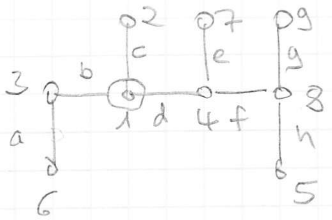
Satz 2.11 (Cayley [1889]): K_n enthält $t(n) = n^{n-2}$ verschiedene aufspannende Bäume, $n \in \mathbb{N}$

Bem. 2.12: $T=(V,E)$, $T'=(V,E')$ verschieden $\Leftrightarrow E \neq E'$.

Verschiedene Bäume können isomorph sein.

Bsp 2.13: Darstellungs- oder Speicherungsarten für Graphen



a) Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix

$$(a_{ve}) = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\ \begin{pmatrix} & 1 & 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & & \\ & & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & \end{pmatrix} \end{array}$$

→ Platzbedarf $O(|V||E|)$

Speicherungsmodelle

b) Knoten-Knoten-Adjazenzmatrix

$$(a_{uv}) = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} & 1 & 1 & 1 & & & & & \\ 1 & & & & & & & & \\ 1 & & & & & 1 & & & \\ 1 & & & & & & 1 & & 1 \\ & & & & & & & 1 & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & 1 \\ & & & 1 & & & & 1 & \end{pmatrix} \end{array}$$

$O(|V|^2)$, $uv \in E$ in $O(1)$

c) Kantenliste

1	1	1	3	4	4	5	8
2	3	4	6	7	8	8	9

$O(|E|)$, "sparse"

a–c) nutzen nicht Baumstruktur aus

d) Vorgängerliste: Vorgänger auf dem Weg zur Wurzel

Wurzel 1

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ & \multicolumn{8}{c}{\underbrace{\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 8 & 3 & 4 & 4 & 8 \end{array}}_{|V|-1 \text{ Elemente}}} \end{array}$$

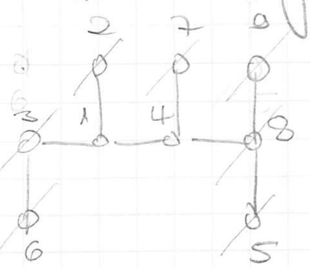
Frage: Ist Vorgängerliste: $\{\text{aufsp. Bäume} \subseteq K_n\} \to [n]^{n-1}$ bijektiv?

Dann wäre $t(n) = n^{n-1}$?

Kreis!

Nein, denn
$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\ (1, & 1, & 1, & 8, & 3, & 4, & 9, & 8) & \in [9]^8 \end{array}$$
beschreibt keinen Baum.

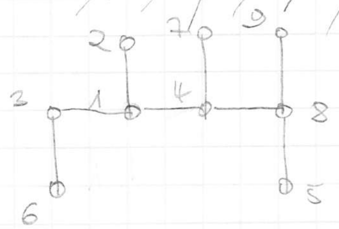
e) Prüfercode (Prüfer [1918]): Vorgänger des Blatts mit minimalem Index und $\neq$ der Wurzel auf dem Weg zur Wurzel

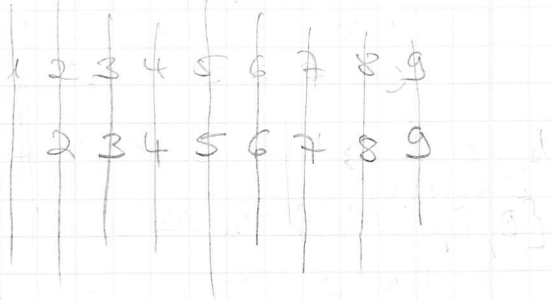


i	1	2	3	4	5	6	7	8
v	2	5	6	3	7	9	8	4
u	1	8	3	1	4	8	4	1

$\underbrace{1\ 8\ 3\ 1\ 4\ 8\ 4}_{\text{Prüfercode}}$ $\underbrace{1}_{\text{überflüssig}}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8
v	2	5	6	3	7	9	8	4
u	~~1~~	~~8~~	~~3~~	~~1~~	~~4~~	~~8~~	~~4~~	1





Bemerkung: Prüfercode: $\{\text{aufsp. Bäume} \subseteq K_n\} \to [n]^{n-2}$ bijektiv

$\Rightarrow |\{\text{aufsp. Bäume in } K_n\}| = |[n]^{n-2}| = n^{n-2}$

"Gleichheitsregel" oder "Identitätsprinzip".

