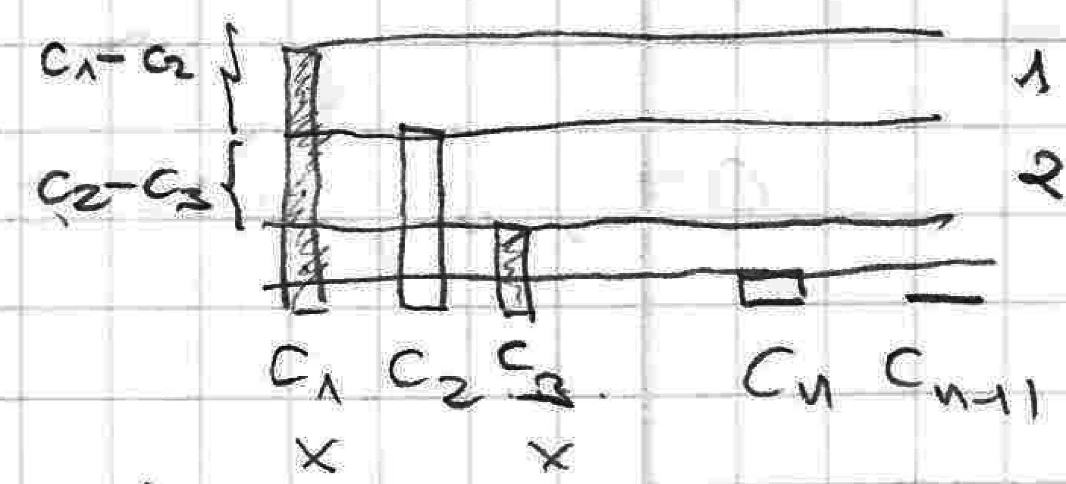
6.15 Satz (Jenkyns [1976], Güte des greedy-Alg. für US): Sei $\mathcal{I}$ US auf $M = [n]$, $c \in \mathbb{R}^M$,

$$I^* \in \underset{I \in \mathcal{I}}{\operatorname{argmax}}\ c(I)$$

und I_G das Ergebnis von Alg. 6.14. Dann gilt:

$$1 \geq \frac{c(I_G)}{c(I^*)} \overset{(*)}{\geq} \min_{I \subseteq M} \frac{\text{u-rang}(I)}{\text{rang}(I)} =: q(\mathcal{I}) \quad \underline{\text{Rangquotient von } \mathcal{I}}$$

und für jedes US gibt es $c \in \{0,1\}^M$, so daß $(*)$ mit Gleichheit gilt.



Bew.: O.B.d.A. sei $c_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Setze $c_{n+1} := 0$. Dann gilt

a) $$c(I^*) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|I^* \cap [i]|}_{\leq \text{rang}[i]} (c_i - c_{i+1})$$

b) $$c(I_G) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\underbrace{|I_G \cap [i]|}_{\text{Basis von } [i]}}_{\geq \text{u-rang}[i]} (c_i - c_{i+1})$$

$$\frac{|I_G \cap [i]|}{|I^* \cap [i]|} \geq \frac{\text{u-rang}[i]}{\text{rang}[i]} \geq q(\mathcal{I})$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} |I^* \cap [i]|\, q(\mathcal{I})\, (c_i - c_{i+1})$$

$$= q(\mathcal{I})\, c(I^*).$$

Sei $I \subseteq M$: $\frac{\text{u-rang}\, I}{\text{rang}\, I} = q(\mathcal{I})$, o.B.d.A. $I = [k]$ und $B = [\ell]$ Basis von I mit $|B| \overset{\ell}{=} \text{u-rang}(I)$. Setze $c_i := \begin{cases} 1, & i \in I \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow c(I_G) = \ell$, $c(I^*) = k\text{-rang}(I)$. $\square$

6.16 Korollar (Edmonds & Rado [ ]): Sei $\mathcal{I}$ US auf M. Dann ist $\mathcal{I}$ genau dann ein Matroid, wenn der greedy-Alg. für alle 0-1 gewichte c eine gewichtsmaximale unabhängige Menge liefert.

6.17 Beob.: Der greedy alg. 6.14 ist orakel polynomial.

6.18 Satz (Edmonds [1979], Lawler [1975]): Seien $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ zwei Matroide auf derselben Grundmenge M und jeweils gegeben durch ein Unabhängigkeitsorakel. Dann gibt es einen orakelpolynomialen Algorithmus, der das Optimierungsproblem

$$\max_{I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} c(I)$$

löst.

Bew.: DM II.

6.19 Bem. Über dem Durchschnitt von 3 Matroiden kann man vermutlich nicht in orakel polynomialer Zeit optimieren, da sich NP-schwere Probleme wie das TSP so formulieren lassen.

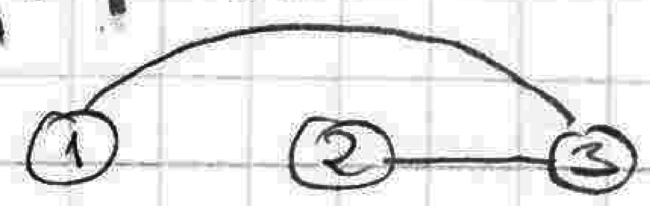
6.20 Bem. (greedy-Alg. für Min probleme über Basissystemen). Betrachte folgenden greedy-Alg. zur Lösung von $\min_{I \in \mathcal{B}} c(I)$:

Input: $M = [n]$, $c \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{I}$ gegeben durch Unabh.-orakel

Output: $B_G \in \mathcal{B}$

1. Sortiere M s.d. $c_1 \leq \ \leq c_n$.
2. $B_G \leftarrow \emptyset$
3. for $i = 1, \ , n$ {
4. if $(B_G \cup \{i\} \in \mathcal{I})$ {
5. $B_G \leftarrow B_G \cup \{i\}$
6. }
7. }

Man kann zeigen, daß $\mathcal{I}$ wieder genau dann ein Matroid ist, wenn dieser Alg. für alle 0-1 Gewichte eine kostenminimale Basis liefert. Angewendet auf US kann man aber keine Gütegarantie beweisen, wie das folgende Bsp zeigt. Betrachte dazu das US der stabilen Mengen und folgenden Graphen:



$c = (1, k, 2)$

Dann ist

$$\frac{c(I_G)}{c(B^*)} = \frac{1+k}{2} = \frac{k+1}{2} \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty .$$

14.05.13

7. Kürzeste Wege

7.1. Def. (Kürzester Weg): Sei $G=(V,E)$ ein Graph mit nichtnegativen Kantengewichten $c \in \mathbb{R}^E_{\geq 0}$, $s,t \in V$ zwei Knoten.

a) $P^* \in \operatorname{argmin}_{P \in \mathcal{P}(s,t)} c(P)$ Kürzester Weg von s nach t

b) $c(P^*) =: \operatorname{dist}_c(s,t)$ (gewichteter) Abstand von s und t

c) $\min_{P \in \mathcal{P}(s,t)} c(P)$ Kürzeste-Wege-Problem

7.2 Alg (von Dijkstra):

Input: $G=(V,E)$, $c \in \mathbb{R}^E_{\geq 0}$, $s,t \in V$

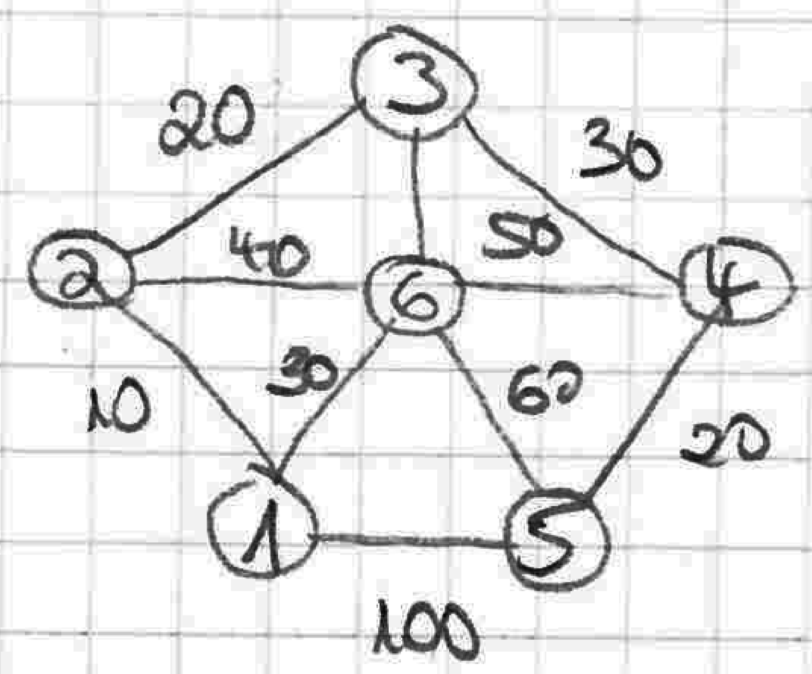
Output: $d(v) = \operatorname{dist}_c(s,v) \quad \forall v \in V$

$P^*(v) = (v, p(v), p^2(v), \ldots, s) \in \operatorname{argmin}_{P \in \mathcal{P}(s,v)} c(P) \quad \forall v \in V: d(v) < \infty$

Datenstrukturen: $\underset{\text{"distance"}}{d} \in (\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\})^V$, $\underset{\text{"predecessor"}}{p} \in V^V$, $\underset{\text{"untersuchte Knoten"}}{S} \subseteq V$

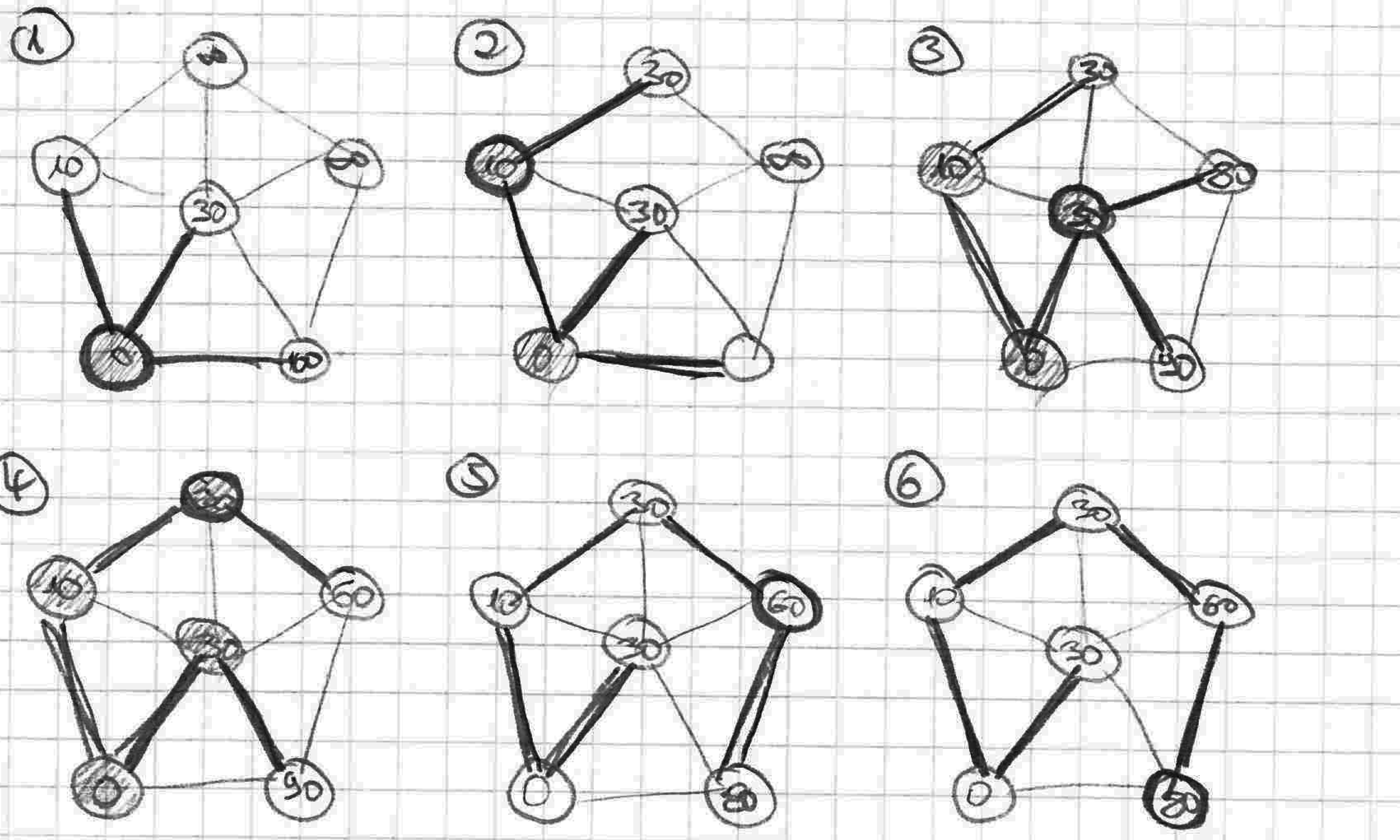
```
d(s) = 0, p(s) = s, S = {s}
forall v ∈ V \ S {
    if v ∈ δ(s)   { d(v) = c_sv, p(v) = s }
    else          { d(v) = +∞,  p(v) = s }
}
while ∃ u ∈ V \ S : d(u) < ∞ {
    wähle u ∈ argmin_{u ∉ S} d(u)
    S ← S ∪ {u}
    forall v ∈ δ(u) ∩ (V \ S) {
        if d(u) + c_uv < d(v) {
            d(v) ← d(u) + c_uv
            p(v) ← u
        }
    }
}
```

7.3 Bsp. (Dijkstras Algorithmus):



$s=1$, $t=5$

Iteration	S	u	d: 1	2	3	4	5	6	p: 1	2	3	4	5	6
1	$\{1\}$	$s=1$	0	10	∞	∞	100	30	1	1	1	1	1	1
2	$\{1,2\}$	2	0	10	30	∞	100	30	1	1	2	1	1	1
3	$\{1,2,6\}$	6	0	10	30	80	90	30	1	1	2	6	6	1
4	$\{1,2,3,6\}$	3	0	10	30	60	90	30	1	1	2	3	6	1
5	$\{1,2,3,4,6\}$	4	0	10	30	60	80	30	1	1	2	3	4	1
6	$\{1,2,3,4,5,6\}$	5	0	10	30	60	80	30	1	1	2	3	4	1



7.4 Lemma

In jedem Schritt von Alg. 7.2 gilt:

a) $d(v) = \mathrm{dist}_c(s,v) \quad \forall v \in S$

b) $d(v) = \mathrm{dist}_c^{G[S\cup\{v\}]}(s,v) \quad \forall v \notin S$

d.h. $d(v)$ ist die Länge eines kürzesten Weges von s nach v, falls v markiert ist, und die Länge eines kürzesten Weges von s nach v, der außer v nur markierte Knoten benutzt, sonst.

Bew.: Induktion über $k = |S|$

Ind. Anf.: $k = |S| = 1$ ✓

Ind. Schritt: $k = |S| \to k+1 = |S \cup \{u\}|$

a) Ann.: $d(u) = dist_c^{G[S \cup \{u\}]}(s,u) > dist_c(s,u)$

Sei $P \in \underset{P \in \mathcal{P}(s,u)}{\operatorname{argmin}}\, c(P)$, d.h. $c(P) = dist_c(s,u)$

$\Rightarrow P = (\underbrace{s, \ldots}_{\in S}\, \underbrace{w}_{\notin S}, \ldots, \underbrace{u}_{\notin S})$ mit einem ersten unmarkierten Knoten $w \notin S$ (zu Beginn der Iteration)

$\Rightarrow d(u) = \min_{v \notin S} d(v) \le d(w) \le c(P) = dist_c(s,u)$ ↯

b) Ann.: $d(v) = \min\{\underbrace{\min_{P \in \mathcal{P}^{G[S \cup \{u\}]}(s,v)} c(P)}_{\text{kürzester Weg über markierte Knoten}},\ \underbrace{\min_{P \in \mathcal{P}^{G[S \cup \{u\}]}(s,u)} c(P) + c_{uv}}_{\text{kürzester Weg über markierte Knoten inkl. } u\text{, wobei } u \text{ Vorletzter Knoten ist}}\} > dist_c^{G[S \cup \{u,v\}]}(s,v)$

$\Rightarrow \exists P \in G[S \cup \{u,v\}]: c(P) = dist_c^{G[S \cup \{u,v\}]}(s,v)$

$\Rightarrow P = (s, \ldots u, \ldots \underset{\underset{S}{\cap}}{w}, v)$, $w \in S$

$\Rightarrow dist_c^{G[S \cup \{u,v\}]}(s,v) \overset{\le}{=} c(P) \ge dist_c(w) + c_{wv} \ge d(v)$ ↯. □

7.5 Korollar: Alg 7.4 ist korrekt.

7.6 Bem.: Alg. 7.4 kann mit einer Laufzeit von $O(|V|^2 \langle C \rangle)$ implementiert werden, wobei $C = \max_{v \in V} \langle c_v \rangle$.

7.7 Bem.: Alg 7.4 funktioniert auch für gerichtete Graphen, falls $c \in \mathbb{R}^A_{\ge 0}$.

8. Maximale Flüsse in Netzwerken

8.1 Def. (Netzwerk, Fluss):

a) Ein Netzwerk $N=(V,A,c,s,t)$ besteht aus

i) einem gerichteten Graphen $D=(V,A)$

ii) einem Vektor von Kantenkapazitäten $c \in \mathbb{R}^A_{\geq 0}$

iii) zwei verschiedenen ausgezeichneten Knoten $s,t \in V$, der Quelle s und der Senke t

b) Ein (zulässiger) (s,t)-Fluss (oder st-Fluss) in N ist ein Vektor $x \in \mathbb{R}^A$, der folgende Bedingungen erfüllt

i) $0 \leq x_a \leq c_a \quad \forall a \in A$ Kantenkapazitäten

ii) $\underbrace{x(\delta^-(v))}_{\text{Fluss nach } v} = \underbrace{x(\delta^+(v))}_{\text{Fluss aus } v} \quad \forall v \in V \setminus \{s,t\}$ Flusserhaltung

c) Sei x ein zulässiger st-Fluss, $W \subseteq V$, $s \in W \not\ni t$. Dann heißt

$\partial x(v) := x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v))$ Nettoausfluss aus $v \in V$

$\partial x(W) := x(\delta^+(W)) - x(\delta^-(W))$ " " $W \subseteq V$,

$\partial x(s) =: v(x)$ Wert des Flusses x

d) $\max\limits_{x \text{ Fluss in } N} v(x)$ Maximales Flussproblem in N (Max-flow-Problem)

e) $x \in \operatorname{argmax} v(x)$ maximaler st-Fluss $\quad W \subseteq V, s \in W, t \notin W$.

