$\mathcal{B} \subseteq I$

Bew.: a) $\operatorname{rang} I = \max_{\mathcal{B} \text{ Basis von } I} |\mathcal{B}| \leq |I|$

b) $\mathcal{J} \subseteq I \in \mathcal{I}$ $\forall$ Basis von I

c) Sei $\mathcal{J}$ Basis von F. ~~Für $k=1$ und $F = \dot\bigcup_{i \in K} F_i$ ist~~

$$k \operatorname{rang} F = k|\mathcal{J}| = \sum_{i \in K} |\mathcal{J} \cap F_i| \leq \sum_{i \in K} \operatorname{rang} F_i$$

~~Für $k > 1$ sei für $F \subseteq M$ $F' = \{(m,i) : m \in F, i \in K\}$.~~ mit k Kopien für jedes $m \in M$

~~$\Rightarrow \mathcal{I}' = \{ I'' \subseteq F' : \{m \in M : (m,i) \in I''\} \in \mathcal{I}\}$ ist ein US und~~

~~$F' = \dot\bigcup_{i \in K} \underbrace{\{(m,i) : m \in F_i\}}_{= F_i''}$ und $\operatorname{rang}_{\mathcal{I}'} F_i'' = \operatorname{rang}_{\mathcal{I}} F_i$~~

~~$\Rightarrow k \operatorname{rang} F = k|\mathcal{J}| = |\mathcal{B}'| \leq \sum_{i \in K} \operatorname{rang} F_i'' = \sum_{i \in K} \operatorname{rang} F_i$. □~~

6.3 Def. (Optimierungsproblem über einem US): Sei $\mathcal{I}$ ein US über M und $c \in \mathbb{R}^M$.

$\max_{I \in \mathcal{I}} c(I)$ Optimierungsproblem über $\mathcal{I}$.

$\max_{B \in \mathcal{B}} c(B)$ " über $\mathcal{B}$.

6.7 Def. und Prop. (Matroid): Ein US $\mathcal{I}$ über M heißt Matroid, wenn eine der drei folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:

i) $X, Y \in \mathcal{I}$, $|Y| = |X| + 1 \Rightarrow \exists\, y \in Y \setminus X : X \cup \{y\} \in \mathcal{I}$

ii) $X, Y \in \mathcal{I}$, $|Y| > |X| \Rightarrow \exists\, Z \subseteq Y, |X \cup Z| = |Y| : X \cup Z \in \mathcal{I}$

iii) $Z \subseteq M$, X, Y Basen von $Z \Rightarrow |X| = |Y|$.

Übung? ← **Bew.:** i) $\Rightarrow$ ii) ✓, ii) $\Rightarrow$ iii) Widerspruch

iii) $\Rightarrow$ i) Ann.: $\nexists\, y \in Y \setminus X : X \cup \{y\} \in \mathcal{I} \Rightarrow X$ Basis von $X \cup Y : |X| < |Y|$

6.8 Satz (Charakterisierung von Matroiden)

a) Eine Antikette $\mathcal{C} \subseteq 2^M$ ist genau dann das Zirkuitsystem eines Matroids, wenn gilt

$C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, $C_1 \neq C_2$, $z \in C_1 \cap C_2 \Rightarrow \exists\, C_3 \in \mathcal{C} : C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{z\}$

b) Eine Funktion $r : 2^M \to \mathbb{Z}$ ist genau dann die Rangfunktion eines Matroids, wenn gilt:

"a) => $\mathcal{I}$": $\mathcal{I} = \{I \subseteq M : \nexists C \in \mathcal{C} : C \subseteq I\}$ ist ein US.

$\mathcal{I}$ ist ein Matroid:

$X, Y \in \mathcal{I}$, $|Y| = |X|+1$. zz $\exists y \in Y : X \cup \{y\} \in \mathcal{I}$

1) $|Y \setminus X| = 1$, $Y \setminus X = \{y\} \Rightarrow X \cup \{y\} = Y$

2) $|Y \setminus X| \geq 2$. Ann.: $\forall y \in Y \setminus X : \exists C_y \in \mathcal{C} : C_y \subseteq X \cup \{y\}$.