Alg 2.13 (Prüfercodierung):

Input: Baum $T = (V = [n], E \subseteq \binom{[n]}{2})$ (mit Wurzel 1)

Output: $u(T) := (u_1, \dots, u_{n-2})(T) \in [n]^{n-2}$

1. for $i = 1$ to $n-2$ {
2. $\quad v_i \leftarrow \min\{v \in V \setminus \{1\} : \deg(v) = 1\}$
3. $\quad u_i \leftarrow u$ mit $uv_i \in E$
4. $\quad V \leftarrow V \setminus \{v_i\}$, $E \leftarrow E \setminus \{uv_i\}$
5. }

Lemma 2.14: Sei $T = ([n], E)$ ein Baum mit Prüfercode $u(T)$.

a) $|\{i : u_i = v\}| = \deg(v) - 1 \quad \forall v \in V$

b) $u_i \neq v,\ i = 1, \dots, n-2 \iff v$ ist ein Blatt

Bew.: a) $|\{i : u_i = v\}| = |\{i : \underline{u_i v_i \in E}\}| \le \deg(v) + 1$

Kante wird entfernt
aber u_i verbleibt in T
d.h. es ex. eine weitere Kante

Außerdem gilt:

$$\sum_{v \in V \setminus \{1\}} |\{i : u_i = v\}| = n - 2$$

$$\parallel$$

$$\sum_{v \in V} |\{i : u_i = v\}| \le \sum_{v \in V} \left[\deg(v) - 1\right] = 2\underbrace{|E|}_{=(n-1)} - n = n - 2$$

$\Rightarrow |\{i : u_i = v\}| = \deg(v) + 1.$ $\square$

Alg. 2.15 (Prüferdecodierung):

Input: $u \in [n]^{n-2}$, $n \in \mathbb{N}$

Output: $E = \{u_i w_i,\ i = 1, \dots, n-1\}$, $T(u) = ([n], E)$

1. $E \leftarrow \emptyset$
2. for $i = 1$ to $n-1$ {
3. $\quad w_i \leftarrow \min\{v \in V : v \notin \{w_1, \dots, w_{i-1}, u_i, \dots, u_{n-2}, 1\}\}$
4. $\quad E \leftarrow E \cup \{u_i w_i\}$
5. }

Satz 2.16: Sei $\mathcal{T}_n = \{T \in K_n$ aufsp. Baum$\}$.

Dann ist $T(u(T)) = T \quad \forall T \in \mathcal{T}_n$, d.h.

$$\mathcal{T}_n \underset{T}{\overset{u}{\rightleftarrows}} [n]^{n-2}$$

u und T sind invers zueinander und insbesondere bijektiv.

Bew. (von Satz 2.11): $|\mathcal{T}_n| \overset{\text{Satz 2.16}}{\underset{\text{Identitätsprinzip}}{=}} |[n]^{n-2}| = n^{n-2}$, $n \in \mathbb{N}$.

16.04.13

Bew. (von Satz 2.16): Induktion über n.