8.2 Beob.: Sei x ein st-Fluss in einem Netzwerk N. Dann gilt:

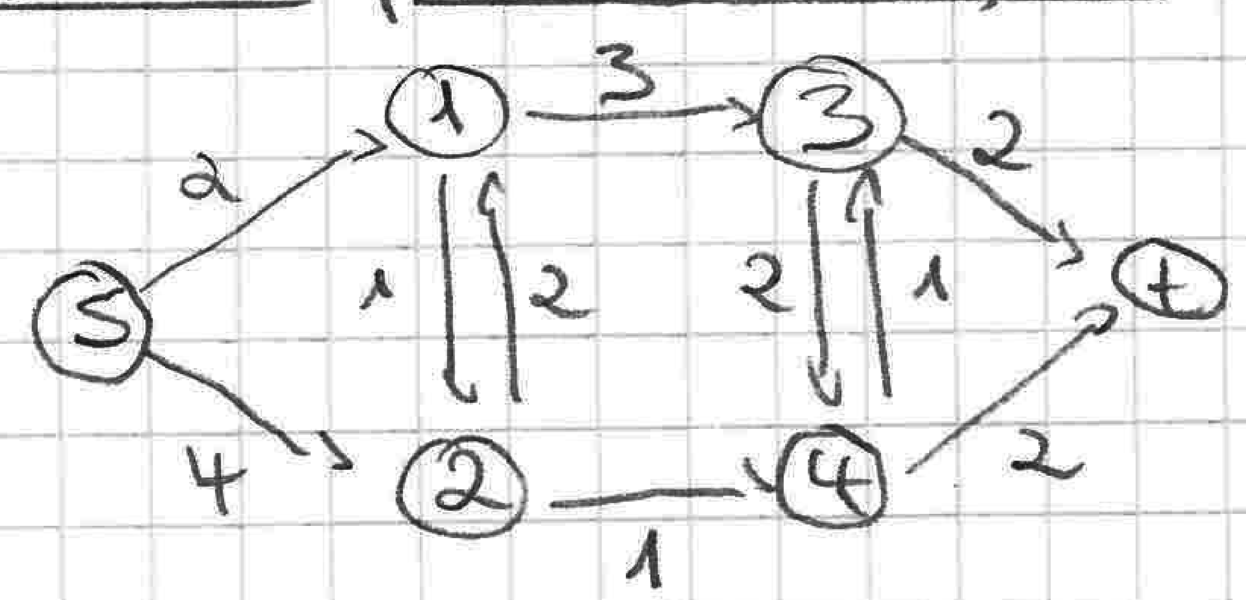
a) $\partial x(v) = 0 \quad \forall v \in V \setminus \{s,t\}$

b) $\partial x(W) = \partial x(s) \quad \forall W \subseteq V, s \in W \not\ni t$

c) $\partial x(t) = \partial x(s)$

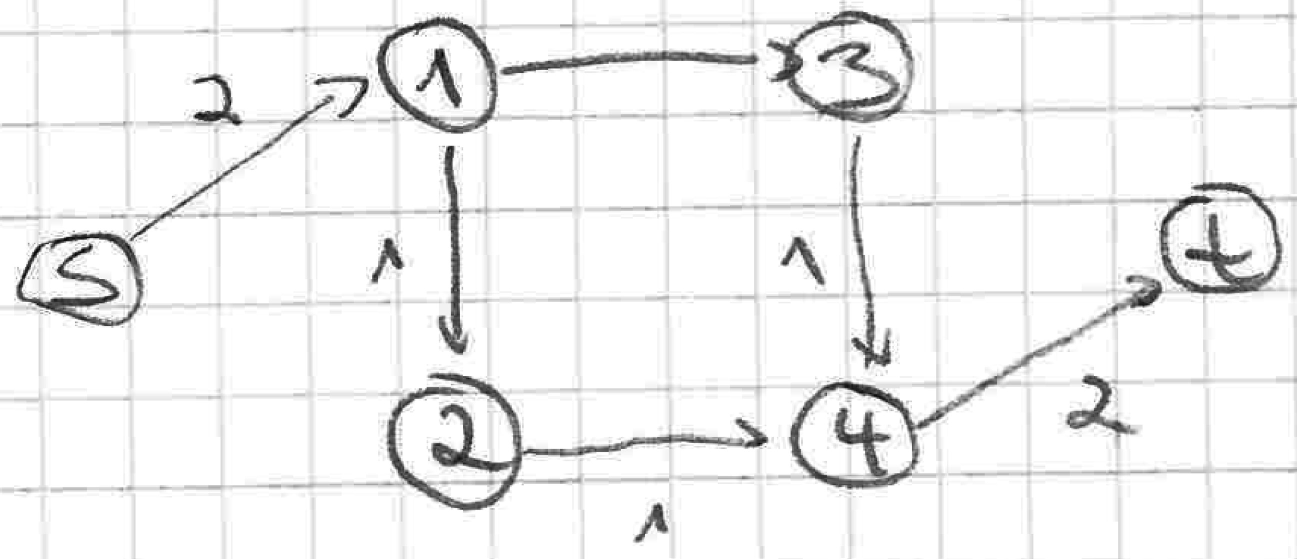
Bew.: a) Def., b), c) Übung □

8.3 Bsp. (Fluss):

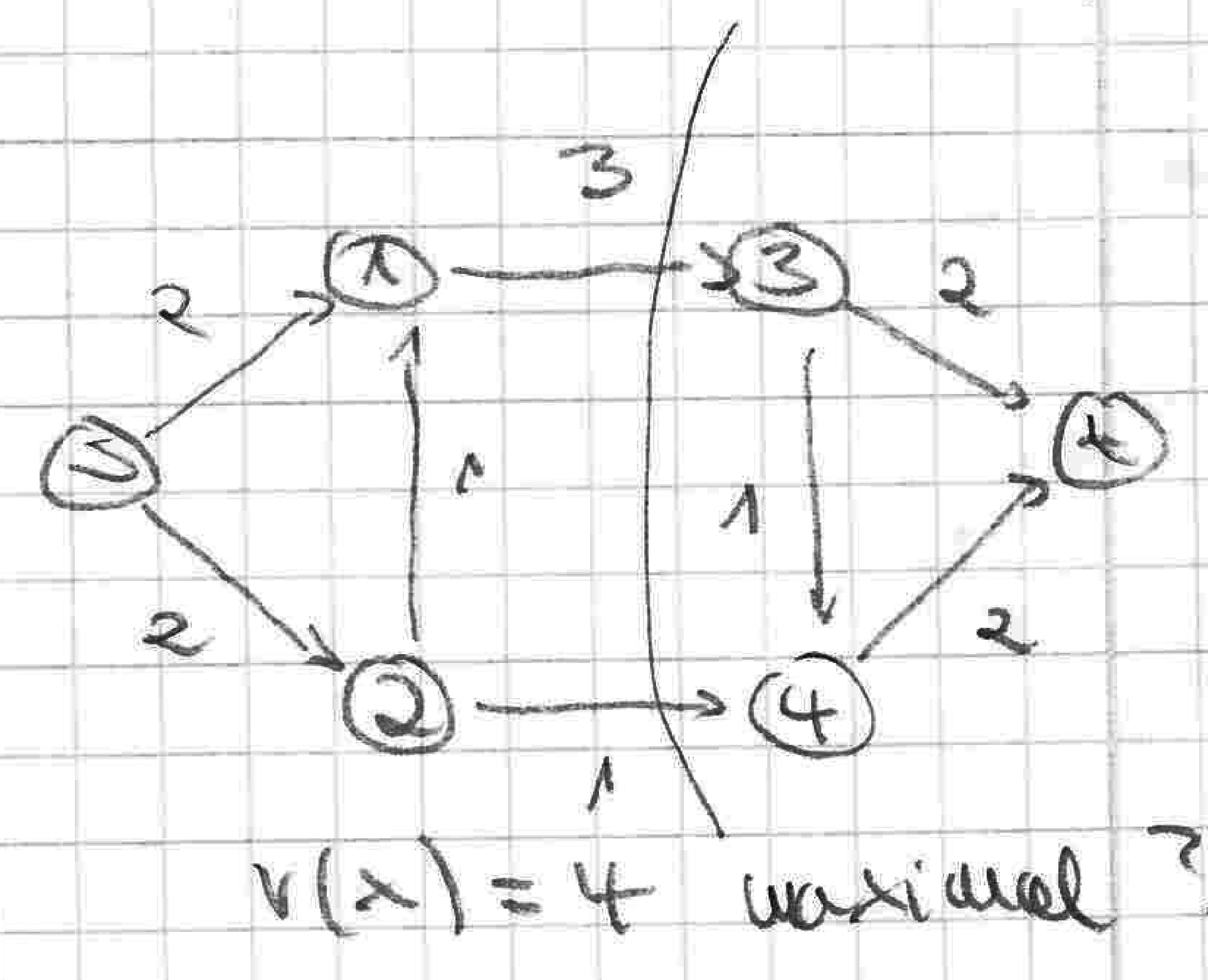


Netzwerk mit Kapazitäten

$c(\delta^+(\{s,1,2\})) = 4$



$v(x) = 2$



$v(x) = 4$ maximal?

8.4 Def. (Kapazität eines Schnittes): Sei N ein Netzwerk.

a) Sei $W \subseteq V$, $s \in W \not\ni t$. Dann heisst

$$\delta^+(W) =: (W : V \setminus W) \quad \text{(gerichteter) (s,t)-Schnitt oder st-Schnitt}$$

b) $c(\delta^+(W)) = c(W : V\setminus W)$ Kapazität des st-Schnittes $\delta^+(W)$

c) $\delta^+(W^*) \in \underset{\delta^+(W) \text{ st-Schnitt}}{\operatorname{argmin}} c(\delta^+(W))$ minimaler st-Schnitt

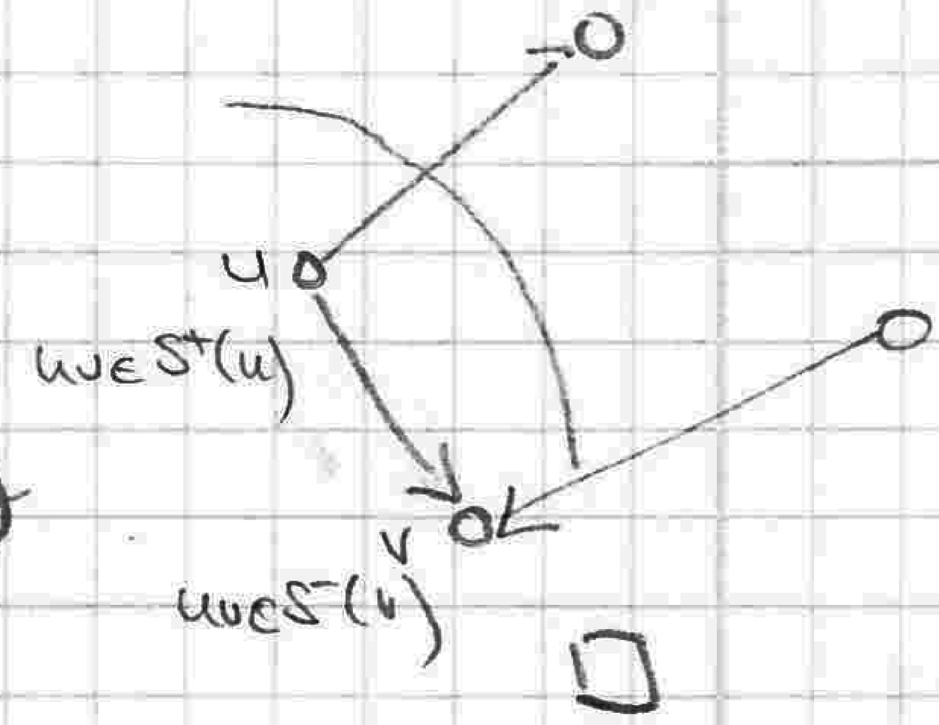
21.05.13

8.5 Prop.: Sei x st-Fluss in einem Netzwerk N und $\delta^+(W)$ ein st-Schnitt. Dann gilt:

$$v(x) \leq c(\delta^+(W)), \quad \text{insbesondere}$$

$$\max_{x \text{ st-Fluss}} v(x) \leq \min_{\delta^+(W) \text{ st-Schnitt}} c(\delta^+(W)).$$

Bew.:



$$
\begin{aligned}
c(\delta^+(W)) &\geq x(\delta^+(W)) - x(\delta^-(W)) \\
&= \sum_{v \in W} \underbrace{x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v))}_{= \partial x(v)} \\
&= \partial x(s) = v(x)
\end{aligned}
$$

□

8.6 Def. (Saturierter Schnitt): Sei x st-Fluss in N und $\delta^+(W)$ st-Schnitt. Dann heisst

$\delta^+(W)$ saturiert durch x $:\Leftrightarrow c(\delta^+(W)) = \partial x(W)$.

8.7 Def. (Augmentierendes Netzwerk): Sei x st-Fluss im Netzwerk $N = (V, A, c, s, t)$. Def. das augmentierende Netzwerk oder Restnetzwerk $N' = (V, A', c', s, t)$ von x bzgl. N durch

a) $uv \in A \Rightarrow uv \in A'$, $c'_{uv} := c_{uv} - x_{uv}$ Vorwärtsbogen

b) $uv \in A \Rightarrow vu \in A'$, $c'_{vu} := x_{uv}$ Rückwärtsbogen

8.8 Bem.: a) Das augmentierende Netzwerk N' gibt die zu einer Flusserhöhung verbleibende Kapazität an.

b) N' ist nicht notwendig einfach (kann parallele Bögen enthalten).

$u \xrightarrow{c'_{uv} = c_{uv} - x_{uv}} v$ Vorwärtsbogen

$u \xleftarrow{c'_{vu} = x_{vu}} v$ Rückwärtsbogen

8.9 Def. (Augmentierender Weg): Sei x st-Fluss in N und N' das augmentierende Netzwerk. Ein gerichteter uv-Weg P' in N' heißt augmentierend, wenn gilt

$$c'_a > 0 \quad \forall\, a \in P'.$$

8.10 Lemma: Sei P' ein aug. st-Weg in N' bzgl. x und

$$0 \leq \varepsilon \leq \min_{a \in P'} c'_a .$$

Dann ist $x^\varepsilon \in \mathbb{R}^A$ def. durch

$$x^\varepsilon_{uv} := \begin{cases} x_{uv}, & uv \notin P' \\ x_{uv} + \varepsilon, & uv \in P' \text{ Vorwärtsbogen} \\ x_{uv} - \varepsilon, & vu \in P' \text{ Rückwärtsbogen} \end{cases}$$

$u \xrightarrow{+\varepsilon} v$

$u \xleftarrow{-\varepsilon} v$

ein zul. st-Fluss in N und

$$v(x^\varepsilon) = v(x) + \varepsilon.$$

Wir sagen: x wurde durch Augmentieren um ε entlang P' zu x^ε erhöht.

Bew.: Wir zeigen zuerst, dass x' die Kapazitäts- und Flusserhaltungsbedingungen erfüllt.

a) $uv \notin P \Rightarrow 0 \leq x^\varepsilon_{uv} = x_{uv} \leq c$

$uv \in P'$ Vorwärtsbogen $\Rightarrow c'_{uv} = c_{uv} - x_{uv} \geq \varepsilon \geq 0$

$\Rightarrow 0 \leq x^\varepsilon_{uv} = x_{uv} + \varepsilon \leq x_{uv} + c_{uv} - x_{uv} = c_{uv}$

$vu \in P'$ Rückwärtsbogen $\Rightarrow c'_{vu} = x_{uv} \geq \varepsilon \geq 0$

$\Rightarrow 0 \leq x^\varepsilon_{uv} = x_{uv} - \varepsilon \leq x_{uv} \leq c_{uv}$

b) Sei $v \in V \setminus V(P) \Rightarrow x^\varepsilon(\delta^+(v)) - x^\varepsilon(\delta^-(v)) = x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v)) = 0$

Sei $v \in V(P) \setminus \{s,t\}$, $vw \in P'$, $uv \in P'$

$$\Rightarrow x^\varepsilon(\delta^+(v)) - x^\varepsilon(\delta^-(v))$$

$$= x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v))$$

$$\begin{cases} +\varepsilon & \text{, falls } vw \text{ Vorwärtsbogen} \\ \quad - (-\varepsilon) & \text{, falls } vw \text{ Rückwärtsbogen} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\varepsilon & \text{, falls } uv \text{ Rückwärtsbogen} \\ \quad - \varepsilon & \text{, falls } uv \text{ Vorwärtsbogen} \end{cases}$$

$$= 0$$

c) Sei $sw \in P'$.

$\Rightarrow x^{\varepsilon}(\delta^+(s)) - x^{\varepsilon}(\delta^-(s))$

$= x(\delta^+(s)) - x(\delta^-(s))$

$\begin{cases} +\varepsilon & \text{, falls } sw \text{ Vorwärtsbogen} \\ -(-\varepsilon) & \text{, falls } sw \text{ Rückwärtsbogen} \end{cases}$

$= v(x) + \varepsilon$. $\square$

8.11 Kor. Ein Fluss ist genau dann max., wenn es keinen augmentierenden Weg gibt.

8.12 Lemma: Sei x ein max. st-Fluss in einem Netzwerk und

$S := \{v \in V : \exists \text{ aug. } sv\text{-Weg}\} \cup \{s\}$

Dann ist $\delta^+(S)$ ein durch x saturierter st-Schnitt, d.h.

$c(\delta^+(S)) = v(x)$.

Bew.: x max. $\overset{8.11}{\Rightarrow} \nexists$ aug. st-Weg $\rightarrow t \notin S \Rightarrow \delta^+(S)$ st-Schnitt.

Sei $u \in S, v \notin S \Rightarrow c'_{uv} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_{uv} = c_{uv} & , uv \in A \\ x_{vu} = 0 & , vu \in A \end{cases}$

$\Rightarrow v(x) \overset{8.2b)}{=} x(\delta^+(S)) - x(\delta^-(S)) = c(\delta^+(S)) - 0 = c(\delta^+(S))$. $\square$

8.13 Satz: In einem Netzwerk $N = (V, A, c, s, t)$ mit ganzzahligen Kapazitäten $c \in \mathbb{N}_0^A$ existiert ein max. Fluss.

Bew.: Starte mit dem Fluss $x \equiv 0$. Solange x nicht max. ist, erhöhe den Wert von x entlang eines aug. Wegs um $\varepsilon = 1$. x und die Kapazitäten im aug. Netzwerk bleiben dabei stets ganzzahlig, d.h. der Schritt kann iteriert werden. Da der Flusswert durch die Kapazität jedes st-Schnittes beschränkt und insbesondere endlich ist, gibt es nur endlich viele aug. Wege. $\square$

8.14 Korollar: In einem Netzwerk $N = (V, A, c, s, t)$ mit rationalen Kapazitäten $c \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^A$ ex. ein max. Fluss.

Bew.: Sei $c_a = \frac{p_a}{q_a}$, $p_a \in \mathbb{Z}$, $q_a \in \mathbb{N}$, $Q := \text{kgV } q_a$.
Setze $\bar{c} = cQ$, berechne max. Fluss $\bar{x}$, setze $x = \bar{x}/Q$. $\square$

8.15 Satz (Max-Flow-Min-Cut-Theorem, Ford & Fulkerson [ ])

Sei $N=(V,A,c,s,t)$ ein Netzwerk mit rationalen Bogenkapazitäten. Dann ist der Wert des max. st-Flusses gleich der Kapazität des minimalen st-Schnittes

$$\max_{x \text{ st-Fluss in } N} v(x) = \min_{W \text{ st-Schnitt in } N} c(\delta^+(W))$$

8.16 Alg. (Augmenting Path-Algorithmus, Ford & Fulkerson [ ]):

Input: Netzwerk $N=(V,A,c,s,t)$, $c \in \mathbb{Q}^A_{\geq 0}$.

Output: max st-Fluss $x^* \in \mathbb{Q}^A_{\geq 0}$

1. $x^* \leftarrow 0$
2. while ($\exists$ augm. Pfad P') {
3. $\quad \varepsilon \leftarrow \min_{a \in P'} c'_a$
4. $\quad$ aug. x^* entlang P' um ε
5. }

8.17 Satz: Alg. 8.16 berechnet in endlicher Zeit von $O(v(x^*) \cdot |A| \cdot \max\langle c_a \rangle)$ einen max. st-Fluss.

8.18 Bem: Die Laufzeit von Alg. 8.16 ist nicht polynomial.

8.19 Satz (Successive Shortest Path Alg., Edmonds & Karp [1972]): Wenn man in Alg 8.16 immer entlang aug. Wege mit minimaler Bogenzahl augmentiert, terminiert Alg 8.16 nach $O(|A||V|)$ Iterationen mit einer Gesamtlaufzeit von $O(|A|^2|V| \max\langle c_a \rangle)$.

Bew.: / $\square$

9. Abzählen

9.1 Def (Zählfunktion): Sei $\mathcal{M} = \{M_n : n \in I\}$ eine Familie von Mengen mit Indexmenge I. Dann heisst

$$f: I \to \mathbb{N}_0, \ n \mapsto |M_n| \quad \text{Zählfunktion von } \mathcal{M}$$

9.2 Bsp. (Darstellungsmöglichkeiten für Zählfunktionen):

Sei $M_n = \dot{\bigcup}_{k=0}^{n} \binom{[n]}{k}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $f(n) = |S_n|$.

a) geschlossene Formel: $f(n) = 2^n$

b) Summenformel: $f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

c) Rekursion: $f(n) = 2 \cdot f(n-1)$, $f(0) = 1$

d) Erzeugende Funktion: $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n = \frac{1}{1-2z}$

9.3 Satz (Summenregel): Sei $M = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} M_i$ die disjunkte Vereinigung von Mengen M_i, $i = 1, \dots, n$. Dann gilt:

$$|M| = \sum_{i=1}^{n} |M_i|$$

9.4 Bsp (Summenregel):

$$\binom{[n]}{k} = \binom{[n-1]}{k} \dot{\cup} \left\{ M \cup \{n\} : M \in \binom{[n-1]}{k-1} \right\} \Rightarrow \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

9.5 Satz (Produktregel): Sei $M = \times_{i=1}^{n} M_i$ das Produkt der Mengen M_i. Dann gilt:

$$|M| = \prod_{i=1}^{n} |M_i|$$

9.6 Bsp. (Produktregel): $\left|\{0,1\}^n\right| = \left|\times_{i=1}^{n} \{0,1\}\right| = \prod_{i=1}^{n} \underbrace{|\{0,1\}|}_{=2} = 2^n$.