Es gilt: $C_y \not\subseteq Y \in \mathcal{I} \Rightarrow \exists x_y \in X \cap C_y$

$|Y \setminus X| > |X \setminus Y| \Rightarrow \exists y_1, y_2 \in Y \setminus X : C_{y_1} \cap C_{y_2} \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$

Sei $x_{y_1} = x_{y_2} \in C_{y_1} \cap C_{y_2} \cap (X \setminus Y)$

$\overset{a)}{\Rightarrow} \exists C'_{y_2} \subseteq (C_{y_1} \cup C_{y_2}) \setminus \{x_{y_1}\}$, $C'_{y_2} \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow \exists C'_y \subseteq (X \cup \{y_1, y\}) \setminus \{x_{y_1}\} \quad \forall y \neq y_1$

Falls zwei dieser Kreise y_1 enthalten, ex. Kreis $C \subseteq X$ $\lightning_1$

d.h. jeder " C_y enthält ein Element $y \in Y \setminus X$,

das nur in C_y vorkommt. Wiederholung des Arguments

$\Rightarrow \exists C \subseteq X$ $\lightning$.

07.05.13

i) $r(\emptyset) = 0$

ii) $X \subseteq M,\ x \in M \Rightarrow r(X) \le r(X \cup \{x\}) \le r(X) + 1$

iii) $X \subseteq M,\ x, y \in M: r(X \cup \{x\}) = r(X \cup \{y\}) = r(X)$

$$\Rightarrow r(X \cup \{x, y\}) = r(X)$$

oder äquivalent

iv) $X \subseteq M \Rightarrow 0 \le r(X) \le |X|$ Subkardinalität

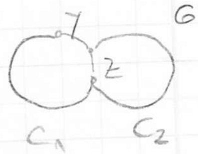
v) $X \subseteq Y \subseteq M \Rightarrow r(X) \le r(Y)$ Monotonie

vi) $X, Y \subseteq M \Rightarrow r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \le r(X) + r(Y)$ Submodularität

Bew: "$\mathcal{I} \Rightarrow a)$" Sei $C = C_1 \cup C_2,\ C' = C \setminus \{z\}$. Falls $C' \notin \mathcal{I}$ ✓

Ann: $C' \in \mathcal{I} \Rightarrow C'$ Basis von $C \Rightarrow$ rang C' = rang $C = |C_1| + |C_2| - 2$

C Sei $y \in C_1 \setminus C_2 \overset{C_1 \in \mathcal{C}}{\Rightarrow} C_1 \setminus \{y\} \in \mathcal{I}$, $C_1 \setminus \{y\} \subseteq C'$



$\overset{6.7\,ii)}{\Rightarrow} \exists Z \subseteq C': |(C_1 \setminus \{y\}) \cup Z| = |C'| = |C_1| + |C_2| - 2,\ (C_1 \setminus \{y\}) \cup Z \in \mathcal{I}$

$\Rightarrow (C_1 \setminus \{y\}) \cup Z = C \setminus \{y\} \Rightarrow C_2 \subseteq (C_1 \setminus \{y\}) \cup Z \notin \mathcal{I}$ ↯.

b) "$\mathcal{I}$ Matroid $\Rightarrow$ i), ii), iii)": Sei $r :\equiv$ rang.

i) 6.6 a), ii) $r(X) \overset{6.6b)}{\le} r(X \cup \{x\}) \overset{6.6c)}{\le} r(X) + r(\{x\}) \le r(X) + 1$

iii) $r(X \cup \{x, y\}) \overset{ii)}{\le} r(X \cup \{x\}) + 1 = r(X) + 1$.

Ann: $r(X \cup \{x, y\}) = r(X) + 1$. Sei B Basis von X, $|B| = r(X)$

$\overset{r(X) = r(X \cup \{x\})}{\Rightarrow} B$ Basis von $X \cup \{x\}$, $r(X \cup \{x, y\}) = r(X) + 1 \overset{6.7\,ii)}{\Rightarrow} B \cup \{y\}$ Basis von $X \cup \{x, y\}$

$\Rightarrow r(X \cup \{y\}) = r(X) + 1$ ↯.

"i), ii), iii) $\Rightarrow \mathcal{I}$ Matroid": $\mathcal{I} = \{I \subseteq M : r(I) = |I|\}$

$\mathcal{I}$ ist ein US.

a) i) $\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{I}$

b) $I, J \in \mathcal{I},\ J \subseteq I,\ r(J) < |J| \Rightarrow r(I) < r(J) + |J \setminus I| < r(I)$ ↯

$\mathcal{I}$ ist ein Matroid.

c) $X, Y \in \mathcal{I},\ |Y| = |X| + 1$. Zz.: $\exists y \in Y: r(X \cup \{y\}) = |X| + 1$.