$n = 1$ ✓

$n = 2$ ✓

$n \to n+1$: Sei $T = ([n], E)$, $u = (u_1, \dots, u_{n-2}) = u(T)$,

$B = \{v \in V : \deg(v) = 1\}$ Blätter von T

$U = \{u_1, \dots, u_{n-2}\}$

Dann gilt:

$v_1 = \min \{ v \in V \setminus \{1\} : \deg(v) = 1 \}$ (Alg. 2.13.2)

$u_1 = u$ mit $uv_1 \in E$ (Alg. 2.13.3)

Es ist
$$\begin{array}{rcccccc} & & \mathcal{B} & & & & \\ & & \Downarrow & & & & \\ & & v_1 & v_2 & v_3 & & v_{n-2} \\ u & = & u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_{n-2} \end{array}$$

$v_1 = \min \mathcal{B}$, $\mathcal{B} = \{ v \in [n] : v \notin u, v \neq 1 \}$

$\Rightarrow w_1 = \min \{ v \in V : v \notin \underbrace{\{ w_1, \dots, w_{i-1}, u_i, \dots, u_{n-2}, 1 \}}_{= u \cup \{1\}} \}$

$= v_1$

Setze $T' = ([n] \setminus \{v_1\}, E \setminus \{u_1 v_1\})$. Dann ist

$u(T') = (u_2, \dots, u_{n-2})$

Ind.-Ann. für $[n] \setminus \{v_1\} \cong [n-1]$

$\Rightarrow T(u(T')) = T'$

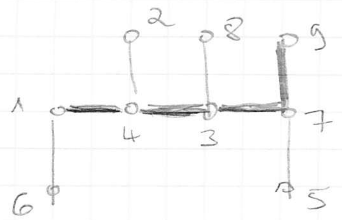
$v_1 = w_1$

$\Rightarrow T(u(T)) = T$. $\square$

$u_1 v_1 = u_1 w_1$

Bsp 2.13 (Fortsetzung):

f) Digraph: Kreise des 1n-Pfades (aufgefasst als Permutation) + Vorgänger auf dem Weg vom 1n-Pfad

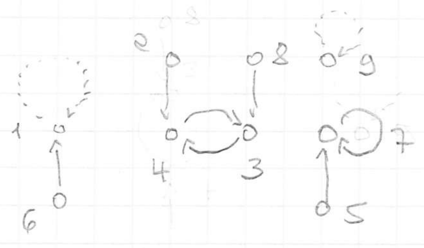


$$\underbrace{P}_{\text{"Rückgrat"}} = \begin{array}{c|ccc|c} 1 & 3 & 4 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 3 & 7 & 9 \end{array}$$

sortieren

Permutation der Zahlen 3, 4, 7

Permutation der Zahlen 1, 3, 4, 7, 9



$$\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 4 & 3 & 7 & 1 & 7 & 3 & 9 \end{array}$$

$f(T): \{2, \ldots, n-1\} \to [n]$

Beh.: $T_n \underset{T(f) = f^{-1}}{\overset{f = f(T)}{\rightleftarrows}} \{\{2, \ldots, n-1\} \to [n]\}$ bijektiv.

Alg. 2.17: $T(f)$

Input: $f: \{2, \ldots, n-1\} \to [n]$

Output: $T = T(f) \in T_n$

0. $f(1) \leftarrow 1, \quad f(n) \leftarrow n$
1. Konstruiere Digraph $D(f) \leftarrow ([n], \{(v, f(v)) : v \in [n]\})$
2. Bestimme gerichtete Kreise $C_1, \ldots, C_k$ in $D(f)$
3. Sortiere $U = \bigcup_{i=1}^{k} V(C_i) = \{\underset{1}{\underset{\shortparallel}{u_1}}, \ldots, \underset{n}{\underset{\shortparallel}{u_r}}\}, \; u_1 \leq \ldots \leq u_r$
4. Setze $E' \leftarrow \{\{f(u_i), f(u_{i+1})\}, i = 1, \ldots, r-1\}$

   $E'' \leftarrow \{\{v, f(v)\} : v \notin U\}$
5. $T \leftarrow (V, E' \cup E'')$

Lemma 2.18: Alg. 2.17 ist korrekt (konstruiert einen aufsp. Baum)

a) Betrachte Komponenten D_i, $i = 1, \ldots, k$, von $D(f)$.

Beh.: D_i enthält genau einen gerichteten Kreis C_i (inkl. $(\{1\}, \{11\})$ und $(\{n\}, \{nn\})$)

Begr.: $A(D(f)) = \{(v, f(v)) : v = 1, \ldots, n\}$, d.h.