9.7 Satz (Gleichheitsregel): Sei $f: M \to N$ eine Bijektion zwischen endlichen Mengen M, N. Dann gilt

$$|M| = |N|.$$

9.8. Bsp. (Gleichheitsregel): $M = \dot{\bigcup}_{k=0}^{n} \binom{[n]}{k}$, $N = \{0,1\}^n$.

$$f: M \to N, \quad I \mapsto \chi^I$$

wobei $\chi^I_i := \begin{cases} 1, & i \in I \\ 0, & i \notin I \end{cases}$ der Inzidenz- oder charakteristische Vektor von I.

f Bijektion $\Rightarrow |M| = |N| = 2^n$.

9.9 Satz (Regel vom zweifachen Abzählen): Sei $I \subseteq M \times N$ eine Relation zwischen endlichen Mengen M, N und

$$f(m) := \left|\{n \in N : mIn\}\right|, \quad m \in M$$
$$f(n) := \left|\{m \in M : mIn\}\right|, \quad n \in N.$$

Dann gilt

$$\sum_{m \in M} f(m) = \sum_{n \in N} f(n).$$

Bew.: Sei $A \in \{0,1\}^{M \times N}$ die Inzidenzmatrix von I, d.h.

$$a_{mn} = \begin{cases} 1, & mIn \\ 0, & m \not I n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{m \in M} f(m) = \underbrace{\sum_{m \in M} \sum_{n \in N} a_{mn}}_{\text{zeilenweise Summation}} = \underbrace{\sum_{n \in N} \sum_{m \in M} a_{mn}}_{\text{spaltenweise Summation}} = \sum_{n \in N} f(n). \square$$

9.10 Bsp. (Teiler): $M = N = [n]$, $iIj :\Leftrightarrow i \mid j$.

$$M \quad \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & & 1 & & 1 & & 1 \\ 3 & & & 1 & & & 1 \\ 4 & & & & 1 & & \\ 5 & & & & & 1 & \\ 6 & & & & & & 1 \quad \ddots \end{array} = A$$

(Spalten: N)

$$f(i) = \left|\{1 \le j \le n : i \mid j\}\right| = \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \quad \text{\# Vielfache von } i$$
$$f(j) = \left|\{1 \le i \le n : i \mid j\}\right| = t(j) \quad \text{\# Teiler von } j$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} t(j) = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i} = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} =: n \underbrace{H(n)}_{n\text{-te harmonische Zahl}} \approx n \log n$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^{n} t(j)}{n} \approx \log n \quad \text{\# durchschnittliche Anzahl Teiler der ersten } n \text{ natürlichen Zahlen.}$$

9.11 Def. (k-Partition, k-Permutation, k-Multiteilmenge):

a) Eine Menge N heißt n-Menge, wenn $|N| = n$ ist.

b) Sei N eine n-Menge, $\emptyset \neq N_i \subseteq N$, $i = 1, \ldots, k \le n$

$$N = \bigcup_{i=1}^{k} \underbrace{N_i}_{\text{nichtleer}} \qquad k\text{-Partition der Menge } N$$

$$S_{n,k} := \left\{ {n \atop k} \right\} \quad \text{\# } k\text{-Partitionen einer } n\text{-Menge}$$

Stirlingzahl der 2. Art

$S_{0,0} := 1$

$S_{n,0} := 0$

$S_{n,k} := 0, \quad k > n$

c) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 1$ natürliche Zahlen.

$$n = \sum_{i=1}^{k} \underset{\geq 1}{n_i} \qquad \text{k-Partition der Zahl } n$$

$P_{n,k} :=$ # k-Partitionen der nat. Zahl n

d) Sei N eine Menge, $|N| = n$; $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$.

$\{(n_1, \dots, n_k) \in N^k : n_i \neq n_j \text{ für } i \neq j\}$ k-Permutation der Menge N

$n^{\underline{k}} := n \cdots (n-k+1)$ # k-Permutationen einer n-elementigen Menge

fallende Faktorielle.

$n^{\overline{k}} := n \cdots (n+k-1)$ steigende Faktorielle

Insbesondere ist

$n^{\underline{n}} = n! =$ # Permutationen einer n-elementigen Menge

$n^{\underline{k}} = k! \binom{n}{k} =$ # geordneten k-Teilmengen einer n-Menge

e) Sei $N = \bigcup_{i=1}^{k} N_i$ eine k-Partition von N, $|N| = n$.

$(N_1, \dots, N_k)$ geordnete k-Partition der Menge N

$k!\, S_{n,k} =$ # ||

f) Sei $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ k-Partition von $n \in \mathbb{N}$, σ Permutation von $[k]$

$(n_{\sigma(1)}, \dots, n_{\sigma(k)})$ geordnete k-Partition der Zahl n

$\binom{n-1}{k-1} =$ # "

9.13 Proposition: Die Anzahl der geordneten k-Partitionen einer natürlichen Zahl n ist $\binom{n-1}{k-1}$.

Bew: Mit Gleichheitsregel. Sei

$M = \{(n_1, \dots, n_k) : \sum_{i=1}^{k} n_i = n,\ n_i \geq 1\}$

$N = \binom{[n-1]}{k-1}$.

$f : M \to N$, $(n_1, \dots, n_k) \mapsto \{n_1, n_1+n_2, \dots, \underbrace{n_1 + \dots + n_{k-1}}_{\leq n-1}\}$

$g : N \to M$, $\{a_1, \dots, a_{k-1}\} \mapsto (a_1, a_2 - a_1, \dots, a_{k-1} - a_{k-2}, n - a_{k-1})$

$a_1 < \dots < a_{k-1}$ $\qquad \cancel{a_1} + a_2 - \cancel{a_1} + \dots + \cancel{a_{k-1}} - a_{k-2} + n - \cancel{a_{k-1}} = n$

$\Rightarrow g = f^{-1}$.

Die Aussage folgt auch aus Blatt 3, Aufgabe 2. □

9.12. Bsp. (geordnete k-Partition einer Zahl n): $n=5$, $k=3$:
$5 = 1+1+3 = 1+3+1 = 3+1+1 = 1+2+2 = 2+1+2 = 2+2+1$
$\binom{5-1}{3-1} = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$

9.11 Def. (Fortsetzung):

f) Sei N eine n-Menge.

$\{\{n_1, \dots, n_k\}\}$ <u>k-Multiteilmenge von N</u>

$$\frac{n^{\overline{k}}}{k!} = \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} = \binom{n+k-1}{k} \text{ \# } k\text{-Multiteilmenge von } N$$

9.13 Prop.: Die Anzahl der k-Multiteilmengen einer n-Menge N ist $\binom{n+k-1}{k}$.

Bew.: Mit Gleichheitsregel.

$$M = \left(\!\binom{N}{k}\!\right)$$

$$N = \binom{[n+k-1]}{k}$$

$$f: M \to N, \{n_1 \leq \dots \leq n_k\} \mapsto \{n_1, n_2+1, n_3+2, \dots, n_k+k-1\}$$

$$g: N \to M, \{\underbrace{a_1}_{\leq n} < \dots < \underbrace{a_k}_{\leq n+k-1}\} \mapsto \{\underbrace{a_1}_{\leq n}, a_2-1, a_3-2, \dots, \underbrace{a_k-(k-1)}_{\leq n}\}$$

$\Rightarrow g = f^{-1}$. $\square$

9.15 Kor. (Zählen von Funktionen): Sei $\overset{\text{Fächer}}{N}$ n-Menge, $\overset{\text{Bälle}}{M}$ m-Menge.

a) $|\{f: M \to N\}| = n \cdot \ldots \cdot n = n^m$

b) $|\{f: M \to N \text{ injektiv}\}| = n(n-1)\cdots(n-m+1) = n^{\underline{m}}$ höchstens 1 Ball / Fach

c) $|\{f: M \to N \text{ surjektiv}\}| = |\underbrace{\{\{f^{-1}(n) : n \in N\}\}}_{\text{geordnete } n\text{-Partition von } M}| = n! \, S_{m,n}$ mindestens 1 Ball / Fach

d)
$$\begin{aligned}
n^m &= |\{f: M \to N\}| \\
&= \sum_{A \subseteq N} |\{f: M \to A \text{ surjektiv}\}| \\
&= \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{A \subseteq N \\ |A| = k}} \underbrace{|\{f: M \to A \text{ surjektiv}\}|}_{k!\, S_{m,k}} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \binom{n}{k} k! \, S_{m,k} \\
&= \sum_{k=1}^{m} n^{\underline{k}} \, S_{m,k} \\
&\overset{S_{m,0}=0}{=} \sum_{k=0}^{m} n^{\underline{k}} \, S_{m,k}
\end{aligned}$$

9.16 Kor.: Es gilt:
$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \, x^{\underline{k}}, \quad n \geq 0, \; x \in \mathbb{C}$$

Bew.: Setze in 9.15 d) $x = n$, $m = n$. Die Polynome x^n und $\sum_{k=0}^{n} S_{n,k} x^{\underline{k}}$ sind dann für alle $x \in \mathbb{N}$ gleich, also gleich. $\square$

9.17 Bsp: Wie viele Möglichkeiten gibt es, m Bälle auf n Fächer …

M: m-Menge von (unterscheidbaren / nicht unterscheidbaren) Bällen

N: n-Menge " " Fächern

Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Bälle auf die Fächer aufzuteilen?

M unterscheidbar	N unterscheidbar	beliebig	injektiv	surjektiv
✓	✓	n^m	$n^{\underline{m}}$	$n!\,S_{m,n}$
–	✓	$\binom{n+m-1}{m}$ m-Multiteilmenge von N	$\binom{n}{m}$ m-Teilmenge von N	$\binom{m-1}{n-1}$ geordnete n-Partition der Zahl m
✓	–	$\sum_{k=1}^{n} S_{m,k}$ k = # belegte Fächer	1, falls $n \geq m$ 0, sonst	$S_{m,n}$
–	–	$\sum_{k=1}^{n} P_{m,k}$	1, falls $n \geq m$ 0, sonst	$P_{m,n}$

9.18 Def. (Zyklus einer Permutation, Fixpunkt): Sei $\pi : [n] \to [n]$ eine Permutation.

a) $(i, \pi(i), \dots, \pi^{k-1}(i))$ mit $\pi^k(i) = i \neq \pi^j(i)$, $j < k$ Zykel der Länge k

b) Ein Zykel der Länge $= 1$ heißt Fixpunkt.

c) $\Pi_{n,k} = \{$Permutationen von $[n]$ mit k Zykeln$\}$, $1 \leq k \leq n$, $\Pi_n = \bigcup_{k=1}^{n} \Pi_{n,k}$

9.19 Bsp (Zykel):

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5, & 1, & 3, & 6, & 2, & 4 \end{pmatrix} \qquad 1 \to 5 \to 2 \qquad 3 \qquad 4 \to 6$$

$$= (1,5,2)(3)(4,6)$$

9.20 Prop.: Jede Permutation ist eine disjunkte Vereinigung von Zykeln.

Bew.: Für Permutation $\pi : [n] \to [n]$ betrachte Digraph

$$D = ([n], \{(i, \pi(i)) : i \in [n]\})$$

$\Rightarrow \delta^+(i) = \delta^-(i) = 1 \quad \forall\, i \in [n]$

$\Rightarrow D$ zerfällt in gerichtete Kreise $D_j = (i^j_1, \dots, i^j_{n_j})$, $j = 1, \dots, k$

$\Rightarrow \pi = (i^1_1, \dots, i^1_{n_1}) \dots (i^k_1, \dots, i^k_{n_k})$. $\square$

9.21 Bem. a) Bei der Darstellung einer Permutation als Vereinigung von Zykeln spielt die Reihenfolge der Zykel und das 1. Element jedes Zykels keine Rolle.

b) Die Zykelzerlegung einer Permutation $\pi:[n]\to[n]$ induziert eine Partition der Menge $[n]$.

9.22 Bsp.:

a) $\pi = (1,5,2)(3)(4,6) = (3)(1,5,2)(4,6) = (3)(5,2,1)(6,4)$

$[6] = \{1,5,2\} \dot\cup \{3\} \dot\cup \{4,6\}$.

b) Permutationen $\pi:[3]\to[3]$

π	1 2 3	2 1 3	1 3 2	3 2 1	2 3 1	3 1 2
Zykel	(1)(2)(3)	(1,2)(3)	(1)(2,3)	(1,3)(2)	(1,2,3)	(1,3,2)
	3 Zykel	2 Zykel			1 Zykel	

9.23 Def. (Stirlingzahl 1. Art): Die Anzahl der Permutationen von $[n]$ mit k Zykeln, $0\le k\le n\in\mathbb{N}$, $k+n\ge 1$ heisst $s_{n,k} := \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ Stirlingzahl 1. Art, $s_{0,0} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} := 1$. ($s_{0,k} := 0$, $k\ge 1$, $s_{n,0} := 0$, $n\ge 1$), $s_{n,k} := 0$, $k<0$

9.24 Def (Typ einer Permutation): Sei $\pi:[n]\to[n]$ eine Permutation.

a) $b_i(\pi) :=$ # Anzahl der Zykel der Länge i von π

b) $b(\pi) := \sum_{i=1}^{n} b_i(\pi)$

c) $t(\pi) := \prod_{i=1}^{n} i^{b_i(\pi)}$ Typ von π

9.25 Beob.: Sei $\pi:[n]\to[n]$ eine Permutation.

a) $\sum_{i=1}^{n} i\, b_i(\pi) = n$ Partition von n

b) $|\{ b(\pi) : \pi:[n]\to[n] \text{ Perm}\}| =$ # Partitionen der Zahl n.

9.26 Bsp: $n=4$

Partition	Typ		
4	4^1	=	$1^0 2^0 3^0 4^1$
1+3	$1^1 3^1$	=	$1^1 2^0 3^1 4^0$
1+1+2	$1^2 2^1$	=	$1^2 2^1 3^0 4^0$
1+1+1+1	1^4	=	$1^4 2^0 3^0 4^0$
2+2	2^2	=	$1^0 2^2 3^0 4^0$

9.27 Satz Die Anzahl der Permutationen π von $[n]$ vom Typ $t(\pi) = \prod_{i=1}^{n} i^{b_i}$ ist $\dfrac{n!}{\prod_{i=1}^{n} b_i!\; t(\pi)}$.

Bew.: $\pi = \underbrace{()\dots()}_{b_1} \dots \underbrace{()\dots()}_{b_n}$

Es gibt $n!$ Möglichkeiten, die Leerstellen zu füllen, $\prod_{i=1}^{n} b_i!$ Möglichkeiten, die Zykel zu permutieren, und $\prod_{i=1}^{n} i^{b_i}$, das erste Element jedes Zykels zu wählen.

9.28 Bsp.: $n=5$ $\qquad 5! = 120$

Partition	Typ	$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} b_i!\, i^{b_i}}$	k	$s_{n,k} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$
5	5^1	24	1	$s_{5,1} = 24$
$1+4$	$1^1 4^1$	30	2	
$2+3$	$2^1 3^1$	20	2	$s_{5,2} = 50$
$1+1+3$	$1^2 3^1$	20	3	
$1+2+2$	$1^1 2^2$	15	3	$s_{5,3} = 35$
$1+1+1+2$	$1^3 2^1$	10	4	$s_{5,4} = 10$
$1+1+1+1+1$	1^5	1	5	$s_{5,5} = 1$

9.29 Satz (Rekursion für Stirlingzahlen 1. Art): Es gilt

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1)\, s_{n-1,k}, \quad 1 \le k \le n. \iff \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

Bew.: Sei $\pi = \prod_{i=1}^{k} (z_i)$.

a) O.B.d.A. $(z_k) = (n) \Rightarrow \pi' = \prod_{i=1}^{k-1} (z_i) \in \Pi_{n-1,k-1}$: $s_{n-1,k-1}$ Möglichk.

b) O.B.d.A. $(z_k) = (n\, j_2^k \dots j_{n_k}^k) \Rightarrow \pi'' = \underbrace{\prod_{i=1}^{k-1} (z_i)\,(j_2^k \dots j_{n_k}^k)}_{s_{n-1,k} \text{ Möglichkeiten}} \in \Pi_{n-1,k}$

$j_2^k = \pi(n)$: $n-1$ Möglichkeiten $\square$

c) $s_{1,1} = \underbrace{s_{0,0}}_{=1} + 0\, \underbrace{s_{0,1}}_{=0} = 1$, $s_{1,0} = 0$

9.30 Bsp. (Stirlingdreieck 1. Art):

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1

Insbesondere (Bew. Übung):

a) $s_{n,1} = (n-1)!$, $n \ge 1$

b) $s_{n,n-1} = \binom{n}{2}$, $n \ge 1$

c) $s_{n,n} = 1$

d) $s_{n,2} = (n-1)!\, H_{n-1}$, $n \ge 1$.