Ann.: $\forall y \in Y: r(X \cup \{y\}) = r(X) = |X|$

$\overset{iii)}{\Rightarrow} r(X \cup \{x, y\}) = r(X) \overset{iii)}{=} r(X \cup \{x, y, z\}) = r(X \cup Y)$

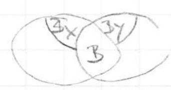
$\ge r(Y) = r(X) + 1$ ↯.

„$\mathcal{I}$ Matroid $\Rightarrow$ iv), v), vi)": Sei r = rang. Es gilt i), ii), iii).

iv) Folgt aus i), ii). v) folgt aus ii). vi) Sei B Basis von $X \cap Y$.

6.7.ii)

$\Rightarrow \exists B_X \subseteq X \setminus Y, B_Y \subseteq Y \setminus X : B \cup B_X$ Basis von X, $B \cup B_X \cup B_Y$ Basis von $X \cup Y$



$\Rightarrow B \cup B_Y \begin{cases} \subseteq Y \\ \in \mathcal{I} \end{cases}$

$\Rightarrow r(X \cup Y) + r(X \cap Y) = \underbrace{|B| + |B_X|}_{= r(X)} + \underbrace{|B_Y| + |B|}_{\leq r(Y)} \leq r(X) + r(Y)$.

„iv), v), vi) $\Rightarrow \mathcal{I}$ Matroid": $\mathcal{I} = \{ I \subseteq M : r(I) = |I| \}$

$\mathcal{I}$ ist ein US:

a) iv) $0 \leq r(\emptyset) \leq |\emptyset| = 0 \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{I}$

b) Sei $X \subseteq Y \in M$, $r(Y) = |Y|$, $Y \setminus X =: Z$.

$\overset{vi)}{\Rightarrow} \underbrace{r(X)}_{\leq |X|} + \underbrace{r(Z)}_{\leq |Z|} \geq r(\overset{= X \cup Z}{Y}) + r(\emptyset) = |Y| = |X| + |Z| \Rightarrow r(X) = |X| \in \mathcal{I}$.

$\mathcal{I}$ ist ein Matroid:

c) $X, Y \in \mathcal{I}$, $|Y| = |X| + 1$, $Z = Y \setminus X$. z.z.: $\exists y \in Y : r(X \cup \{y\}) = |X| + 1$

Ann.: $\forall y \in Y : r(X \cup \{y\}) = r(X) = |X|$, Sei $y_1, y_2 \in Z$

$\overset{vi)}{\Rightarrow} \underbrace{r(X \cup \{y_1\})}_{= r(X)} + \underbrace{r(X \cup \{y_2\})}_{= \cancel{r(X)}} \geq r(X \cup \{y_1, y_2\}) + \cancel{r(X)} - r(X)$

$\Rightarrow \underbrace{r(X)}_{= |X|} = r(X \cup Z) \geq r(Y) = |X| + 1$ ↯. $\square$

13.05.13

6.9 Bem.: Es ex. noch viele weitere Charakterisierungen dieser Art.

6.10 Bsp. (Matroide): Sei $G = (V, E)$ zusammenhängend, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, M n-elementige Menge

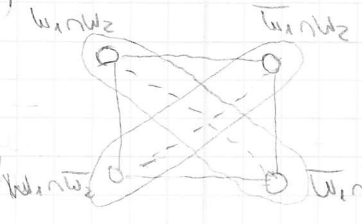
a) $\mathcal{I} = \{ W \subseteq E : W \text{ Wald} \}$ graphisches Matroid

b) $\mathcal{I} = \{ \{ a_{\cdot j}, j \in J \subseteq [n] \} \text{ lin. unabh.} \}$ Matrixmatroid

c) $\mathcal{I} = \{ F \subseteq E : \exists \text{ aufspannender Baum } T \subseteq E \setminus F \}$ Cographisches Matroid

$G \subseteq E$, $G \notin \mathcal{I} \Rightarrow \exists W \subseteq V : G \supseteq \delta(W)$

$\Rightarrow \mathcal{C} = \{ \delta(W) \text{ min. und nichtleer} \}$



Sei $\delta(W_1), \delta(W_2) \in \mathcal{C}$ zwei versch. Schnitte,

$e \in \delta(W_1) \cap \delta(W_2)$.