$\delta^+(v) = 1 \quad \forall v \in V$, d.h. jeder Knoten hat genau einen Nachfolger. Sei $V' \leftarrow V$ und entferne rekursiv Knoten ohne Vorgänger aus V', d.h. v mit $\delta^-(v) = 0$, bis

$$|\delta^+(v)| = 1, \quad |\delta^-(v)| \geq 1 \quad \forall v \in V'$$

$$\Rightarrow |\delta^+(v)| = |\delta^-(v)| = 1 \quad \forall v \in V'$$

und $D(f)[V']$ ist eine Menge disjunkter gerichteter Kreise $C_1, \dots, C_k$, an denen gerichtete Bäume $D(f)[V \setminus V']$ "hängen".

Insbesondere ist o.B.d.A. $C_1 = (\{1\}, \{11\})$ und $C_k = (\{n\}, \{nn\})$, und $U = V'$.

b) $P = f(u_1) f(u_2), \dots, f(u_{r-1}) f(u_r)$ ist ein $1n$-Pfad.

$\sigma: U \to U$, $u_i \to f(u_i)$ ist eine Permutation.

c) T ist ein aufsp. Baum des K_n ✓ □

Alg. 2.19: $f(T)$

Input: Baum $T = ([n], E) \in T_n$

Output: $f = f(T): \{2, \dots, n-1\} \to [n]$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 = u_1 & & \dots & & u_r = n \\ v_1 & & \dots & & v_r \end{array}$$

1. $P = v_1, \dots, v_r$ $1n$-Pfad in T $\quad (v_1 = 1,\ v_r = n)$

2. Sortiere $W = \{v_1, \dots, v_r\} = \{w_1, \dots, w_r\}$, $w_1 \leq \dots \leq w_r$ $\quad (w_1 = 1,\ w_r = n)$

3. $f(v) = \begin{cases} v_i, & v_i = w_i, \ i = 2, \dots, r-1 \\ \text{Vorgänger auf dem Pfad von } W \text{ nach } v, & v \notin W \end{cases}$

Prop. 2.20: $f(T(f)) = f \quad \forall f: \{2, \dots, n-1\} \to [n]$.

Bew.: Wir erhalten $W = U$ und $f(u_i) = f(w_i) = v_i$, $i = 1, \dots, r$. □

Bew. von Satz 2.11 (2. Version):

$$|\{f: \{2, \dots, n-1\} \to [n]\}| = n^{n-2}.$$ □

Satz 2.21 Die Anzahl an aufspannenden Bäumen des K_n mit Knotengraden $d_1, \dots, d_n$ ist

$$t(n, d_1, \dots, d_n) = \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n} (d_i - 1)!} . \qquad (-1! := 1)$$

Bew.: Induktion über n.

Ind.Anf.: $n = 1$: $t(1,0) = 1 = \frac{-1!}{-1!} = 1.$

$n = 2$: $t(2,1,1) = 1 = \frac{0!}{0!\,0!} = 1.$

Ind.schritt $n-1 \to n > 2$: $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} d_i}_{n \text{ Zahlen} \geq 0} = 2n-2$

$\Rightarrow \exists i \in [n] : d_i = 1$. Sei O.B.d.A $d_n = 1$.

Sei $T(n, d_1, \dots, d_n) = \{ T \subseteq K_n$ aufsp. Baum $: \deg(i) = d_i \}$

und $T(n, d_1, \dots, d_n, j) = \{ T \in T(n, d_1, \dots, \underset{\overset{\|}{1}}{d_n}) : \Gamma(n) = \{j\} \}$, $j = 1, \dots, n-1$

$\Rightarrow T(n, d_1, \dots, \underset{\overset{\|}{1}}{d_n}) = \bigcup_{j=1}^{n-1} T(n, d_1, \dots, \underset{\overset{\|}{1}}{d_n}, j)$

Lösche n und jn:

Sei $T'(n, d_1, \dots, \underset{\overset{\|}{1}}{d_n}, j) = \{ (V(T) \setminus \{n\}, E(T) \setminus \{jn\}) : T \in T(n, d_1, \dots, d_n, j) \}$

$= T(n-1, d_1, \dots, d_j - 1, \dots, d_{n-1})$

$$\Rightarrow |T'(n, d_1, \dots, d_n, j)| = |T(n-1, d_1, \dots, d_j - 1, \dots, d_{n-1})| \overset{\text{Ind.ann.}}{=} \frac{(n-3)!\,(d_j - 1)}{\prod_{i=1}^{n-1} (d_i - 1)!}$$

auch für $d_j = 1$

$$\Rightarrow T(n, d_1, \dots, d_n) = \sum_{j=1}^{n-1} |T'(n, d_1, \dots, d_n, j)|$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-3)!\,(d_j - 1)}{\prod_{i=1}^{n-1} (d_i - 1)!} \qquad \left(\sum_{j=1}^{n-1} (d_j - 1) = 2n - 3 - (n-1) = n-2 \right)$$

$$= \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n} (d_i - 1)!} \qquad \square$$

22.04.13

Bew. von Satz 2.11 (3. Version):

$$t(n) = \sum_{\substack{d_1, \dots, d_n \geq 1 \\ \sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2}} \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n} (d_i - 1)!} = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} k_i = n-2}} \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n} k_i!} \overset{\text{Kor. 3.10}}{=} (1 + \dots + 1)^{n-2} = n^{n-2}. \qquad \square$$

3. Binomial- und Multinomialkoeffizienten

3.1 Def. (Binomialkoeffizient): Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$.

$$\binom{n}{k} := \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)}{\prod_{i=1}^{k} i} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}$$ Binomialkoeffizient k aus n

3.2 Prop. (Einfache Eigenschaften von Binomialkoeffizienten):

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $n, k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$

b) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$, $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$.

Bew.: Nachrechnen. $\square$

3.3 Bem (Pascalsches Dreieck): Aus b) ergibt sich

$$\begin{array}{lccccccc}
n=0 & & & & \binom{0}{0} & & & \\
n=1 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
n=2 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
n=3 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}$$

als Berechnungsmöglichkeit für Binomialkoeffizienten.

3.4 Satz (Kombinatorische Bedeutung der Binomialkoeffizienten).

Sei M eine endliche Menge mit $|M| = n$ Elementen, $k \in \{0, \ldots, n\}$.
Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von M ist

$$\left|\binom{M}{k}\right| = \binom{|M|}{k}.$$

Bew: Sei

$$\begin{bmatrix} M \\ k \end{bmatrix} := \{(m_1, \ldots, m_k) \in M^k : m_i \neq m_j,\ i \neq j\}$$

die Menge der geordneten k-Tupel von verschiedenen Elementen aus M. Dann ist

$$\left|\begin{bmatrix} M \\ k \end{bmatrix}\right| = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = k!\left|\binom{M}{k}\right|$$

denn für jede k-Teilmenge $K \in \binom{M}{k}$ gibt es $k!$ Anordnungen. $\square$

3.5 (Binomischer) Satz:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad x,y \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Bew.:

$$(x+y)^n = \underset{x_1\ \ y_1}{\overset{1}{(x+y)}}\ \underset{x_2\ \ y_2}{\overset{2}{(x+y)}} \cdot \ldots \cdot \underset{x_n\ \ y_n}{\overset{n}{(x+y)}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underset{\uparrow}{x^k}\, y^{n-k} \qquad \square$$

Auswählen von k aus n X-Variablen

3.6 Korollar:

a) $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.

b) $(-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots = 0$.

3.7 Def. (Multinomial- oder Polynomialkoeffizient):

Seien $n, k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}_0$, $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$.

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} := \frac{n!}{\prod_{i=1}^{r} k_i!}$$

Multinomial- oder Polynomialkoeffizient $k_1, \ldots, k_r$ aus n.