9.31 Satz: Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} s_{n,k}\, x^k = x(x+1)\cdots(x+n-1) = x^{\overline{n}}, \quad n \ge 0,\ x \in \mathbb{C}.$$

Bew.: $x^{\overline{n}}$ ist ein Polynom vom Grad n. Sei $a_{n,k}$, $0 \le k \le n$, def. als

$$x^{\overline{n}} =: \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, x^k.$$

a) $n = 0$: $x^{\overline{0}} = a_{0,0}\, x^0 = a_{0,0} = 1 = s_{0,0}$.

b) $n > 0$:

$$\begin{aligned}
x^{\overline{n}} &= (x+n-1)\, x^{\overline{n-1}} \\
&= (x+n-1) \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}\, x^k \\
&= x \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}\, x^k + (n-1) \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}\, x^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{n-1,k-1}\, x^k + \sum_{k=0}^{n-1} (n-1) a_{n-1,k}\, x^k \\
&= (n-1) a_{n-1,0} \cdot x^0 \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \left[a_{n-1,k-1} + (n-1) a_{n-1,k} \right] x^k \\
&\quad + a_{n-1,n-1}\, x^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, x^k
\end{aligned}$$

Koeff.-vergleich $\Rightarrow$

$$\begin{cases}
a_{n,k} = a_{n-1,k-1} + (n-1) a_{n-1,k}, & 1 \le k \le n-1 \\
a_{n,0} = 0 & (x^{\overline{n}} \text{ hat keinen konst. Term}) \\
a_{n,n} = a_{n-1,n-1} = 1
\end{cases}$$

$\Rightarrow a_{n,k} = s_{n,k}, \quad 0 \le k \le n$ □

9.32 Kor.: Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k}\, x^k = x(x-1)\cdots(x-n+1) = x^{\underline{n}}, \quad n \ge 0,\ x \in \mathbb{C}.$$

Bew.: Setze in 9.28 $(-x)$ ein:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} s_{n,k} (-x)^k &= (-x)(-x+1)\cdots(-x+n-1) \\
&= (-x)\left[-(x-1)\right]\cdots\left[-(x-n+1)\right]
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} s_{n,k} (-1)^k x^k = (-1)^n x(x-1)\cdots(x-n+1) = (-1)^n x^{\underline{n}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} s_{n,k} (-1)^{k-n} x^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k}\, x^k = x^{\underline{n}}$$ □

9.33 Bsp. (Fakultäten und Stirlingzahlen 1. Art):

a) $x^{\overline{4}} = \underbrace{x(x+1)(x+2)}_{= x^{\overline{3}}}(x+3)$

0	1				
1	0	1			
2	0	1	1		
3	0	2	3	1	
4	0	6	11	6	1

$$= (\underset{s_{3,1}}{2}x + \underset{s_{3,2}}{3}x^2 + \underset{s_{3,3}}{1}\cdot x^3)(x+3)$$

$$= \underset{s_{3,0}+3s_{3,1}}{6}x + \underset{s_{3,1}+3s_{3,2}}{(2+3\cdot 3)}x^2 + \underset{s_{3,2}+3s_{3,3}}{(3+3\cdot 1)}x^3 + \underset{s_{3,3}}{1}x^4$$

$$= \underset{s_{4,1}}{6}x + \underset{s_{4,2}}{11}x^2 + \underset{s_{4,3}}{6}x^3 + \underset{s_{4,4}}{1}\cdot x^4$$

b) $x^{\underline{4}} = \underbrace{x(x-1)(x-2)}_{= x^{\underline{3}}}(x-3)$

$$= (2x - 3x^2 + 1\cdot x^3)(x-3)$$

$$= -6x + (2+3\cdot 3)x^2 - (3+3\cdot 1)x^3 + 1\cdot x^4$$

$$= -6x + 11x^2 - 6x^3 + x^4.$$

9.34 Satz (Rekursion für Stirlingzahlen 2. Art): Es gilt

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k\,S_{n-1,k}, \quad 1 \le k \le n.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}, \quad 1 \le k \le n$$

Bew.: Sei $[n] = \dot{\bigcup}_{i=1}^{k} N_i$ eine k-Partition.

a) O.B.d.A. $N_k = \{n\} \Rightarrow [n-1] = \dot{\bigcup}_{i=1}^{k-1} N_i$, $S_{n-1,k-1} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$ Mögl.

b) O.B.d.A. $\underbrace{N_k = \{n, j_1^k, \ldots, j_{n_k}^k\}}_{k\text{ Möglichkeiten}} \Rightarrow \underbrace{[n-1] = \dot{\bigcup}_{i=1}^{k-1} N_i \cup \{j_1^k, \ldots, j_{n_k}^k\}}_{S_{n-1,k} = \left\{ {n-1 \atop k} \right\}\text{ Mögl.}}$

c) $S_{1,1} = \underbrace{S_{0,0}}_{=1} + 1\,\underbrace{S_{0,1}}_{=0} = 1$, $S_{1,0} = 0$

9.35 Bsp. (Stirlingdreieck 2. Art):

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	1	3	1			
4	0	1	7	6	1		
5	0	1	15	25	10	1	
6	0	1	31	90	65	15	1

Insbesondere (Bew. Übung):

a) $S_{n,1} = 1, \quad n \ge 1$

b) $S_{n,n-1} = \binom{n}{2}$

c) $S_{n,n} = 1$

d) $S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$

9.36 Bem.: Es gilt

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}\, x^{\underline{k}}$$ Stirlingzahlen 2. Art

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[n \atop k \right] x^{k} = \sum_{k=0}^{n} s_{n,k}\, x^{k}$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left[n \atop k \right] x^{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k}\, x^{k}$$ Stirlingzahlen 1. Art

$$(-x)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k} (-x)^{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n} s_{n,k}\, x^{k} = (-1)^{n} x^{\overline{n}}$$ Reziprozitätsgesetz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$ Binomialkoeff.

9.37 Def. ((Allg.) Binomialkoeffizient): Sei $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\binom{z}{k} := \frac{z(z-1)\cdots(z-k+1)}{1\cdot 2 \cdots k} = \frac{z^{\underline{k}}}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$ Verallg. Binomialkoeffizient

$$\binom{z}{k} := 0, \quad k < 0$$

9.38 Satz (Rekursion für allg. Binomialkoeffizienten):

$$\binom{z}{k} = \binom{z-1}{k-1} + \binom{z-1}{k}, \quad z \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}$$

Bew.:

a) $n,k \in \mathbb{N}$, $k \le n$: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \Leftarrow$ 3.2 b)

$n,k \in \mathbb{N}$, $k > n$: $\underbrace{\binom{n}{k}}_{=0} = \underbrace{\binom{n-1}{k-1}}_{=0} + \underbrace{\binom{n-1}{k}}_{=0}$

$n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k<0$: $\underbrace{\binom{n}{k}}_{=0} = \underbrace{\binom{n-1}{k-1}}_{=0} + \underbrace{\binom{n-1}{k}}_{=0}$

$\Rightarrow \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}$

b) $$\binom{z}{k} = \underbrace{\frac{z(z-1)\cdots(z-k+1)}{k!}}_{\text{Polynom vom Grad } k} = \underbrace{\binom{z-1}{k-1} + \binom{z-1}{k}}_{\text{Polynom vom Grad } k}$$

$= p(z) \qquad = q(z)$

$p(z) = q(z)$ für $z = 0, 1, \ldots, k$

Fundamentalsatz der Algebra $\Rightarrow p(z) = q(z) \ \forall z \in \mathbb{C}$. $\square$

9.39 Folg. (Negation für Binomialkoeff.):

$$\binom{-z}{k} = (-1)^k \binom{z+k-1}{k}, \quad z \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Bew.: $$\binom{-z}{k} = \frac{(-z)^{\underline{k}}}{k!} \overset{\text{Reziprozität}}{=} \frac{(-1)^k z^{\overline{k}}}{k!} = (-1)^k \binom{z+k-1}{k}. \ \square$$

9.40 Bsp. ($\binom{n}{k}$ Pascalsches Dreieck):

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$r=3, n=2$

$1+4+10=\binom{6}{2}=15$

Insbesondere

a) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ Zeilensumme

b) $\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}=\sum_{r=k}^{n}\binom{r}{k}\overset{\text{Blatt 3 Aufgabe 2 i)}}{=}\binom{n+1}{k+1}$ Spaltensumme

c) $\sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{k}=\binom{n+r+1}{n}$ Diagonalsumme (Haus Übung)

9.41 Satz (von Vandermonde):

$$\binom{x+y}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k},\quad x,y\in\mathbb{C},\ n\in\mathbb{N}_0.$$

Bew.: Seien $x,y\in\mathbb{N}_0$, X x-Menge, Y y-Menge.

$$\binom{x+y}{n}=\left|\binom{X\,\dot\cup\, Y}{n}\right|$$

$$=\left|\dot\bigcup_{k=0}^{n}\left\{\binom{X}{k}\,\dot\cup\binom{Y}{n-k}\right\}\right|$$

$$\overset{\text{Summenregel, Produktregel}}{=}\sum_{k=0}^{n}\left|\binom{X}{k}\right|\cdot\left|\binom{Y}{n-k}\right|$$

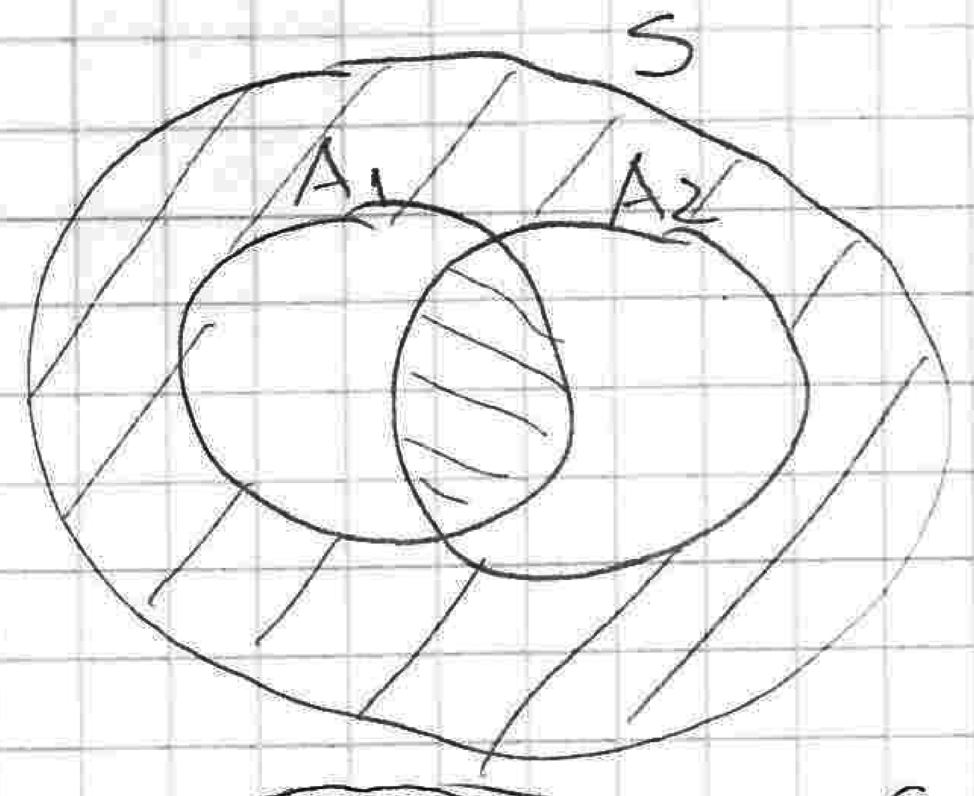
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}.$$

$\Rightarrow$ $\underbrace{p(x,y)}_{\text{Polynom in } x,y \text{ vom Grad } n}=\underbrace{q(x,y)}_{\text{Polynom in } x,y \text{ vom Grad } n}$ für $x,y=0,\dots,n$

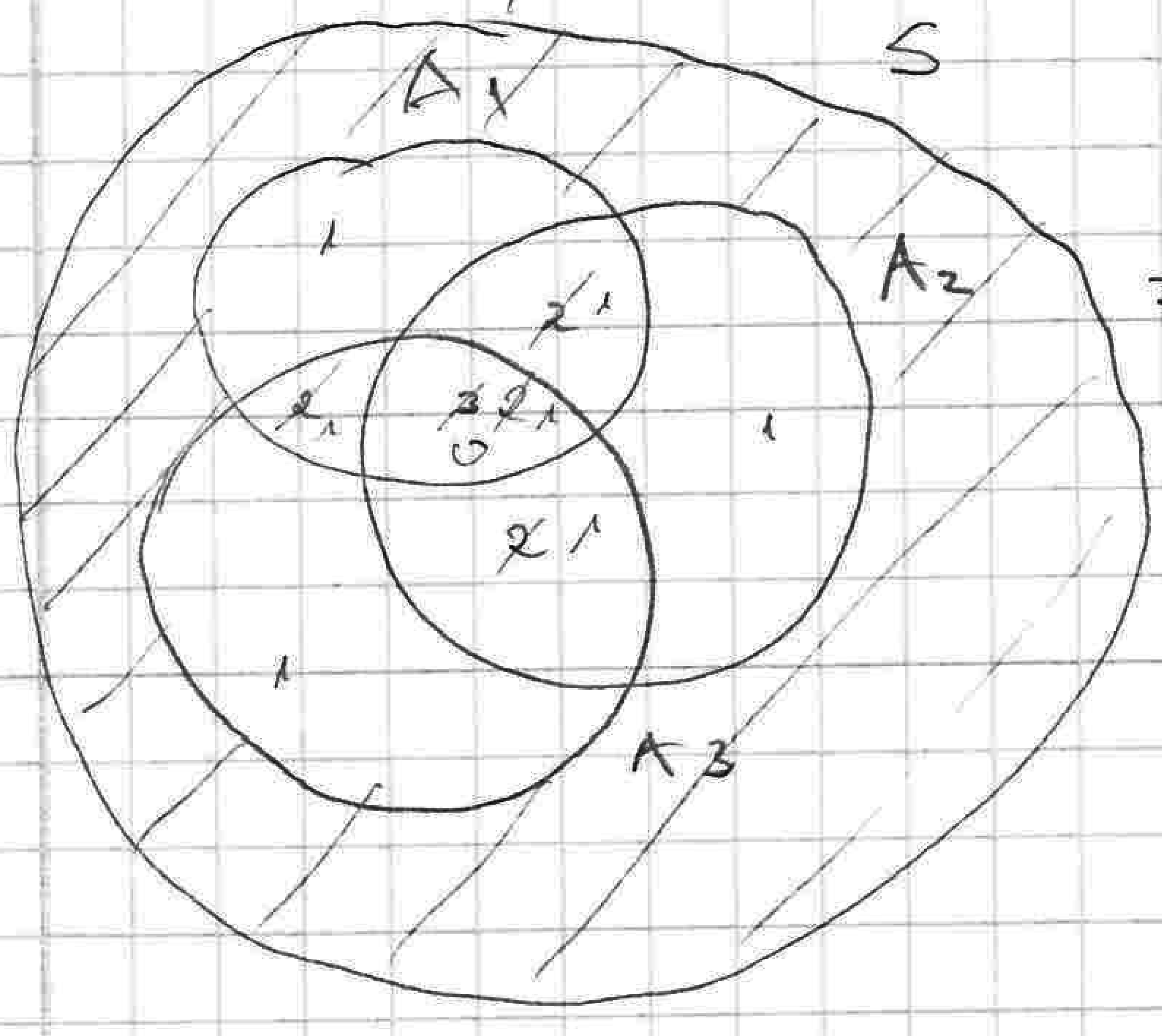
$\Rightarrow p(x,y)=q(x,y)\quad\forall x,y\in\mathbb{C}.$ $\square$

10. Inklusion – Exklusion

10.1 Motivation: Sei S eine n-Menge, $A_1, \dots, A_m \subseteq S$



$$|S \setminus (A_1 \cup A_2)| = |S| - (|A_1| + |A_2|) + |A_1 \cap A_2|$$



$$\begin{aligned} &|S \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| \\ &= |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) \\ &\quad + (|A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_3|) \\ &\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned}$$

10.2 Satz: Sei S eine n-Menge, $A_1, \dots, A_m \subseteq S$. Sei

$$N(I) := \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| \qquad \forall\, I \in \binom{[m]}{j},\ j = 1, \dots, m$$

$$N_j := \sum_{|I| = j} N(I) \qquad j = 1, \dots, m$$

$$N_0 := |S| = n.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left|S \setminus \bigcup_{i=1}^m A_i\right| &= |S| - \sum_{i=1}^m |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| - \dots + (-1)^m \left|\bigcap_{i=1}^m A_i\right| \\ &= |S| + \sum_{j=1}^m \sum_{I \in \binom{[m]}{j}} (-1)^j \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| \\ &= N_0 - N_1 + N_2 - (-1)^m N_m \\ &= \sum_{j=0}^m (-1)^j N_j. \end{aligned}$$

Bew.: Sei $x \in S$.

a) $x \notin \bigcup_{i=1}^m A_i \Rightarrow x$ wird auf beiden Seiten der Gleichung genau einmal gezählt.

b) Sei $\{i_1, \dots, i_k\} = \{i \in [m] : x \in A_i\}$, $k \ge 1$

$\iff x \in \bigcap_{i \in I} A_i \quad \forall\, I \in \binom{\{i_1, \dots, i_k\}}{j},\ j = 1, \dots, k.$

$$0 = \left|\left(S \setminus \bigcup_{i=1}^m A_i\right) \cap \{x\}\right| = |S \cap \{x\}| + \sum_{j=1}^m \sum_{I \in \binom{[m]}{j}} (-1)^j \left|\bigcap_{i \in I} A_i \cap \{x\}\right|$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{k} \sum_{I \in \binom{\{i_1, \dots, i_k\}}{j}} (-1)^j \cdot 1$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \cdot 1^{k-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \cdot 1^{k-j}$$

$$\underset{\text{Satz 3.5}}{\overset{\text{Binomischer}}{=}} (1-1)^k$$

$$= 0 \qquad (k \geq 1). \qquad \square$$

10.3 Korollar (Prinzip der Inklusion - Exklusion): Sei S eine n-Menge und $E_1, \dots, E_m$ Eigenschaften, die Elemente aus S haben oder nicht haben. Sei $I \subseteq [m]$ und

$$n(I) := |\{x \in S : x \text{ hat } E_i \ \forall i \in I\}|.$$

$$\overline{n} := |\{x \in S : x \text{ hat nicht } E_i \ \forall i \in I\}|.$$

Dann gilt

$$\overline{n} := n + \sum_{j=1}^{m} (-1)^j \sum_{I \in \binom{[m]}{j}} n(I). \qquad (*)$$

Bew.: Setze $A_i = \{x \in S : x \text{ hat } E_i\}$, $i = 1, \dots, m$.

$$\Rightarrow n(I) = |\{x \in S : x \text{ hat } E_i \ \forall i \in I\}|$$

$$= |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

$$= N(I) \qquad \forall I \in \binom{[m]}{j}, \ j = 1, \dots, m. \ \square$$

10.4 Korollar: Falls

$$n(I) = n_j \qquad \forall I \in \binom{[m]}{j}, \ j = 1, \dots, m$$

nur von der Anzahl $|I| = j$ der E_i abhängt, vereinfacht sich $(*)$ zu

$$\overline{n} = n - \sum_{j=1}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} n_j.$$

10.5 Bsp. (Stirlingzahlen 2. Art): M m-Menge, N n-Menge.

$$S = \{f : M \to N\}, \quad |S| = n^m$$

$$E_i \Leftrightarrow f(M) \not\ni i, \quad i \in N$$

$$A_i = \{f : M \to N, \ f(M) \not\ni i\}, \quad i \in N.$$

$$S \setminus \bigcup_{i \in N} A_i = \{f : M \to N \text{ surjektiv}\}$$

$$n(I) = \left|\{f : M \to N,\ f(M) \not\ni i,\ i \in I\}\right|$$
$$= \left|\{f : M \to N \setminus I\}\right|$$
$$= (n - |I|)^m$$
$$= \underbrace{(n-j)^m}_{} \quad \forall I \in \binom{[n]}{j},\ j = 1, \dots, n$$
$$= n_j \quad \text{hängt nur von } |I| = j \text{ ab}$$

$$\Rightarrow \left|S \setminus \bigcup_{i \in N} A_i\right| \overset{10.4}{=} n^m + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^m$$

$$\Rightarrow n!\, S_{m,n} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^m$$

$$\Rightarrow S_{m,n} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^m, \quad m,n \in \mathbb{N}.$$
$$= S_{m-1,n-1} + n\, S_{m-1,n}$$

<u>10.6 Def. (Derangement)</u>: Eine fixpunktfreie Permutation heißt <u>Derangement</u> (Umordnung).

<u>10.7 Bsp. (Derangementzahlen)</u>: Sei $n \in \mathbb{N}$

$$S := \Pi_n = \{\pi : [n] \to [n] \text{ Permutation}\}$$
$$E_i \Leftrightarrow \pi(i) = i, \quad i \in [n]$$
$$A_i = \{\pi \in \Pi_n : \pi(i) = i\}, \quad i \in [n]$$
$$S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{\pi : [n] \to [n] \text{ Derangements}\}$$
$$n(I) = \left|\{\pi : [n] \to [n],\ \pi(i) = i,\ i \in I\}\right|$$
$$= (n - |I|)!$$
$$= (n-j)! \quad \forall I \in \binom{[n]}{j},\ j = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow D_n := \left|S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \overset{10.4}{=} n! + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)!$$
$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)!$$
$$= n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$$

<u>10.8 Bem. (Rekursionsformel für Derangementzahlen)</u>: es gilt:

$$D_0 := 1,\ D_1 = 0,\ D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}),\ n \geq 2.$$

<u>Bew.</u>: Sei $n \geq 2$, $\pi \in \Pi_n$ Derangement, $\pi(1) = i \in \{2, \dots, n\}$.

a) $\pi(i) = 1$ $\quad \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ i & \dots & & 1 & \dots & \pi(n) \end{matrix}$

$$\Rightarrow \left|\{\pi \in \Pi_n \text{ Derangement} : \pi(i) = 1\}\right| = D_{n-2}$$

b) $\pi(i) \neq 1$ $\quad \begin{matrix} 1 & \dots & i & \dots & n \\ i & & \pi(i) & & \pi(n) \\ & & \neq & & \\ & & 1 & & \end{matrix} \xrightarrow{1 \leftarrow i} \begin{matrix} \cancel{i} & \dots & 1 & \dots & n \\ \cancel{i} & & \pi(i) & & \pi(n) \\ & & \neq & & \\ & & 1 & & \end{matrix}$

$\pi' : [n]\setminus\{i\} \to [n]\setminus\{i\}$, $\pi'(j) = \begin{cases} j, & j \neq i, 1 \\ \pi(i), & j = 1 \end{cases}$ Derangement

$\Rightarrow |\{\pi \in \Pi_n \text{ Derangement} : \pi(i) \neq 1\}| = D_{n-1}$

c) $\pi(1) = i \in \{2, \dots, n\}$

$\Rightarrow D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$.