$\delta(W_1) \Delta \delta(W_2) = \delta(W_1) \cap \delta(W_2) \ldots$

$\Rightarrow \delta(W_1) \Delta \delta(W_2) = \delta\big(\underbrace{(W_1 \cap W_2) \cup (\overline{W_1} \cap \overline{W_2})}_{\neq \emptyset, \neq V}\big) \not\ni e$

$\Rightarrow \exists \delta(W) \in \mathcal{C} : \delta(W) \subseteq \delta(W_1) \Delta \delta(W_2)$

d) $\mathcal{I} = \binom{M}{k} = U_{n,k}$ <u>Uniformes Matroid</u>

$\mathcal{I} = \binom{M}{n} = U_{n,n}$ <u>Freies (triviales) Matroid</u>

e) $M = \dot{\bigcup}_{i=1}^{k} M_i$, $|M_i| = n_i$, $\sum n_i = n$, $k_i \leq n_i$, $i=1,\dots,k$

$\mathcal{I} = \{ I \subseteq M : |I \cap M_i| \leq k_i, \; i=1,\dots,k \}$ <u>Partitionsmatroid</u>

<u>6.11 Satz</u>: Jedes US ist als Durchschnitt von Matroiden darstellbar.

<u>Bew:</u> Zz.: Ist $\mathcal{I}$ ein US auf M, dann gibt es Matroide $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_k$ mit $\mathcal{I} = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{I}_i$.

Sei $\mathcal{C}$ das Zirkuitsystem von $\mathcal{I}$

$\overset{6.8a)}{\Rightarrow}$ $\{C\}$ ist das Zirkuitsystem eines Matroids $\mathcal{I}_C$ $\forall C \in \mathcal{C}$

Wir zeigen: $\mathcal{I} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} \mathcal{I}_C$.

"$\subseteq$": $I \in \mathcal{I} \Rightarrow \nexists C \in \mathcal{C}: C \subseteq I \Rightarrow I \in \mathcal{I}_C \; \forall C \in \mathcal{C}$

"$\supseteq$": $I \in \bigcap_{C \in \mathcal{C}} \mathcal{I}_C \Rightarrow C \nsubseteq I \; \forall C \in \mathcal{C} \Rightarrow I \in \mathcal{I}$. $\square$

<u>6.12 Bsp:</u> Sei $G = (V, E)$,

$\mathcal{I} = \{ S \subseteq V : S \text{ stabil} \}$, $\mathcal{C} = \{ \{u,v\} \subseteq V : uv \in E \}$

$\mathcal{I}_{\{u,v\}} = \{ S \subseteq V : |S \cap \{u,v\}| \leq 1 \}$, $\mathcal{I} = \bigcap_{uv \in E} \mathcal{I}_{\{u,v\}}$

<u>6.13 Frage und Def.</u> (Orakel): Wie speichert man ein US / Matroid auf M?

a) Durch Auflistung von $\mathcal{I}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ oder rang?

exponentieller Speicherplatzbedarf $\Rightarrow$ exp. Laufzeit

b) Durch ein <u>Unabh.-</u>, <u>Basis-</u>, <u>Zirkuit- oder Rangorakel</u>,

d.h. eine Funktion

$$f: 2^M \to \{0,1\}, \; I \subseteq M \mapsto \begin{cases} 1, & I \in \mathcal{I}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

bzw. $\text{rang}: 2^M \to \mathbb{N}_0$, $I \mapsto \text{rang}\, I$.

<u>6.14 Alg. (Greedy-Alg. für US)</u>:

Input: $M = [n]$, $c \in \mathbb{R}^n$, Unabh.orakel $f: 2^M \to \{0,1\}$

Output: $I_G \in \mathcal{I}$.

c) Wir behandeln einen Orakelaufruf als elementare Operation

d) Ein polynomieller Alg., der Orakel aufruft, ist ein <u>Orakel-polyn. Alg.</u>

1. Sortiere M nach Gewicht absteigend als $c_1 \ge \dots \ge c_n$

2. $I_G \leftarrow \emptyset$

3. for $i = 1, \dots, n$ {

4. if $(c_i \le 0)$ break

5. if $(\underbrace{I_G \cup \{i\} \in \mathcal{I}})$ {

$\Leftrightarrow f(I \cup \{i\}) = 1$

6. $I_G \leftarrow I_G \cup \{i\}$

}

7.