3.8 Satz (Kombinatorische Bedeutung des Multinomialkoeffizienten). Sei M eine endliche Menge mit $|M| = n$ Elementen, $k_1, \ldots, k_r \in \{0, \ldots, n\}$, $k_1 + \ldots + k_r = n$.

Die Anzahl der Partitionen von M in r Teilmengen $M = \dot{\bigcup}_{i=1}^{r} M_i$ mit $|M_i| = k_i$, $i = 1, \ldots, r$, ist $\binom{|M|}{k_1, \ldots, k_r}$.

Bew.: Betrachte die Menge der Permutationen von M

$$\begin{bmatrix} M \\ n \end{bmatrix} = \{(m_1, \ldots, m_n) : m_i \neq m_j\ \forall i \neq j\}$$

$$= \{(\underbrace{m_1, \ldots, m_{k_1}}_{\in \begin{bmatrix} M \\ k_1 \end{bmatrix}}, \underbrace{m_{k_1+1}, \ldots, m_{k_1+k_2}}_{\in \begin{bmatrix} M \\ k_2 \end{bmatrix}}, \ldots, m_{k_1+\ldots+k_r}) : m_i \neq m_j\ \forall i \neq j\}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{bmatrix} M \\ n \end{bmatrix} \right| = n! = k_1! \cdot \ldots \cdot k_r! \binom{M}{k_1, \ldots, k_r},$$

denn für jede Teilmenge M_i gibt es $k_i!$ Anordnungen. $\square$

3.9 Satz (Multinomial- oder Polynomialsatz):

$$(x_1+\dots+x_r)^n = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_r=n\\ k_1,\dots,k_r\geq 0}} \binom{n}{k_1,\dots,k_r} x_1^{k_1}\cdots x_r^{k_r}, \quad x_1,\dots,x_r\in\mathbb{C},\ n\in\mathbb{N}_0$$

Bew.:

$$(x_1+\dots+x_r)^n = \overset{1}{(x_1+\dots+x_r)}\cdot\overset{2}{(x_1+\dots+x_r)}\cdots\overset{n}{(x_1+\dots+x_r)}$$

$$= \sum_{\substack{k_1+\dots+k_r=n\\ k_1,\dots,k_r\geq 0}} \binom{n}{k_1,\dots,k_r} x_1^{k_1}\cdots x_r^{k_r}. \qquad \square$$

Auswählen von $k_1,\dots,k_r$ Variablen $x_1,\dots,x_r$

3.10 Korollar: $r^n = (1+\dots+1)^n = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_r=n\\ k_1,\dots,k_r\geq 0}} \binom{n}{k_1,\dots,k_r} = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_r=n\\ k_1,\dots,k_r\geq 0}} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{r} k_i!}$.

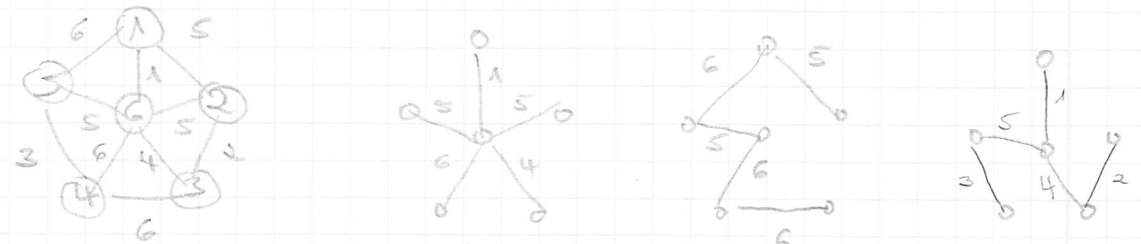
4. Minimale Spannbäume

4.1 Def. (Minimaler aufspannender Baum): Sei $G=(V,E)$ ein zusammenhängender Graph mit Kantengewichten $c\in\mathbb{R}^E$, $\mathcal{T}_G = \{T\subseteq G \text{ aufsp. Baum von } G\}$ und $c(T) := \sum_{e\in T} c_e$ das Gewicht von $T\in\mathcal{T}_G$. Dann heißt

$$T^* \in \operatorname{argmin}_{T\in\mathcal{T}_G} c(T) \quad (\text{d.h. } T^*\in\mathcal{T}_G \text{ mit } c(T^*) = \min_{T\in\mathcal{T}_G} c(T))$$

minimaler aufspannender Baum von G.