<u>10.9 Bsp</u> (Eulerfunktion): Sei $n \in \mathbb{N}$,

$n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$, p_i prim, $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, m$

$S = [n]$

$E_i \Leftrightarrow p_i \mid x$, $i = 1, \dots, m$, $x \in [n]$

$A_i = \{x \in [n] : p_i \mid x\}$, $|A_i| = \frac{n}{p_i}$, $i = 1, \dots, m$

$S \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i = \{x \in [n] : \underbrace{p_i \nmid x}_{\Leftrightarrow \, ggT(p_i, x) = 1}, i = 1, \dots, m\}$

$= \varphi(n) = \{x \in [n] : ggT(n, x) = 1\}$ <u>Eulerfunktion</u>

$n(I) = |\{x \in [n] : \prod_{i \in I} p_i \mid x\}|$

$= \frac{n}{\prod_{i \in I} p_i} \quad \forall I \in \binom{[m]}{j}$, $j = 1, \dots, m$.

$$\varphi(n) = |S \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i| = n + \sum_{j=1}^{m} (-1)^j \sum_{I \in \binom{[m]}{j}} \frac{n}{\prod_{i \in I} p_i}$$

$$= n \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \sum_{I \in \binom{[m]}{j}} \frac{1}{\prod_{i \in I} p_i}$$

$$= n \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

<u>10.10 Bsp.</u> (Eulerfunktion): a) $12 = 2^2 \cdot 3^1$

$|\{x \in [12] : ggT(x, 12) = 1\}| = |\{1, 5, 7, 11\}| = 4$

$= \varphi(12) = 12 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 12 \cdot \cancel{\frac{1}{2}} \, \frac{2}{3} = 4$.

b) $\{x \in [12] : x \mid 12\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(6) = 2$, $\varphi(12) = 4$

$\sum_{x \mid 12} \varphi(x) = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12$.

10.11 Satz: $\sum_{d|n} \varphi(d) = n \quad , \quad n \in \mathbb{N}$.

Bew.: Es gilt

$$[n] = \dot{\bigcup_{d|n}} \{x \in [n] : ggT(x,n) = d\} \qquad n = x \cdot d$$

$$\Rightarrow \quad n = \sum_{d|n} \left| \{x \in [n] : ggT(x,n) = d\} \right|$$

$$= \sum_{d|n} \left| \{ y \in \mathbb{N} : \underbrace{y \cdot d = x \in [n]}_{y \leq \frac{n}{d}} \ , \ ggT(y, \tfrac{n}{d}) = 1 \} \right|$$

$$= \sum_{d|n} \left| \{ y \in [\tfrac{n}{d}] : ggT(y, \tfrac{n}{d}) = 1 \} \right|$$

$$= \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$= \sum_{d|n} \varphi(d) . \qquad \square$$

10.12 Bsp. (Variante des Ménageproblems): Auf wie viele Weisen kann man n Ehepaare in einer Reihe aufstellen, so dass niemals Eheleute untereinander stehen?

$$S = \{ (a_1, \ldots, a_{2n}) \in [n]^{2n} : \forall i \in [n] : \exists j \neq k : a_j = a_k = i \}$$

$$E_i \Leftrightarrow (a_1, \ldots, a_{2n}) \text{ enthält } a_j = a_{j+1} = i$$

$$A_i = \{ (a_1, \ldots, a_{2n}) \in S : \exists j : a_j = a_{j+1} = i \}$$

$$S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{ (a_1, \ldots, a_{2n}) \in S : a_j \neq a_{j+1} \ , \ j = 1, \ldots, 2n-1 \}$$

Sei $I = \{ i_1, \ldots, i_k \} \subseteq [n]$

$$n(I) = \left| \{ (a_1, \ldots, a_{2n}) : \exists j_1, \ldots, j_k : a_{j_\ell} = a_{j_\ell + 1} = i_\ell \ , \ \ell = 1, \ldots, k \} \right|$$

1. Paar ... 2. Paar ... ... k. Paar

1. Lücke n_1 ... 2. Lücke n_2 ... $k+1$. Lücke n_{k+1}

$$\sum_{i=1}^{k+1} n_i = 2n - 2k$$

$$= \underbrace{\binom{2n - \cancel{2k} + \cancel{k} + \cancel{1} - \cancel{1}}{k+1-1}}_{\text{Positionen der Paare}} \cdot \underbrace{k!}_{\text{Reihenfolgen der Paare}} \cdot \underbrace{\frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}}}_{\text{restliche Personen modulo Ehepaare}}$$

$$= \binom{2n-k}{k} \cdot k! \, \frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}} \qquad (\text{auch für } k = 0)$$

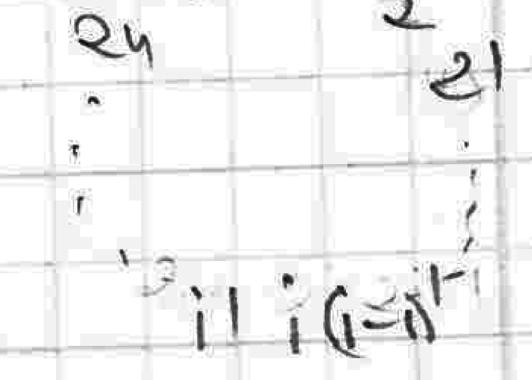
$$\left| S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{2n-j}{j} j! \, \frac{(2n-2j)!}{2^{n-j}}$$

$$\overset{k=n-j}{\underset{\Leftrightarrow\, j=n-k}{=}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{n-k}\binom{2n-\cancel{n}+k}{n-k}(n-k)!\,\frac{(\cancel{2n}-\cancel{2n}+2k)!}{2^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{(n+k)!}{\cancel{(2k)!}}\cdot\frac{\cancel{(2k)!}}{2^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{(n+k)!}{2^k}$$

<u>10.13 Bsp</u> (Ménageproblem): Wie viele Möglichkeiten gibt es, n Paare so um einen runden Tisch zu setzen, dass jede Frau neben 2 Männern sitzt, aber nicht neben ihrem eigenen?



Der Tisch hat Plätze $1, 1', 2, 2', \dots, n, n'$

Wir setzen Frau i auf Platz i', $i' = 1', \dots, n'$ und Mann i auf Platz $\pi(i)$, $i = 1, \dots, n$, $\pi \in \Pi_n$.

$S = \Pi_n$

$$\left.\begin{aligned}
E_1 &\Leftrightarrow \pi(1) = 1\\
E_2 &\Leftrightarrow \pi(1) = 2\\
E_3 &\Leftrightarrow \pi(2) = 2\\
E_4 &\Leftrightarrow \pi(2) = 3\\
&\vdots\\
E_{2n-1} &\Leftrightarrow \pi(n) = n\\
E_{2n} &\Leftrightarrow \pi(n) = 1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \nexists\, \pi \in \Pi_n : E_i \wedge E_{i \bmod n+1},$$

d.h. zwei aufeinanderfolgende Bedingungen können nicht gleichzeitig zutreffen

$A_i = \{\pi \in \Pi_n : E_i\}$, $i = 1, \dots, 2n$

$\rightarrow |A_i \cap A_{i \bmod n+1}| = 0$, $i = 1, \dots, 2n$

Sei $I = \{i_1, \dots, i_k\}$

$$\Rightarrow n(I) = \begin{cases} 0, & \text{falls } i_j = i_{j \bmod n+1} \text{ für ein } j = 1, \dots, k \\ (n-k)!, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\left|\left\{ I \in \binom{[2n]}{k} : n(I) > 0 \right\}\right|$$

$$= \left|\left\{ I \in \binom{[2n]}{k} : n(I) > 0,\ 1 \in I \right\}\right| \,\dot\cup\, \left|\left\{ I \in \binom{[2n]}{k} : n(I) > 0 : 1 \notin I \right\}\right|$$

$\underset{\geq 1}{n_1} + n_2 + \dots + n_k = 2n-k$ $\qquad$ $\underset{\geq 0}{n_1} + n_2 \; 01 \; 01 \dots n_k \; 01 \; n_{k+1} = 2n-2k$

$$= \binom{2n-k-1}{k-1} + \binom{2n-2k+k+1-1}{k+1-1}$$

$$= \binom{2n-k-1}{k-1} + \binom{2n-k}{k}$$

$$= \frac{(2n-k-1)! \cdot (2n-k)}{(k-1)!\,(2n-2k)!} + \frac{(2n-k)!}{k!\,(2n-2k)!}$$

$$= \left(\frac{k}{2n-k} + 1\right)\binom{2n-k}{k}$$

$$= \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$$

$$\Rightarrow \left| S \setminus \bigcup_{i=1}^{2n} A_i \right| = n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$

Die Frauen können auf $n!$ Weisen permutiert werden und entweder auf den geraden oder den ungeraden Plätzen sitzen. Insgesamt gibt es also

$$2n! \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$

Möglichkeiten.

11. Inversion

11.1 Def (Basisfolge): Eine Folge von Polynomen über $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R},\mathbb{C}$) $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit grad $p_n = n$ heisst <u>Basisfolge</u>.

11.2 Satz (Basisdarstellung): Sei q ein Polynom über $\mathbb{K}$ vom grad $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ex. eindeutig bestimmte Koeffizienten $c_k \in \mathbb{K}$, $0 \le k \le n$ mit

$$q = \sum_{k=0}^{n} c_k p_k.$$

Bew: Lin. Algebra.

11.3 Kor.: Seien (p_n), (q_n) zwei Basisfolgen von Polynomen über $\mathbb{K}$. Dann ex. eindeutig bestimmte <u>Zusammenhangskoeffizienten</u> $a_{n,k}, b_{n,k} \in \mathbb{K}$, $0 \le k \le n$, mit

$$q_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} p_k \quad \text{und} \quad p_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} q_k.$$

Setze $a_{n,k} := b_{n,k} := 0$ für $k > n$ und def Matrizen

$$A_n := (a_{ij})_{0\le i,j\le n}, \quad B_n := (b_{ij})_{0\le i,j\le n}.$$

Dann gilt:

$$\sum_{j=0}^{n} (B_{i\cdot} A_{\cdot j})\, p_j(x) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} b_{i,k} a_{k,j}\, p_j(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} b_{i,k} \sum_{j=0}^{n} a_{k,j}\, p_j(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{i,k}\, q_k(x)$$

$$= p_i(x)$$

$$\Rightarrow \quad B_{i\cdot} A_{\cdot j} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad A = B^{-1}.$$

11.4 Satz: Seien (p_n), (q_n) zwei Basisfolgen über $\mathbb{K}$ mit Zusammenhangskoeffizienten $a_{n,k}$, $b_{n,k} \in \mathbb{K}$, $0 \le k \le n$. Dann gilt für zwei Folgen (u_n), (v_n) aus $\mathbb{K}$

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} u_k \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} v_k \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Bew.: Sei $v = (v_0, \dots, v_n)$, $u = (u_0, \dots, u_n)$.

$\Rightarrow \quad v = A_n u \iff u = A_n^{-1} v = B_n v$.

11.5 Bsp (Binomialinversion):

$$\underbrace{x^n}_{=q_n} = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{=a_{n,k}} \underbrace{(x-1)^k}_{=p_k}, \quad \underbrace{(x-1)^n}_{=p_n} = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}(-1)^{n-k}}_{=b_{n,k}} \underbrace{x^k}_{q_k}$$

$$\Rightarrow \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \iff u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} v_k \ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Sei $d(n,k) := \left| \{ \pi \in \Pi_n : \pi \text{ hat } k \text{ Fixpunkte} \} \right|$

$d(n,0) = D_n$. Derangementzahl

$d(n,k) = \binom{n}{k} D_{n-k}$, $0 \le k \le n$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{n!}_{=v_n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{D_k}_{=u_k}$$

$$\overset{\text{Binomial-}}{\underset{\text{inversion}}{\Rightarrow}} \quad D_n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{=\frac{n!}{(n-k)!\,\cancel{k!}}} (-1)^{n-k} \cancel{k!}$$

$$= n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!}$$

$$= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

11.6 Bsp (Stirlinginversion):

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} x^{\underline{k}}, \quad x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k} x^k$$

$$\Rightarrow \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} u_k \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \iff u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k} v_k \ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Insbesondere

$$\sum_{k=0}^{n} S_{i,k} (-1)^{k-j} s_{k,j} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

denn die Matrizen der Zusammenhangskoeffizienten sind invers zueinander. z.B. ist für $n=6$, $i=4$, $j=3$

$$\sum_{k=0}^{6} S_{4,k} (-1)^{k-3} s_{k,3} =$$

$$= \cancel{-0\cdot 0} + \cancel{1\cdot 0} - \cancel{7\cdot 0} + \cancel{6\cdot 1} - \cancel{1\cdot 6} + 0\cdot 35 - 0\cdot 225 = 0$$

12. Erzeugende Funktionen

12.1 Def. (Erzeugende Funktion): Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und

$$(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0} = (a_0, a_1, a_2, \dots) \in \mathbb{K}^*$$

eine Folge von Zahlen aus $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Dann heißt die formale Potenzreihe

$$a(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{(gewöhnliche) erzeugende Funktion}$$

$$\hat{a}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k \quad \text{exponentielle erzeugende Funktion}$$

der Folge (a_k).

und $[z^n]\,a(z) := a_n$ der Koeff. von z^n in $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n$.

12.2 Bem.: Erzeugende Funktionen erlauben eine dreifache Sichtweise auf eine Folge (a_k):

$$\underbrace{(a_0, a_1, \dots) \;\overbrace{\longleftrightarrow\; \text{formale Potenzreihe}}^{\text{Algebra}}}_{\text{explizite Darstellung}} \;\underbrace{\overbrace{\longleftrightarrow\; \text{konvergente Potenzreihe}}^{\text{Analysis}}}_{\text{evtl. geschlossene, kompakte Form}}$$

12.3 Bsp. (erzeugende Funktion):

a) $(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{(n+1)\text{-mal}}, 0, 0, \dots)$: $\sum_{k=0}^{n} z^k = a(z)$

$$\Rightarrow z\,a(z) - a(z) = (z-1)a(z) = z^{n+1} - 1$$

$$\Rightarrow a(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \quad \forall z \neq 1$$

b) $(1, 1, \dots)$: $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad \forall |z| < 1$

c) $(1, -1, 1, -1, \dots)$: $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k = \frac{1}{1+z} \quad \forall |z| < 1$

d) $(1, 0, 1, 0, \dots)$: $\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} = \frac{1}{1-z^2}$

e) $(0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots)$: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k} = \int_0^z \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \, dx$

$$= \int_0^z \frac{1}{1+x}\, dx$$

$$= \log(1+z) \quad \forall |z| < 1$$

f) $(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}, 0, \dots)$: $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} z^k = (1+z)^n \quad \forall z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0$

12.4 Satz (Ring der formalen Potenzreihen): Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

a) Die Menge

$$\mathbb{K}[[z]] = \Big\{ \overbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k}^{a(z) =},\ (a_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{K}^* \Big\}$$

der formalen Potenzreihen mit Koeff. aus $\mathbb{K}$ bildet mit den Operationen

$$\lambda\, a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k z^k \quad , \lambda \in \mathbb{K}$$ Skalarmultiplikation

$$a(z) + b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) z^k$$ Addition

einen Vektorraum über $\mathbb{K}$ und mit dem Produkt

$$a(z) \cdot b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \, z^k$$ Faltung oder

einen Ring mit Einselement 1 $(= 1 \cdot z^0)$. Konvolution

$$a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ invertierbar } \Leftrightarrow a_0 \neq 0.$$

b) $\mathbb{K}[[z]] \supseteq \mathbb{K}[z] := \left\{ a(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right\}$ Ring der Polynome mit Koeff. aus $\mathbb{K}$

c) $\mathbb{K}[[z]] \supseteq \left\{ a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k : \text{Konvergenzradius von } a(z) \text{ ist } > 0 \right\}$

Ring der konvergenten Potenzreihen mit Koeff. aus $\mathbb{K}$.

Bew.: a) $(\mathbb{K}[[z]], +)$ ist eine Gruppe mit verträglicher Skalarmultiplikation, $(\mathbb{K}[[z]], \cdot)$ ist assoziativ und $a(z) \cdot 1(z) = a(z)$.

Für $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_0 \neq 0$ def.

$$b_0 \cdot a_0 = 1 \Rightarrow b_0 := a_0^{-1}$$

$$\sum_{j=0}^{k} b_j a_{k-j} = b_k a_0 + \sum_{j=0}^{k-1} b_j a_{k-j} = 0 \Rightarrow b_k := -\frac{\sum_{j=0}^{k-1} b_j a_{k-j}}{a_0} \quad , k \geq 1$$

$$\Rightarrow a(z) b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{j=0}^{k} b_j a_{k-j}}_{= \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k \geq 1 \end{cases}} z^k = 1.$$

b), c): Skalarmultiplikation, $+$ und $\cdot$ sind abgeschlossen bzgl. der jeweiligen Mengen, die auch 1 enthalten. $\square$

12.5 Bsp.:

a) $\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)(1-z) = 1 \Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)^{-1} = \frac{1}{1-z}$ (in $\mathbb{K}[[z]]$)

b) $\frac{a(z)}{1-z} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j \cdot 1\right) z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j\right) z^k$

12.6 Satz: $(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k \quad \forall |z| < 1, \alpha \in \mathbb{R}$

Bew: Betrachte die Taylorentwicklung um 0 von:

$$(1+z)^\alpha = f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\underline{k}}}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k.$$

Sie konvergiert wegen $\left| \frac{\alpha^{\underline{k}}}{k!} \cdot \frac{(k+1)!}{\alpha^{\underline{k+1}}} \right| = \left| \frac{k+1}{\alpha - k} \right| = \left| \frac{1 + \frac{1}{k}}{\frac{\alpha}{k} - 1} \right| \to 1 \quad \forall |z| < 1.$ $\square$

12.7 Kor.: $(x+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} y^k x^{\alpha - k} \quad \forall\, 0 \neq |x| < |y|, \alpha \in \mathbb{R}.$

11.8 Def. (Formale Ableitung einer formalen Potenzreihe):
Für eine formale Potenzreihe $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ heißt

$$Da(z) := a'(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} z^k \quad \text{formale Ableitung von } a(z)$$

und

$$D : \mathbb{K}[[z]] \to \mathbb{K}[[z]], \quad a(z) \mapsto Da(z) \quad \text{Ableitungsoperator}$$

11.9 Prop (Ableitungsregeln): Der Ableitungsoperator D erfüllt folgende Rechenregeln:

a) $(a(z) + b(z))' = a'(z) + b'(z)$ } Linearität

b) $(\lambda a(z))' = \lambda a'(z) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

c) $(a(z)\, b(z))' = a'(z)\, b(z) + a(z)\, b'(z)$, Produktregel

Bew.: Nachrechnen. □

11.10 Bsp.

a) $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k z^k = z \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} \overset{\text{Indextransf.}}{=} z \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k = z D\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)$

$= z D\left(\frac{1}{1-z}\right) = z\left(\frac{1}{1-z}\right)' = \frac{z}{(1-z)^2}$

b) Derangementzahlen D_k, $k \in \mathbb{N}_0$, mit Rekursionsformel

$$D_k = (k-1)(D_{k-1} + D_{k-2}), \; k \geq 2, \; D_1 = 0, \; D_0 = 1.$$

$\Leftrightarrow D_{k+1} = k(D_k + D_{k-1}), \; k \geq 1, \; D_1 = 0, \; D_0 = 1$

Betrachte exp. erzeugende Funktion von $(D_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$

$$\hat{D}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{k!} z^k$$

$$\hat{D}'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{(k-1)!} z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_{k+1}}{k!} z^k \overset{D_1=0}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{k+1}}{k!} z^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(D_k + D_{k-1})}{k!} z^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{(k-1)!} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{k-1}}{(k-1)!} z^k$$

$$= z \hat{D}'(z) + z \hat{D}(z)$$

$\Rightarrow \hat{D}'(z) = \frac{z}{1-z} \hat{D}(z) = \frac{z-1+1}{1-z} \hat{D}(z) = \left(\frac{1}{1-z} - 1\right) \hat{D}(z)$

$\overset{\text{Dgl.}}{\Rightarrow} \hat{D}(z) = C \cdot e^{\int \frac{1}{1-z} - 1 \, dz} = C \cdot e^{-\ln(1-z) - z} = \frac{Ce^{-z}}{1-z}$

$\overset{z=0}{\Rightarrow} \hat{D}(z)=1 \Rightarrow C = 1$

$\Rightarrow \hat{D}(z) = \frac{e^{-z}}{1-z} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} \right) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{k!} z^k$$

$$\Rightarrow D_k = k! \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad \text{wie früher.}$$

c) Wir haben 3 1€-Münzen, 3 2€-Münzen und 2 5€-Scheine.