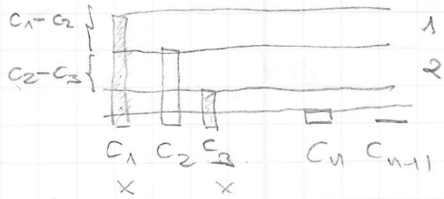
<u>6.15 Satz</u> (Jenkyns [1976]; Güte des Greedy-Alg. für US): Sei $\mathcal{I}$ US auf $M = [n]$, $c \in \mathbb{R}^M$,

$$I^* \in \operatorname*{argmax}_{I \in \mathcal{I}} c(I)$$

und I_G das Ergebnis von Alg. 6.14. Dann gilt:

$$1 \ge \frac{c(I_G)}{c(I^*)} \overset{(*)}{\ge} \min_{I \subseteq M} \frac{\text{u-rang}(I)}{\text{rang}(I)} =: q(\mathcal{I}) \quad \text{Rangquotient von } \mathcal{I}$$

und für jedes US gibt es $c \in \{0,1\}^M$, so daß $(*)$ mit Gleichheit gilt.



<u>Bew.:</u> O.B.d.A. sei $c_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Setze $c_{n+1} := 0$. Dann gilt

a) $$c(I^*) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|I^* \cap [i]|}_{\le \text{rang}[i]} (c_i - c_{i+1})$$

b) $$c(I_G) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|\underbrace{I_G \cap [i]}_{\text{Basis von } [i]}|}_{\ge \text{u-rang}[i]} (c_i - c_{i+1})$$

$$\frac{|I_G \cap [i]|}{|I^* \cap [i]|} \ge \frac{\text{u-rang}[i]}{\text{rang}[i]} \ge q(\mathcal{I})$$

$$\ge \sum_{i=1}^{n} |I^* \cap [i]| \, q(\mathcal{I}) (c_i - c_{i+1})$$

$$= q(\mathcal{I}) \, c(I^*).$$

Sei $I \subseteq M$: $\frac{\text{u-rang}\, I}{\text{rang}\, I} = q(\mathcal{I})$, o.B.d.A. $I = [k]$ und $B = [\ell]$ Basis von I mit $|B| = \text{u-rang}(I)$. Setze $c_i := \begin{cases} 1, & i \in I \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow c(I_G) = \ell$, $c(I^*) = k = \text{rang}(I)$. $\square$

6.16 Korollar (Edmonds & Rado [ ]): Sei $\mathcal{I}$ US auf M. Dann ist $\mathcal{I}$ genau dann ein Matroid, wenn der greedy-Alg. für alle 0-1 gewichte c eine gewichtsmaximale unabhängige Menge liefert.

6.17 Beob.: Der greedy alg. 6.14 ist orakel polynomial.

6.18 Satz (Edmonds [1979], Lawler [1975]): Seien $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ zwei Matroide auf derselben Grundmenge M und jeweils gegeben durch ein Unabhängigkeitsorakel. Dann gibt es einen orakelpolynomialen Algorithmus, der das Optimierungsproblem

$$\max_{I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} c(I)$$

löst.

Bew.: DM II.

6.19 Bem. Über dem Durchschnitt von 3 Matroiden kann man vermutlich nicht in orakelpolynomialer Zeit optimieren, da sich NP-schwere Probleme wie das TSP so formulieren lassen.

6.20 Bem. (greedy-Alg. für Min-probleme über Basissystemen). Betrachte folgenden Greedy-Alg. zur Lösung von $\min_{I \in \mathcal{B}} c(I)$

Input: $M = [n]$, $c \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{I}$ gegeben durch Unabh.-orakel

Output: $B_G \in \mathcal{B}$

```
Sortiere M s.d. c_1 ≤ ... ≤ c_n
B_G ← ∅
for i = 1, ..., n {
    if (B_G ∪ {i} ∈ I) {
        B_G ← B_G ∪ {i}
    }
}
```

Man kann zeigen, daß $\mathcal{I}$ wieder genau dann ein Matroid ist, wenn dieser Alg. für alle 0-1 Gewichte eine kostenminimale Basis liefert. Angewendet auf US kann man aber keine Gütegarantie beweisen, wie das folgende Bsp zeigt. Betrachte dazu das US der stabilen Mengen und folgenden Graphen:

$c = (1, k, 2)$

Dann ist

$$\frac{c(I_G)}{c(B^*)} = \frac{1+k}{2} = \frac{k+1}{2} \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty .$$

14.05.13