4.2 Bsp.:



$c(T) = 21$ $\quad$ $c(T) = (28)$ $\quad$ $c(T^*) = 15$

4.3 Def. (Schnitt): Sei $G=(V,E)$ ein Graph, $\emptyset \subsetneq U \subsetneq V$ eine echte Teilmenge der Knoten. Dann ist

$$\delta(U) := \{uv\in E : u\in U, v\notin U\}$$

der von U induzierte Schnitt.

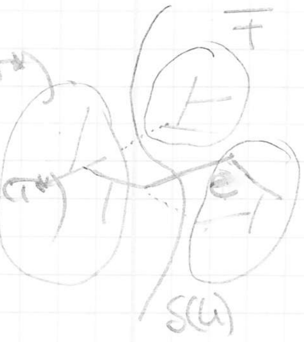
4.4 Satz: Sei $G=(V,E)$ zusammenhängend, $c \in \mathbb{R}^E$ und

a) $F \subseteq E: \exists T^* \in \operatorname{argmin}_{T \in \mathcal{T}_G} c(T): F \subseteq E(T^*)$ (F ist in einem min. Spannbaum enthalten)

b) $\emptyset \subsetneq U \subsetneq V: S(U) \cap F = \emptyset$ (F schneidet $S(U)$ nicht)

c) $e \in \operatorname{argmin}_{e \in S(U)} c_e$.

Dann gilt: $\exists T^* \in \operatorname{argmin}_{T \in \mathcal{T}_G} c(T): F \cup \{e\} \subseteq E(T^*)$



Bew.: Sei $T^* \in \operatorname{argmin}_{T \in \mathcal{T}_G} c(T): F \subseteq E(T^*)$, $e \notin E(T^*)$

Satz 2.10 vi) $\Rightarrow$ $E(T^*) \cup \{e\}$ enthält einen Kreis C mit

$$|C \cap S(U)| \geq 2$$

f ist keine Brücke

Sei $f \in C \cap S(U)$, $f \neq e$ $\Rightarrow T' = (V, E(T^*) \cup \{e\} \setminus \{f\})$ ist ein Baum

$|E(T^*) \cup \{e\} \setminus \{f\}| = |V|-1$

mit $F \cup \{e\} \subseteq E(T')$ und

$$c(T') = c(T^*) + c_e - c_f \leq c(T^*). \quad \square$$

23.04.13

4.5 Alg. (Minimaler aufspannender Baum)

Input: $G = ([n], E)$ zusammenhängend, $c \in \mathbb{R}^E$

Output: $T^* = ([n], E^*) \in \operatorname{argmin}_{T \in \mathcal{T}_G} c(T)$

1. $U_i \leftarrow \{i\}$, $E_i \leftarrow \emptyset$, $T_i \leftarrow (U_i, E_i)$, $i \in [n]$
2. for $k = 1, \dots, n-1$ {
3. wähle $U_i \neq \emptyset$
4. wähle $e_i = u_i v_i \in \operatorname{argmin}_{e \in S(U_i)} c_e$
5. bestimme j: $v_i \in U_j$
6. $U_i \leftarrow U_i \cup U_j$, $E_i \leftarrow E_i \cup \{u_i v_i\} \cup E_j$, $T_i \leftarrow (U_i, E_i)$,
7. $U_j \leftarrow \emptyset$, $E_j \leftarrow \emptyset$, $T_j \leftarrow (U_j, E_j)$
8. }
9. $T^* \leftarrow T_i = (U_i, E_i)$ mit $U_i \neq \emptyset$.

4.6 Satz: Alg. 4.5 ist korrekt.

Bew.: Satz 4.4 für $F = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, $U = U_i$, $e = e_i$, $k = 1, \dots, n-1$. $\square$