Auf wie viele Weisen können wir 11 € zahlen? Antwort:

$$\left| \{(x_1, x_2, x_3) \in \{0,1,2,3\} \times \{0,2,4,6\} \times \{0,5,10\} : x_1 + x_2 + x_3 = 11\} \right|$$

$$= [x^{11}] (1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^5+x^{10})$$

$$= [x^{11}] (1+x+x^2+x^3 + x^2+x^3+x^4+x^5 + x^4+x^5+x^6+x^7 + x^6+x^7+x^8+x^9)(1+x^5+x^{10})$$

$$= [x^{11}] (1+x+2x^2+2x^3+2x^4+2x^5+2x^6+2x^7+x^8+x^9 + x^5+x^6+2x^7+2x^8+2x^9+2x^{10}+2x^{11}+2x^{12}+x^{13}+x^{14} + x^{10}+x^{11}+2x^{12}+2x^{13}+2x^{14} + 2x^{15}+2x^{16}+2x^{17}+x^{18}+x^{19})$$

$$= 3 = 1+0+2$$
$$= 0+3+1$$
$$= 2+2+1.$$

__11.11 Satz__ (Abzählen von k-Multimengen mit gegebenen Vielfachheiten):

Sei $N = \{i_1, \ldots, i_n\}$ eine n-Menge, $N_j \subseteq \mathbb{N}_0$, $j = 1, \ldots, n$, und

$$a_k = \left| \left\{ M \in \left(\!\binom{N}{k}\!\right) : |M \cap \{i_j\}| \in N_j,\ j = 1, \ldots, n \right\} \right|, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

d.h. a_k ist die Anzahl der k-Multiteilmengen einer n-Menge, bei denen die Vielfachheit des j-ten Elements aus einer gegebenen Menge N_j stammt, $j = 1, \ldots, n$. Dann ist die erzeugende Funktion der Folge (a_k)

$$a(z) = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j \in N_i} x^j \right).$$

__Bew.:__ $a_k = \left| \left\{ (i_1, \ldots, i_n) \in \bigtimes_{j=1}^{n} N_j : \sum_{j=1}^{n} i_j = k \right\} \right|.$

Dann ist

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j \in N_i} x^j \right) = \left(\sum_{\cancel{j} \in N_1} x^{\cancel{j}} \right) \cdots \left(\sum_{\cancel{j} \in N_n} x^{\cancel{j}} \right)$$

$$= \sum_{(i_1,\dots,i_n) \in \bigtimes_{j=1}^n N_j : \sum_{j=1}^n i_j = k, \ k=0,1,\dots} x^{i_1+\dots+i_n}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left| \left\{ (i_1,\dots,i_n) \in \bigtimes_{j=1}^n N_j : \sum_{j=1}^n i_j = k \right\} \right|}_{=a_k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

<u>12.12 Kor.</u> Die erzeugende Funktion für die Anzahl a_k der k-Multiteilungen einer n-Menge ist

$$a(z) = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j \in \mathbb{N}_0} x^j \right) = \left(\sum_{j \in \mathbb{N}_0} x^j \right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{1-z} \right)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\binom{n+k-1}{k}}_{= \# \, k\text{-Multiteilungen einer } n\text{-Menge}} z^k$$

<u>Bew.:</u>

$$\left(\frac{1}{1-z} \right)^n = \left(1 + (-z)\right)^{-n} \underset{\text{Kor. 12.7}}{\overset{\text{Allg. Binsatz}}{=}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-z)^k$$

$$\underset{\text{Bsp. 9.39}}{\overset{\text{Neg. für Binom. Koeff.}}{=}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} (-z)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k . \qquad \square$$

<u>12.13 Bsp. (k-Multiteilungen mit gegeb. Vielfachheiten):</u>

Wieviele Körbe mit k Früchten gibt es, bei denen die Anzahl der Äpfel gerade, die Anzahl der Bananen ein Vielfaches von 5, die Zahl der Orangen höchstens 4 und die Zahl der Birnen 0 oder 1 ist?

Die erzeugende Funktion ist

$$\underbrace{(1+z^2+z^4+\dots)}_{\text{Äpfel}} \underbrace{(1+z^5+z^{10}+\dots)}_{\text{Bananen}} \underbrace{(1+z+\dots+z^4)}_{\text{Orangen}} \underbrace{(1+z)}_{\text{Birnen}}$$

$$= \cancel{\frac{1}{1-z^2}} \cdot \cancel{\frac{1}{1-z^5}} \cdot \frac{\cancel{z^5-1}}{z-1} \cdot \frac{\cancel{z^2-1}}{z-1}$$

Bsp. 12.3 a)

$$= z\sum_{k=0}^{\infty} f_{k-1} z^{k-1} + z^2 \sum_{k=0}^{\infty} f_{k-2} z^{k-2} + z$$

$$= z\, f(z) + z^2 f(z) + z$$

$$\Leftrightarrow f(z) - z f(z) - z^2 f(z) = (1-z-z^2)\, f(z) = z$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{z}{1-z-z^2}.$$

3. Entwickle die rechte Seite in eine Potenzreihe durch Partialbruchzerlegung

a) Zerlegung des Nenners in linear- und quadratische Faktoren

$$(1-z-z^2) = 1 - 2\cdot 1\cdot \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{4}z^2 - \tfrac{5}{4}z^2$$

$$= \left(1-\tfrac{1}{2}z\right)^2 - \tfrac{5}{4}z^2$$

$$= \Big(1 - \underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{=:\,\varphi_1} z\Big)\Big(1 - \underbrace{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{=:\,\varphi_2} z\Big)$$

φ_1 heißt Verhältnis des goldenen Schnittes.

$$= (1-\varphi_1 z)(1-\varphi_2 z)$$

b) Zerlegung der rationalen Funktion

$$\frac{z}{(1-\varphi_1 z)(1-\varphi_2 z)} = \frac{A}{1-\varphi_1 z} + \frac{B}{1-\varphi_2 z}$$

$$= \frac{A - A\varphi_2 z + B - B\varphi_1 z}{(1-\varphi_1 z)(1-\varphi_2 z)}$$

$$= \frac{(A+B) + (-A\varphi_2 - B\varphi_1)z}{(1-\varphi_1 z)(1-\varphi_2 z)}$$

$$\Rightarrow A+B = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$-A\varphi_2 - B\varphi_1 = B(\underbrace{\varphi_2}_{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}} - \underbrace{\varphi_1}_{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}) = -B\cdot\sqrt{5} = 1 \rightarrow B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow A = +\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{z}{1-z-z^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1-\varphi_1 z} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1-\varphi_2 z}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_1^k z^k - \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_2^k z^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi_1^k - \varphi_2^2\right) z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]}_{=f_k} z^k$$

$$= \left(\frac{1}{1-z}\right)^2 = \left(1+(-z)\right)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} (-z)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2+k-1}{k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{k} z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(k+1)}_{=a_k} z^k$$

$\Rightarrow$ $a_k = k+1$, d.h. es existieren $k+1$ Körbe.

12.14 Bsp. (Fibonaccizahlen, Leonardo von Pisa alias Filius bonacci [1202]): Wenn ein Kaninchenweibchen von Vollendung des 2. Lebensmonats an monatlich ein neues Kaninchenpaar zur Welt bringt und zu Beginn ein neugeborenes Paar vorhanden ist, wie viele Paare gibt es nach n Monaten?

Beginn

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Rekursion $f_n := \underbrace{f_{n-1}}_{\#\text{Paare}} + \underbrace{f_{n-2}}_{\#\text{Paare, die jetzt Nachwuchs bekommen}}$, $n \geq 2$, $f_1 := 1$, $f_0 = 0$

Frage: Formel für f_n?

1. Rekursion in einer geschlossenen Formel schreiben

Setze $f_n := 0$, $n \leq 0$

$\Rightarrow$ $f_0 = f_{-1} + f_{-2} = 0 + 0 = 0$

$f_1 = f_0 + f_{-1} + [n=1] = 0 + 0 + [n=1] = 1$

$\Rightarrow$ $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + [n=1]$, $n \in \mathbb{N}_0$.

2. Ansatz mit erzeugender Funktion

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$$

$$\overset{\text{Rek.-Formel}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left(f_{k-1} + f_{k-2} + [k=1]\right) z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f_{k-1} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} f_{k-2} z^k + z$$

$$\Rightarrow \quad f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right], \quad k \in \mathbb{N}_0$$

R.15 Bsp. (Wege in der xy-Ebene): Starte in der xy-Ebene bei $(0,0)$ führe eine Folge folgender Schritte aus:

$r: (x,y) \mapsto (x+1,y)$

$l: (x,y) \mapsto (x-1,y)$

$o: (x,y) \mapsto (x,y+1)$

wobei die Schrittfolgen r,l und l,r verboten sind.

Wie viele Wege mit solchen Schrittfolgen der Länge n gibt es?

Sei a_k die Anzahl der Wege der Länge k.

1. Rekursionsformel

$a_0 = 1$

$a_1 = 3$

$$a_k = \underbrace{a_{k-1}}_{+o} + \underbrace{a_{k-1}}_{\substack{l:+r \\ r:+l \\ o:+l}} + \underbrace{a_{k-2}}_{+or} = 2a_{k-1} + a_{k-2}, \quad k \geq 2$$

$a_k := 0, \quad k < 0$

$a_1 = 2a_0 + a_{-1} + [k=1] = 2\cdot 1 + 0 + [k=1]$

$a_0 = 2a_{-1} + a_{-2} + [k=0] =$

$$\Rightarrow \quad a_k = 2a_{k-1} + a_{k-2} + [k=1] + [k=0], \quad k \geq 0$$

2. Erzeugende Funktion

$$a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(2a_{k-1} + a_{k-2} + [k=1] + [k=0]\right) z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 2a_{k-1} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-2} z^k + z + 1$$

$$= 2z\,a(z) + z^2 a(z) + z + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - 2z - z^2)\, a(z) = 1 + z$$

$$\Rightarrow \quad a(z) = \frac{1+z}{1-2z-z^2}$$

3. Partialbruchzerlegung

$$1-2z-z^2 = 1-2\cdot 1\cdot z + z^2 - 2z^2$$
$$= (1-z)^2 - (\sqrt{2}z)^2$$
$$= \left(1-(1+\sqrt{2})z\right)\left(1-(1-\sqrt{2})z\right)$$

$$\frac{1+z}{1-2z-z^2} = \frac{A}{1-\underbrace{(1+\sqrt{2})}_{=\alpha}z} + \frac{B}{1-\underbrace{(1-\sqrt{2})}_{=\beta}z}$$
$$= \frac{A}{1-\alpha z} + \frac{B}{1-\beta z}$$
$$= \left[A(1-\beta z) + B(1-\alpha z)\right] / HN$$
$$= (A - A\beta z + B - B\alpha z) / HN$$
$$= \left[(A+B) - (A\beta + B\alpha)z\right] / HN$$

$$\Rightarrow A + B = 1$$
$$A\beta + B\alpha = -1 \Rightarrow 0\cdot\beta + B\underbrace{(\alpha-\beta)}_{2\sqrt{2}} = -\underbrace{(1+\beta)}_{2-\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow B = -\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$
$$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\beta$$

$$\Rightarrow A = 1 - B = 1 - \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{2-1+\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\alpha$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1+z}{1-2z-z^2} = \frac{\frac{1}{2}\alpha}{1-\alpha z} + \frac{\frac{1}{2}\beta}{1-\beta z}$$
$$= \frac{\alpha}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k z^k + \frac{\beta}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k z^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}}{2} z^k$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}}{2} = \frac{(1+\sqrt{2})^{k+1} + (1-\sqrt{2})^{k+1}}{2}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

12.16 Bsp (Catalanzahlen): Wie viele Möglichkeiten $\tilde{C}_n$ gibt es ein Produkt aus n Faktoren ($= n-1$ Multiplikationen) so zu klammern, dass immer nur 2 Faktoren miteinander multipliziert werden müssen, $n \geq 1$?

$n=0$ — $\tilde{C}_0 := 0$

$n=1$ — x_1 — $\tilde{C}_1 = 1$

$n=2$ — $x_1 x_2$ — $\tilde{C}_2 = 1$

$n=3$ — $(x_1x_2)x_3$, $x_1(x_2x_3)$ — $\tilde{C}_3 = 2$

$n=4$ — $\underbrace{((x_1x_2)x_3)x_4, \ (x_1(x_2x_3))x_4}_{= C_3 \cdot C_1 = 2\cdot 1}, \ \underbrace{(x_1x_2)(x_3x_4)}_{= C_2C_2 \ + 1\cdot 1}, \ \underbrace{x_1((x_2x_3)x_4), \ x_1(x_2(x_3x_4))}_{= C_1 \cdot C_3 \ + 1\cdot 2} = \tilde{C}_4 = 5$

n	1	2	3	4	5	...	n
$\tilde{C}_n$	1	1	2	5	14		$\sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}$,

denn die erste Multiplikation betrifft ein Produkt aus k und $n-k$ Faktoren.

1. Rekursion

$$\tilde{C}_n = \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{C}_k \tilde{C}_{n-k}$$

$$\tilde{C}_2 = \tilde{C}_1 \tilde{C}_1 = 1\cdot 1 = 1$$

$$\tilde{C}_1 = 0 + 1 = 0 + [n=1]$$

$$\tilde{C}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{C}_n = \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{C}_k \tilde{C}_{n-k} + [n=1] = \sum_{k=0}^{n} \tilde{C}_k \tilde{C}_{n-k} + [n=1], \ n \geq 0.$$

2. Erzeugende Funktion

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{C}_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \tilde{C}_j \tilde{C}_{k-j} + [k=1] \right) z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \tilde{C}_j \tilde{C}_{k-j} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} [k=1] z^k$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{C}_k z^k \right)^2 + z$$

$$= f(z)^2 + z$$

$$\Rightarrow f(z)^2 - f(z) + z = 0$$

$$\Leftrightarrow f(z) - 2\cdot\frac{1}{2} f(z) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + z = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(f(z) - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} - z\right) = \left[f(z) - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - z}\right)\right]\left[f(z) - \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - z}\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - z}$$

$$f(0) = c_0 = 0 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4z}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 4z)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-4)^k z^k$$

$\frac{1}{2} - k + 1$

$= 1 - 2k + 3$

$$\binom{1/2}{k}(-4)^k = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1 - \overbrace{2(k-1)}^{2k-3}}{\cancel{2}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} \cancel{(-1)^k} \cdot \cancel{4}^{2\,k} \qquad (k \geq 1)$$

$$= \frac{(-1)\, 1 \cdot 3 \cdots (2k-3)}{k!} \cdot 2^k \frac{1 \cdot 2 \cdots (k-1)}{(k-1)!}$$

$$= \frac{(-2)\,(2k-2)!}{k!\,(k-1)!} = \frac{-2}{k} \frac{(2k-2)!}{(k-1)!\,(k-1)!} \qquad (k \geq 1)$$

$$= -\frac{2}{k}\binom{2k-2}{k-1}$$

$$= + \frac{1}{\cancel{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{\cancel{2}}{k}\right)\binom{2k-2}{k-1} z^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1} z^k$$

$$C_n := \tilde{C}_{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

n-te Catalanzahl

$=$ # Klammerungen eines Produktes mit n Multiplikationen ($= n+1$ Faktoren)

$$\Rightarrow \tilde{C}_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}, \quad n \geq 1, \quad C_0 = 0.$$

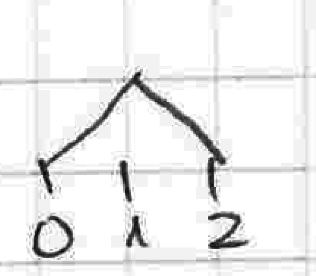
<u>12.17 Bsp (Dyckpfade in der xy-Ebene)</u>: Starte in der xy-Ebene in $(0,0)$ und führe eine Folge folgender Schritte aus:

$u(p)$: $(x,y) \mapsto (x+1, y+1)$

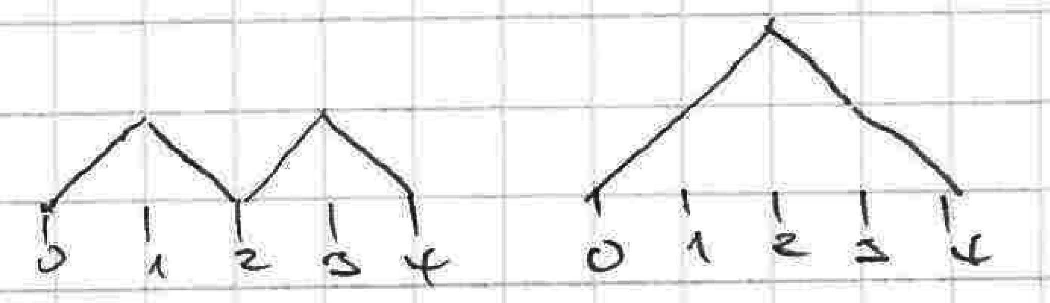
$d(own)$: $(x,y) \mapsto (x-1, y-1)$

Gesucht ist die Anzahl u_n der Pfade von $(0,0)$ nach $(2n,0)$, bei denen die x-Achse nicht unterschritten wird.

$n=0$: $\cdot$ $\qquad u_0 = 1$

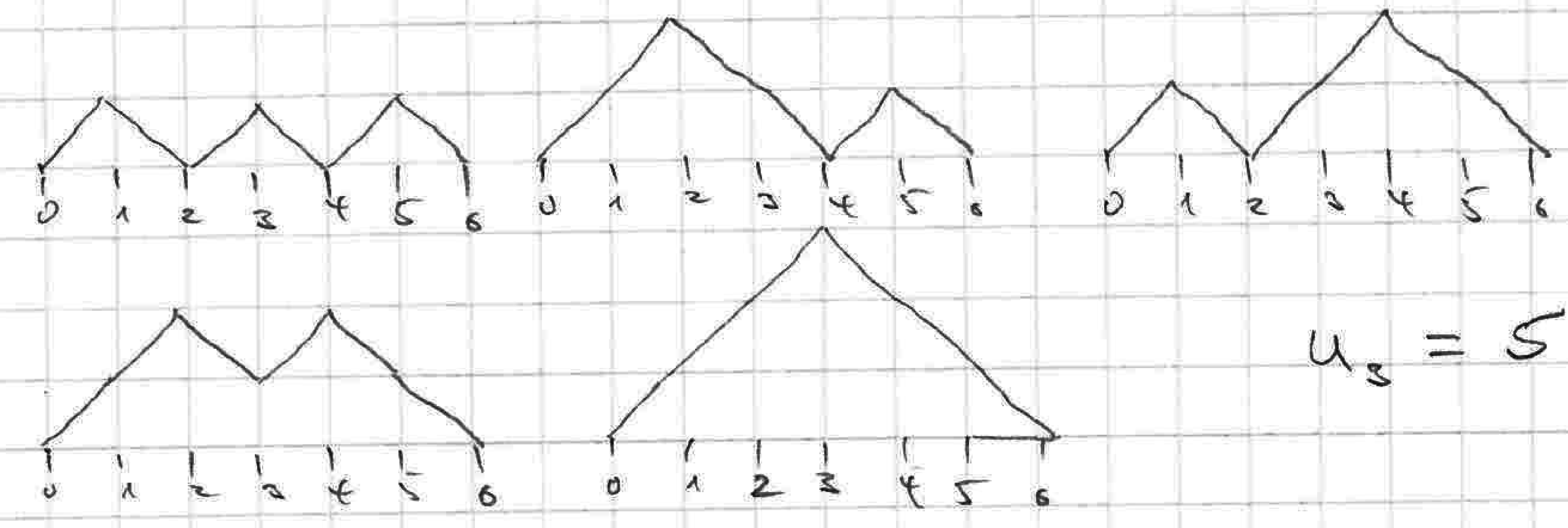
$n=1$:  $\qquad u_1 = 1$

$n=2$:



$u_2 = 2$

$n=3$:



$u_3 = 5$

n	0	1	2	3	...
u_n	1	1	2	5	

a) Beob.: Jeder $\binom{0}{0}\binom{2n}{0}$-Weg, der die x-Achse nicht überschreitet, ist von der Form

$$\underbrace{\binom{0}{0}\binom{1}{1}}_{up} \dots \underbrace{\binom{2n-1}{1}\binom{2n}{0}}_{down}$$

b) Wie viele $\binom{i}{j}\binom{n}{m}$-Wege (die auch die x-Achse überschreiten dürfen) gibt es?

$\#$ Schritte $= n - i =: k$

$|\#up - \#down| = |m-j|$ Höhendifferenz

$\min \#up, \#down = \frac{k - |m-j|}{2} = l$ restliche Schritte abwechselnd

$\Rightarrow \# \binom{i}{j}\binom{n}{m}$-Pfade $= \binom{k}{l} = \binom{n-i}{\frac{n-i-|m-j|}{2}}$.

c) $= \# \binom{0}{0}\binom{2n}{0}$-Pfade, die die x-Achse nicht überschreiten

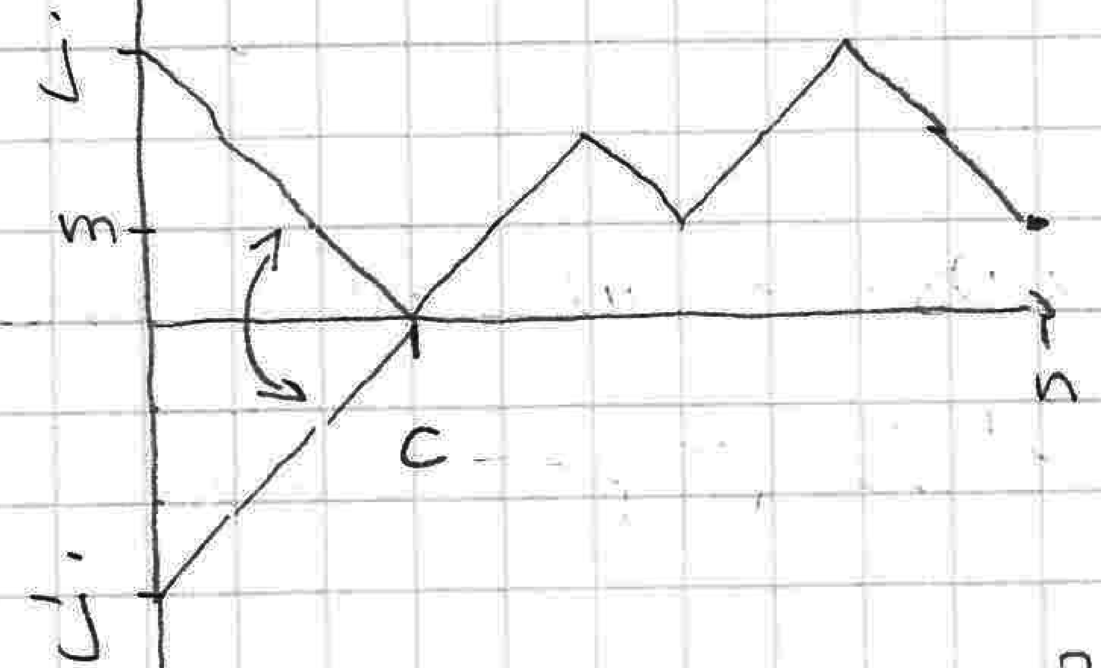
$= \# \binom{0}{1}\binom{2n}{1}$-Pfade, " nicht berühren

d) André Spiegelungsprinzip:

$x = \binom{i}{j}$, $j \geq 1$

$x' = \binom{i}{-j}$

$y = \binom{n}{m}$, $n \geq 1$



Sei $P = \{xy$-Pfade, die die x-Achse berühren$\}$

Spiegle $p \in P$ am 1. Berührpunkt mit der x-Achse

$\Rightarrow \exists$ Bijektion: $P \to \{x'y'\text{-Pfade}\}$

$\Rightarrow |P| = \binom{n-i}{\frac{n-i-(m+j)}{2}}$

e) # $\binom{0}{0}\binom{2n}{0}$-Pfade, die die x-Achse nicht unterschreiten

$= \#\ \binom{0}{1}\binom{2n}{1}$-Pfade, die die x-Achse nicht berühren

$= \#\ \binom{0}{1}\binom{2n}{1}$-Pfade

$- \#\ \binom{0}{1}\binom{2n}{1}$-Pfade, die die x-Achse berühren

$$= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{\frac{2n-2}{2}} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \binom{2n}{n}\left[1 - \frac{n}{(n+1)}\right]$$

$$= \binom{2n}{n}\frac{n+1-n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = a_n = C_n .$$

<u>k.18 Bsp (Stirlingzahlen 2 Art)</u> Bestimme die exp. erzeugende Funktion $f_k(z)$ von $S_{n,k}$, $k \geq 1$ fest.

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{n,k}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=k}^{\infty} S_{n,k}\frac{z^n}{n!}$$

$$f'_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{n,k}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \underbrace{S_{0,k}}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{n,k}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(S_{n-1,k-1} + k\,S_{n-1,k}\right)\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} S_{n-1,k-1}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + k\sum_{n=1}^{\infty} S_{n-1,k}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= f_{k-1}(z) + k\,f_k(z)$$

Ansatz: $f_k(z) := \frac{1}{k!}(e^z-1)^k$, $k \geq 0$

$\Rightarrow f'_k(z) = \frac{k}{k!}(e^z-1)^{k-1}\cdot e^z = \frac{(e^z-1)^{k-1}\cdot e^z}{(k-1)!}$, $k \geq 1$.

und $f_{k-1}(z) + k\,f_k(z) = \frac{1}{(k-1)!}(e^z-1)^{k-1} + \frac{\cancel{k}}{\cancel{k!}\,(k-1)!}(e^z-1)^k$

$$= \frac{(e^z-1)^{k-1}e^z}{(k-1)!}$$

$$\Rightarrow f_k(z) = \frac{(e^z-1)^{k-1}e^z}{(k-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} S_{n,k}\frac{z^k}{k!}.$$

13. Lineare Rekursion

13.1 Bsp. (Lineare homogene Rekursionsgleichung):

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad (a_0, a_1) = (1,1) \,/\, (1,2)$$

$$\Leftrightarrow a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2, \quad (a_0, a_1) = (1,1) \,/\, (1,2)$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \text{Charakteristisches Polynom}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1$$

Setze

$$a_n = c_1 2^n + c_2 1^n = c_1 2^n + c_2$$

$$\Rightarrow a_0 = c_1 + c_2 = 1 \,/\, 1$$

$$a_1 = 2c_1 + c_2 = 1 \,/\, 2 \Rightarrow c_1 = 0 \,/\, 1, \quad c_2 = 1 \,/\, 0$$

$$\Rightarrow a_n = 1 \,/\, 2^n$$

13.2 Def. (Lineare Rekursionsgleichung): Sei $1 \leq r \leq n$ und $c_0, \ldots, c_r \in \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Dann heißt

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_r a_{n-r} + c_0 \qquad (R)$$

lineare Rekursion(sgleichung) r-ten Grades mit konst. Koeffizienten.

a) (R) homogen $:\Leftrightarrow c_0 = 0$.

b) (R) inhomogen $:\Leftrightarrow c_0 \neq 0$.

c) Ist (R) inhomogen, so erhält man durch Nullsetzen von c_0 die zu (R) gehörige homogene lin. Rekursion

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_r a_{n-r} \qquad (R_0).$$

d) $\chi(z) = z^r - c_1 z^{r-1} - \ldots - c_r z^0$ charakteristisches Polynom von (R_0)

e)
$$\Phi(z) = 1 - c_1 z - \ldots - c_r z^r$$
$$= \frac{z^r}{z^r} - c_1 \frac{z^r}{z^{r-1}} - \ldots - c_r \frac{z^r}{z^0}$$
$$= z^r \chi\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{reflektiertes charakteristisches Polynom von } (R_0)$$

f) $$L(R_0) = \Big\{ \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}_{\text{erzeugende Funktion von } (a_n)} : (a_n) \text{ erfüllt } (R_0) \Big\}$$ Lösungsmenge von (R_0)

13.3 Satz: Sei (R_0) eine homogene lineare Rekursion r-ten Grades. Dann ist $L(R_0)$ ein r-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{K}[[z]]$, und zwar

$$L(R_0) = \underline{\Phi}(z)^{-1}\, \mathbb{K}[z]^{(r-1)},$$

wobei $\mathbb{K}[z]^{(r-1)} := \{ p(z) \in \mathbb{K}[z] : \operatorname{grad} p \le r-1 \}$.

Bew.: $[z^0]\, \underline{\Phi}(z) = 1 \neq 0 \implies \underline{\Phi}$ invertierbar.

Wir zeigen:

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in L(R_0)$$

$$\iff \underline{\Phi}(z)\, a(z) =: b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in \mathbb{K}[z]^{(r-1)}$$

$$\iff a(z) = \underline{\Phi}(z)^{-1} b(z) \qquad \in \underline{\Phi}(z)^{-1}\, \mathbb{K}[z]^{(r-1)}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
a(z)\, \underline{\Phi}(z) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)(1 - c_1 z - \dots - c_r z^r) \\
&= \sum_{n=r}^{\infty} z^n \underbrace{(a_n - c_1 a_{n-1} - \dots - c_r a_{n-r})}_{=b_n} \\
&\quad + z^0 \underbrace{a_0}_{=b_0} \\
&\quad + z^1 (\underbrace{a_1 - a_0 c_1}_{=b_1}) \\
&\quad + z^2 (\underbrace{a_2 - c_1 a_1 - c_2 a_0}_{=b_2}) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + z^{r-1} (\underbrace{a_{r-1} - c_1 a_{r-2} - \dots - c_{r-1} a_0}_{=b_{r-1}})
\end{aligned}$$

$$\implies b_n = a_n - c_1 a_{n-1} - \dots - c_r a_{n-r} = 0, \quad n \ge r$$

$$\iff a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_r a_{n-r}, \quad n \ge r$$

$$\implies b(z) \in \mathbb{K}[z]^{(r-1)}.$$

13.4 Kor: Eine homogene lineare Rekursion (R_0) mit gegebenen Anfangsbedingungen $a_0, \dots, a_{r-1}$ hat eine eindeutige Lsg mit erzeugender Funktion

$$a(z) = \frac{b(z)}{\underline{\Phi}(z)} = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_{r-1} z^{r-1}}{1 - c_1 z - \dots - c_{r-1} z^{r-1} - c_r z^r},$$

wobei

$$b_0 = a_0$$

$$b_1 = a_1 - a_0 c_1$$

⋮

$$b_{r-1} = a_{r-1} - c_1 a_{r-2} - \ldots - c_{r-1} a_0 .$$

13.5 Bem.: Nach Nr. 13.4 lässt sich die Lsg. einer homogenen lin. Rekursion mit gegeb. Anfangswerten im Prinzip durch Partialbruchzerlegung lösen.

13.6 Satz: Sei (R_0) eine homogene lin. Rekursion, $q \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

a) $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n z^n \in L(R_0) \Leftrightarrow \chi(q) = 0$

b) $\chi(z) = \prod_{i=1}^{r} (z - q_i)$, $q_i \neq q_j \; \forall i \neq j$ (paarweise verschieden)

$\Rightarrow \left\{ a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i q_i^n \right)}_{= a_n} z^n , \lambda_i \in \mathbb{K} \right\} = L(R_0)$.

c) → Seite

Bew.:

a) $q^n = c_1 q^{n-1} + \ldots + c_r q^{n-r}$, $n \geq r$

$\Leftrightarrow \underbrace{q^n - c_1 q^{n-1} - \ldots - c_r q^{n-r}}_{= \chi(q)} = 0$, $n \geq r$

b) $\chi(q_i) = 0 \overset{a)}{\Rightarrow} a_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_i^n z^n \in L(R_0)$, $i = 1, \ldots, r$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i q_i^n \right) z^n \in L(R_0)$

Wir zeigen: $a_i(z)$, $i = 1, \ldots, r$ linear unabhängig

$\overset{\dim L(R_0) = r}{\Rightarrow} \operatorname{span}_{i=1}^{r} a_i = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i(z) \right\} = L(R_0)$.

Es gilt: $a_i(z)$, $i = 1, \ldots, r$ lin. unabhängig

$\Leftrightarrow (1, q_i, \ldots, q_i^{r-1})$, $i = 1, \ldots, r$, lin. unabhängig

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ q_1 & & q_r \\ \vdots & & \vdots \\ q_1^{r-1} & & q_r^{r-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq r} \underbrace{(q_i - q_j)}_{\neq 0 \text{ wegen } q_i \neq q_j, i \neq j} \neq 0$$

Vandermonde-Determinante.

13.7 Bsp. (Fibonaccizahlen):

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 2$

$\Leftrightarrow f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$, $n \geq 2$

$\Rightarrow z^2 - z - 1 = 0 = \chi(z)$

$$\Longleftrightarrow \quad z - 2\cdot\tfrac{1}{2}z - \tfrac{5}{4} = \Big(z - \underbrace{\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}}_{=q_1}\Big)\Big(z - \underbrace{\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}}_{=q_2}\Big)$$

$$\Rightarrow \quad f_n = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n$$
$$= \lambda_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \lambda_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$f_0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -\lambda_1$$
$$f_1 = 1 \Rightarrow \lambda_1\left(\frac{\cancel{1}+\sqrt{5}}{2}\right) - \lambda_1\left(\frac{\cancel{1}-\sqrt{5}}{2}\right) = \lambda_1\sqrt{5} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

13.6 Satz (Fortsetzung):

c) $\chi(z) = \prod_{i=1}^{k}(z-q_i)^{\alpha_i}$, $q_i \neq q_j \;\forall\, i \neq j$, $\alpha_i \geq 1$, $i=1,\dots,k$, $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i = r$

$$\Rightarrow \left\{ a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{\alpha_i-1} \lambda_{ij}\, n^j q^n\Big)}_{=a_n} z^n,\; \lambda_{ij} \in \mathbb{K} \right\} = L(R_0)$$

Bew.: $$a(z) = \frac{b(z)}{\Phi(z)} = \frac{b(z)}{z^r \chi\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{b(z)}{z^r \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{z}-q_i\right)^{\alpha_i}}$$

$$\overset{\sum \alpha_i = r}{=} \frac{b(z)}{\prod_{i=1}^{k}(1-zq_i)^{\alpha_i}}$$

$$\overset{\text{PBZ}}{=} \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-zq_i)^{\alpha_i}}, \quad \deg g_i(z) < \alpha_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} g_i(z)(1-zq_i)^{-\alpha_i}$$

$$\overset{\text{Binomial-satz}}{=} \sum_{i=1}^{k} g_i(z) \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{-\alpha_i}{n}}_{\overset{\text{negation}}{=}\binom{\alpha_i+n-1}{n}(-1)^n} (-1)^n z^n q_i^n$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \underbrace{g_i(z)}_{=\sum_{j=0}^{\alpha_i-1} g_{ij} z^j} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha_i+n-1}{n} q_i^n z^n$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\alpha_i-1}\binom{\alpha_i+n-j-1}{n-j} g_{ij}\, q_i^{n-j}\right) z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} \underbrace{\sum_{j=0}^{\alpha_i-1}\binom{\alpha_i+n-j-1}{n-j}\frac{g_{ij}}{q_i^j}}_{=: p_i(n),\; \deg p_i < \alpha_i} q_i^n\right) z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} \lambda_{ij} n^j q_i^n \right) z^n .$$

13.8 Bsp.:

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \quad a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2$$

$$\chi(z) = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_n = (\lambda_1 n + \lambda_2) 2^n, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad n \geq 2$$

Probe:

$$\cancel{a_n = (\lambda_1 n + \lambda_2) 2^n = 4[\lambda_1(n-1) + \lambda_2] 2^{n-1} - 4[\lambda_1(n-2) + \lambda_2] 2^{n-2} = 0}$$

Anfangsbedingung $(a_0, a_1) = (2, 6)$

$$a_0 = (\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2) 2^0 = \lambda_2 = 2$$

$$a_1 = (\lambda_1 \cdot 1 + 2) 2^1 = 2\lambda_1 + 4 = 6 \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad a_n = (n+2) 2^n, \quad n \geq 0.$$

13.9 Bem.: Die allgemeine Lsg einer inhomogenen linearen Rekursionsgleichung (R) ist die Summe einer speziellen Lsg von (R) und der allgemeinen Lsg von (R_0).

13.10 Bsp. (Inhomogene lineare Rekursion)

a) $a_n = 2a_{n-1} + 2^n, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 2$

$-2(a_{n-1} = 2a_{n-2} + 2^{n-1}), \quad n \geq 2 \qquad a_1 = 2 \cdot 2 + 2 = 6$

$$a_n - 2a_{n-1} = 2a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$$

$$\overset{\text{Bsp 13.8}}{\Rightarrow} \quad a_n = (n+2) 2^n, \quad n \geq 0.$$

b) $a_n = 2a_{n-1} + \underbrace{(n^2 - 2n + 2)}_{\text{kein konstanter Koeff.!}}, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 1$

$$a_n = 2a_{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \lambda 2^n$$

Ansatz für spezielle Lsg: $\bar{a}_n = xn^2 + yn + z, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad \cancel{xn^2} + \cancel{yn} + \cancel{z} = 2(x\underbrace{(n-1)^2}_{n^2-2n+1} + y(n-1) + z) + (n^2 - \cancel{2n} + 2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = n^2(x+1) + n(-4x + y - 2) + (2x - 2y + z + 2)$$

$$\Rightarrow \quad x = -1, \quad y = -2, \quad z = -4$$

$\Rightarrow \quad \overline{a_n} = -n^2 - 2n - 4$

$\Rightarrow \quad a_n = \lambda 2^n - n^2 - 2n - 4$

$a_0 = \lambda - 4 = 1 \Rightarrow \lambda = 5$

$\Rightarrow \quad a_n = 5 \cdot 2^n - n^2 - 2n - 4$.

14. Summation

14.1. Motivation: $\sum_{k=a}^{b} g(k) = G(b) - G(a)$ analog zum Integral $\int_a^b g(x)\,dx = G(b) - G(a)$.

14.2 Def.: (Translations- und Differenzoperator):

Sei $\mathbb{N} \subseteq D \subseteq \mathbb{C}$, $a \in D$, $\mathbb{F} = D \to \mathbb{C}$

a) $E^a : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, $f \mapsto E^a(f)$ mit $(E^a f)(x) := f(x+a)$ Translationsop. mit Schrittweite a

b) $\Delta := E - I$ Vorwärtsdifferenzoperator

c) $\nabla := I - E^{-1}$ Rückwärtsdifferenzoperator

14.3 Beob.

a) $E^1 = E$, $E^0 = I$

b) $(\Delta f)(x) = ((E-I)f)(x) = f(x+1) - f(x)$

c) $(\nabla f)(x) = ((I - E^{-1})f)(x) = f(x) - f(x-1)$

14.4 Bsp. $\Delta(x^3) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$.

14.5 Beob. (Rechenregeln): Für die Operatoren E^a, Δ und ∇ gelten die üblichen Rechenregeln mit Ausnahme der Existenz des multiplikativen Inversen, d.h. für $P, Q \in \{E^a, \Delta, \nabla\}$, $\alpha \in \mathbb{C}$

a) $(P+Q)(f) = Pf + Qf$

b) $(\alpha P)(f) = \alpha (Pf)$

c) $(PQ)(f) = P(Q(f))$ (aber i.a. nicht $(PQ)(f) = (QP)(f)$) für $P = I$ ähnlich

d) $(\Delta^n) f = (E - I)^n (f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k f$

14.6 Bsp:

a) $\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k)$

$\Rightarrow \Delta^n f(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(0)$

z.B. $\Delta^2 x^3 \big|_{x=0} = \sum_{k=0}^{2} (-1)^{2-k} \binom{2}{k} k^3 = 0 - 2 + 8 = 6$.

b) $\Delta x^{\underline{n}} = (x+1)^{\underline{n}} - x^{\underline{n}} = (x+1) x^{\underline{n-1}} + x^{\underline{n-1}}(x-n+1)$

$= n x^{\underline{n-1}}$, $n \geq 1$.

c) $\nabla x^{\overline{n}} = x^{\overline{n}} - (x-1)^{\overline{n}} = x^{\overline{n-1}}(x+n-1) - (x-1) x^{\overline{n-1}}$

$= n x^{\overline{n-1}}$, $n \geq 1$

14.7 Beob., Def und Satz): $\frac{x^{\underline{n}}}{x^{\underline{n+1}}} = \frac{1}{x-n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Das motiviert

a) $x^{\underline{-1}} := \frac{x^{\underline{-1}}}{x^{\underline{0}}} = \frac{1}{x+1}$

$$x^{\underline{-n}} := \frac{x^{\underline{-n+1}}}{x-n} = \frac{1}{(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

b) $x^{\overline{-n}} := \quad = \frac{1}{(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n)}$, $n \in \mathbb{N}$.

14.8 Satz Satz 14.6 b), c) gilt für $n \in \mathbb{Z}$.

Bew.:

a) $n=0$: $\Delta x^{\underline{0}} = (x+1)^{\underline{0}} - x^{\underline{0}} = 0 = 0\, x^{\underline{-1}}$, analog für $\Delta x^{\overline{0}}$.

b) $-n<0$: $\Delta x^{\underline{-n}} = (x+1)^{\underline{-n}} - x^{\underline{-n}}$

$$= \frac{1}{(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n+1)} - \frac{1}{(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$$

$$= \frac{(x+1)-(x+n+1)}{(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n+1)} = -n\,\Delta^{\underline{-n-1}}$$, analog für $\Delta x^{\overline{-n}}$. □

14.9 Def. (Diskrete Stammfunktion): Seien $F, f \in \mathbb{F}$

$\Delta F = f \;:\Leftrightarrow\;$ <u>F diskrete Stammfunktion von f</u>

$\Leftrightarrow: F = \sum f$ „<u>unbestimmte Summe</u>"

14.10 Satz Sei $F = \sum f$ diskrete Stammfunktion f, $a, b \in D$.

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = F(b+1) - F(a) =: F\Big|_a^{b+1}.$$

Bew.: $\sum_{k=a}^{b} f(k) = \sum_{k=a}^{b} \Delta F(k) = \sum_{k=a}^{b} \left[F(k+1) - F(k)\right] = F(b+1) - F(a)$ □

14.11 Beob.: Ist $F = \sum f$ und $G \in \mathbb{F}$ mit $\Delta G = G(x+1) - G(x) = 0$, dann ist auch $F + G = \sum f$, z.B. $G = \sin(2\pi x)$, $G \equiv c$,

14.12 Bsp.:

a) $\sum x^{\underline{n}} = \frac{x^{\underline{n+1}}}{n+1}$, $n \neq 1$

b) $x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1} = \Delta F(x) = F(x+1) - F(x)$

$\Rightarrow F(x+1) = F(x) + \Delta F(x) = \frac{1}{x+1} + F(x)$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{x} + F(x-1) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \ldots + \underbrace{F(x - \lfloor x \rfloor)}_{=:0}$

$:= H_x$ <u>harmonische Zahl</u>

$\Rightarrow \sum x^{\underline{-1}} = H_x$.

c) $\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = (a-1)\, a^x$

$\Rightarrow \Delta \frac{a^x}{a-1} = a^x \quad , \quad a \neq 1$

$\Rightarrow \sum a^x = \frac{a^x}{a-1} \quad , \quad a \neq 1.$

$\frac{2n-2+3}{6} = \frac{n+\frac{1}{2}}{3}$

d) Bestimmung von $\sum_{k=0}^{n} k^2$:

$$\sum_{k=0}^{n} \underbrace{k^2}_{=f(k)} = \left(\frac{x^{\underline{3}}}{3} + \frac{x^{\underline{2}}}{2}\right)\Bigg|_0^{n+1} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{(n+1)n(n+\frac{1}{2})}{3}.$$

$=f(k) = x^2\big|_{x=k} = \left(x(x-1)+x\right)\big|_{x=k} = \left(x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}\right)\big|_{x=k}$

$\sum x^{\underline{2}} = \frac{x^{\underline{3}}}{3}$

e) Bestimmung von $\sum_{k=0}^{n} k^m$:

$$\sum_{k=0}^{n} \underbrace{k^m}_{} = \left(\sum_{j=0}^{m} S_{m,j} \frac{x^{\underline{j+1}}}{j+1}\right)\Bigg|_0^{n+1} = \sum_{k=0}^{m} \frac{S_{m,k}}{k+1} (n+1)^{\underline{k+1}}$$

$= f(k) = x^m\big|_{x=k} \overset{9.16}{=} \sum_{j=0}^{m} S_{m,j}\, x^{\underline{j}}\Big|_{x=k}$

14.13 Satz (Partielle Summation): Für $f, g \in \mathbb{F}$ gilt

$$fg = \sum f \Delta g + \sum \Delta f (Eg)$$

Bew.: $\Delta\big(f(x)g(x)\big) = f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x)$

$$= \underbrace{f(x+1)\,g(x+1) - f(x)g(x+1)}_{=\Delta f(x)(Eg)(x)} + \underbrace{f(x)g(x+1) - f(x)g(x)}_{= f(x)\,\Delta g(x)} \quad \square$$

14.14 Bsp.: Partielle Summation wird typischerweise wie folgt verwendet:

$$\sum f \Delta g = fg - \sum (Eg)\Delta f.$$

a) $$\sum_{k=1}^{n} H_k = \left(\sum H_x\right)\Bigg|_1^{n+1} = \Big(\sum \underbrace{H_x}_{=f} \underbrace{x^{\underline{0}}}_{=\Delta g}\Big)\Bigg|_1^{n+1}$$

$$= \Bigg(H_x \frac{x^{\underline{1}}}{1} - \sum \underbrace{\frac{(x+1)^{\underline{1}}}{1} \cdot \frac{1}{x+1}}_{= x^{\underline{0}}}\Bigg)\Bigg|_1^{n+1}$$

$$= H_{n+1}(n+1) - 1 \underbrace{-(n+1)+1}_{= \frac{x^{\underline{1}}}{1}}$$

$$= (n+1)(H_{n+1} - 1).$$

b) $$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} H_k = \Big(\sum H_x \underbrace{\binom{x}{m}}_{= \frac{x^{\underline{m}}}{m!}}\Big)\Bigg|_1^{n+1} \qquad \overbrace{= \frac{1}{m+1}\binom{x}{m+1}}^{=\frac{1}{m+1}\binom{x}{m}}$$

$$= \Bigg(H_x \binom{x}{m+1} - \sum \overbrace{\binom{x+1}{m+1} \cdot \frac{1}{x+1}}\Bigg)\Bigg|_1^{n+1}$$

$$= \left[\binom{n+1}{m+1} H_{n+1} - \underbrace{\binom{1}{m+1}}_{=0} H_1\right] - \left[\frac{1}{m+1}\binom{n+1}{m+1} - \frac{1}{m+1}\underbrace{\binom{1}{m+1}}_{=0}\right]$$

$$= \binom{n+1}{m+1}\left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1}\right), \quad m \geq 1.$$

14.15 Satz (Newton-Darstellung von Polynomen): Sei $f \in \mathbb{K}[z]^{(n)}$ ein Polynom vom Grad $\leq n$. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f(0)}{k!} x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k f(0) \binom{x}{k}.$$

$$\frac{d}{dx} \qquad\qquad x^k$$

analog zur Taylorentwicklung im diff'baren Fall.

Bew.: $(x^{\underline{k}})$ ist Basisfolge

$\Rightarrow \exists!\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{\underline{k}}$

$\overset{14.6\,b)}{\Rightarrow} \Delta^i f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k k^{\underline{i}} x^{\underline{k-i}}$

$\Rightarrow \Delta^i f(0) = b_i i^{\underline{i}} = b_i\, i! \Rightarrow b_i = \frac{\Delta^i f(0)}{i!}$

$\Rightarrow b_k = \frac{\Delta^k f(0)}{k!}$. $\square$

14.16 Bsp.:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} x^{\underline{k}}$$

$$\Rightarrow S_{n,k} = \frac{\Delta^k x^n}{k!}\Big|_{x=0} = \frac{(E-I)^k x^n}{k!}\Big|_{x=0}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} E^i\right) \frac{x^n}{k!}\Big|_{x=0}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \frac{i^n}{k!}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

1. Lösen Sie die lineare inhomogene Rekursion

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n^2 - 8n + 12 + [n=0] + 5[n=1] \quad , n \in \mathbb{N}_0$$

a) Homogene Lsg.

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$$

$$\Rightarrow \chi(z) = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a_n = (\lambda n + \mu) 2^n \quad , \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

b) Inhomogene Lsg.

Ansatz $\overline{a_n} = xn^2 + yn + z$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ 1}}{\cancel{x}}n^2 + \cancel{yn} + z - 4\cancel{x}(\cancel{n^2} - 2n + 1) - 4y(\cancel{n}-1) - \cancel{4z}$$
$$+ 4\cancel{x}(\cancel{n^2} - 4n + 4) + 4\cancel{y}(\cancel{n}-2) + \cancel{4z} \stackrel{!}{=} n^2 - 8n + 12$$

$$\Leftrightarrow \underset{\substack{\| \\ 1}}{x}n^2 + (\underset{\substack{\| \\ 0}}{y} - 8)n + (\underset{\substack{\| \\ 0}}{z} - 4 + 16) = n^2 - 8n + 12$$

c) Allgemeine Lsg.

$$a_n = (\lambda n + \mu) 2^n + n^2$$

$$a_0 = 0 = \mu$$

$$a_1 = 5 = \lambda 2 + 1 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$\Rightarrow a_n = 2n2^n + n^2.$$

2. Auf wieviele Weisen a_k kann man k Cent mit höchstens 4 1ct-Stücken und beliebig vielen 2ct und beliebig vielen 5ct-Stücken rausgeben?

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = (1 + z + z^2 + z^3 + z^4)(1 + z^2 + \ldots)(1 + z^5 + \ldots)$$

$$= \frac{z^5 - 1}{z - 1} \frac{1}{1 - z^2} \frac{1}{\cancel{1 - z^5}} = \frac{1}{1-z} \frac{1}{1-z^2}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} z^{2j + k - j} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} z^{k+j}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z^{2n} + z^{2n+1})$$

$2n = k+j = n+n$
$\quad (n+1)+(n-2)$
$\quad \vdots$
$\quad 2n + 0$
$\Big\} \; n+1$

$2n+1 = k+1 = (n+1)+n$
$\quad (n+2)+(n-1)$
$\quad \vdots$
$\quad (2n+1)+0$
$\Big\} \; n+1$

$$\Rightarrow a_{2k} = a_{2k+1} = k+1$$

z.B. $a_{10} = 6 = |\{5+5, 5+2+2+1, 5+2+1+1+1, 2+2+2+2+2, 2+2+2+2+1+1, 2+2+2+1+1+1+1\}|$

88

3. Wie viele Zahlen von 1 bis 100 sind nicht durch 3, 5, 7 teilbar?

Sei $A_i = \{ n \in [100] : i \mid n \}$.

$$\left| [100] - \cup A_i \right| = 100 - |A_3| - |A_5| - |A_7|$$
$$+ |A_3 \cap A_5| + |A_3 \cap A_7| + |A_5 \cap A_7|$$
$$- |A_3 \cap A_5 \cap A_7|$$
$$= 100 \underbrace{- 33 - 20 - 14}_{-67} + \underbrace{6 + 4 + 2}_{+12} - 0$$
$$= 45.$$

4. Beweisen Sie durch doppeltes Abzählen

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

wähle m aus n, dann k aus m | wähle k aus n, dann $m-k$ aus $n-k$.

5. Welche Laufzeit hat folgender Algorithmus?

Input: n

Output: n^n

1. $x \leftarrow 1$ $\quad O(1)$
2. for $i = 1, \ldots, n$ do { $\quad \times n$
3. $\quad x \leftarrow x n$ $\quad O(1)$
4. }

$O(n)$

a) Elementare Operationen : $O(n)$

b) Codierungslänge größte Zahl : $\langle n^n \rangle = n \langle n \rangle$

c) Laufzeit : $O(n^2 \langle n \rangle)$

d) Codierungslänge Input : $\langle n \rangle = k$

e) Laufzeitfunktion $\quad O(\underbrace{n^2}_{=(2^k)^2} \langle n \rangle) = O(4^k k)$

$\Rightarrow$ exponentiell.

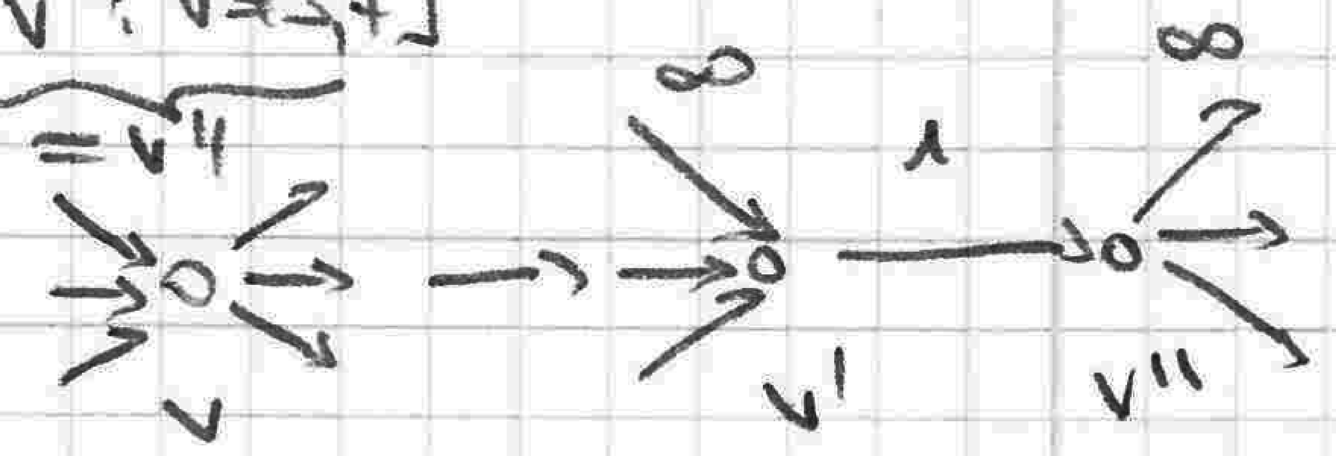
6. Beweisen Sie den Satz von Menger (Knotenform):

Sei $D=(V,A)$ ein Digraph, $s,t\in V$, $s\neq t$.

Dann ist max. Anzahl von kreuzungsfreien (= im Inneren knotendisjunkten) st-Wegen gleich der minimalen Kardinalität einer s und t trennenden Knotenmenge W (= $D\setminus W$ enthält keinen st-Weg).

1. Konstruiere Netzwerk $D'=(V''', A', c', s, t)$ mit

$$V''' = \{s,t\} \cup \underbrace{\{v' : v\neq s,t\}}_{=V'} \cup \underbrace{\{v'' : v\neq s,t\}}_{=V''}$$



$$\begin{aligned} A' = &\{ sv' : sv\in A \} \\ \cup &\{ v''t : vt \in A \} \\ \cup &\{ u''v' : uv\in A \} \\ \cup &\{ v'v'' : v\in V\setminus\{s,t\} \} \end{aligned}$$

$$c'_{v'v''} = 1 \;,\quad v'v''\in A'$$
$$c'_a = \infty \;,\quad \text{sonst}$$

2. $P = s\, v_1\, v_2 \dots v_k\, t$ st-Weg in D

$\Leftrightarrow P' = s\, v_1' v_1'' v_2' v_2'' \dots v_k' v_k''\, t$ " D'

3. P, Q kreuzungsfreie Wege in D

$\Leftrightarrow P', Q'$ kantendisjunkte Wege in D'

4. Max-Flow-Min-Cut-Theorem

max # kreuzungsfreie Wege in D

= max # kantendisjunkte Wege in D'

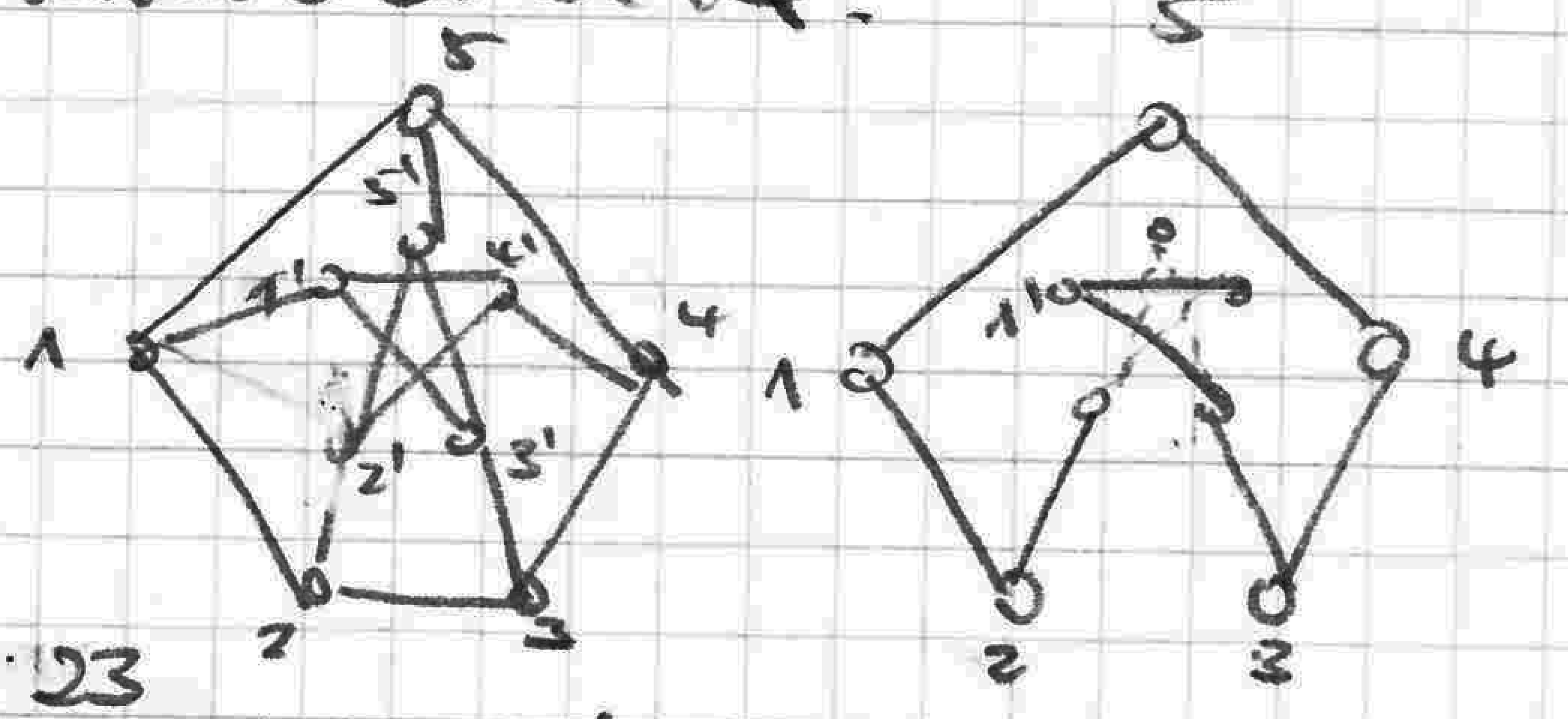
= max Wert eines st-Flusses in D'

= min Kap eines st-Schnittes in D' $\left(\leq |\delta^+(\{s\}\cup V')| = |V|+1\right)$

= $|A \subseteq \{v'v'' : v\in V\} : A$ st-Schnitt $|$

= $|W\subseteq V : W$ trennt s und t $|$.

7. Betrachten Sie den Petersengraph. Zeigen Sie, daß dieser nicht hamiltonsch ist.



23

a) eine Kante auf dem äußeren Kreis ist nicht in HK H.

b) $12, 22', 33', 34 \in H$

c) $11', 44' \in H \Rightarrow ↯ \Rightarrow$ o.B.d.A. $15 \in H$

d) $\Rightarrow 1'4', 1'3' \in H$

e) $\Rightarrow 45 \in H$

f) $\Rightarrow ↯$.