7. Kürzeste Wege

7.1. Def. (Kürzester Weg): Sei $G=(V,E)$ ein Graph mit nichtnegativen Kantengewichten $c \in \mathbb{R}^E_{\geq 0}$, $s,t \in V$ zwei Knoten.

a) $P^* \in \operatorname{argmin}_{P \in \mathcal{P}(s,t)} c(P)$ — Kürzester Weg von s nach t

b) $c(P^*) =: dist_c(s,t)$ — (gewichteter) Abstand von s und t

c) $\min_{P \in \mathcal{P}(s,t)} c(P)$ — Kürzeste-Wege-Problem

7.2 Alg (von Dijkstra):

Input: $G=(V,E)$, $c \in \mathbb{R}^E_{\geq 0}$, $s,t \in V$

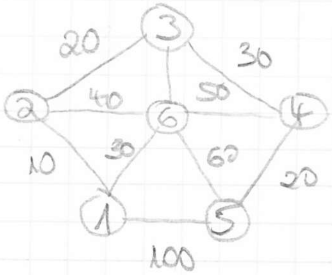
Output: $d(v) = dist_c(s,v) \quad \forall v \in V$

$P^*(v) = (v, p(v), p^2(v), \dots, s) \in \operatorname{argmin}_{P \in \mathcal{P}(s,v)} c(P) \quad \forall v \in V: d(v) < \infty$

Datenstrukturen: $d \in (\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\})^E$ "distance", $p \in V^V$ "predecessor", $S \subseteq V$ "markierte Knoten"

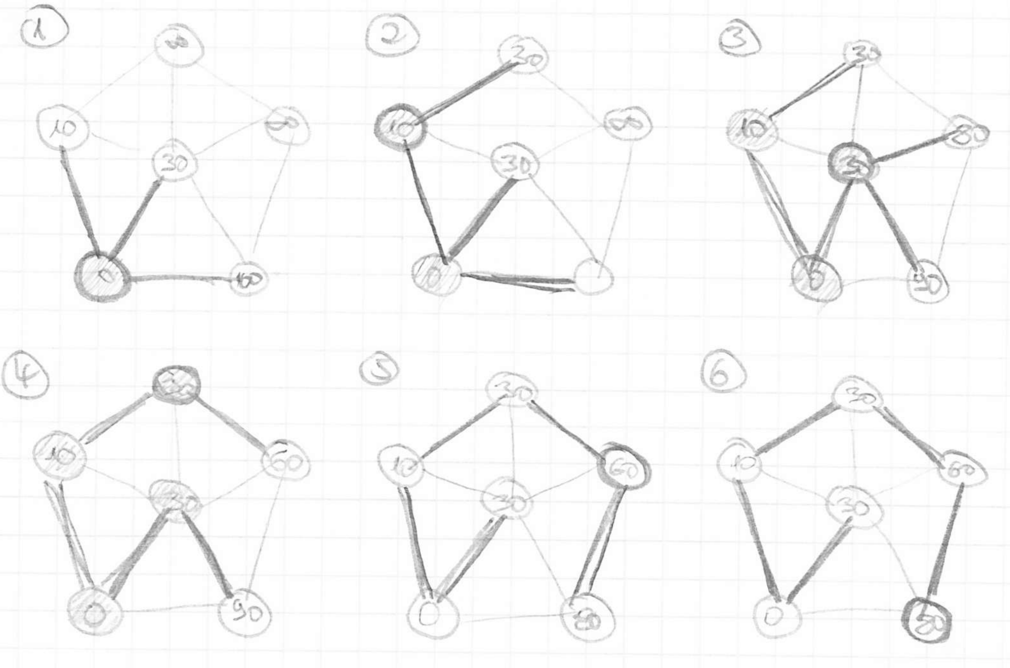
$$
\begin{array}{l}
d(s) = 0,\ p(s) = s,\ S = \{s\} \\
\text{forall } v \in V \setminus S\ \{ \\
\quad \text{if } v \in \mathcal{N}(s)\ \{ d(v) = c_{sv},\ p(v) = s \} \\
\quad \text{else}\ \{ d(v) = +\infty,\ p(v) = s \} \\
\} \\
\text{while } \exists u \in V \setminus S : d(u) < \infty\ \{ \\
\quad \text{wähle } u \in \operatorname{argmin}_{u \notin S} d(u) \\
\quad S \leftarrow S \cup \{u\} \\
\quad \text{forall } v \in \delta(u) \cap (V \setminus S)\ \{ \\
\quad\quad \text{if } d(u) + c_{uv} < d(v)\ \{ \\
\quad\quad\quad d(v) \leftarrow d(u) + c_{uv} \\
\quad\quad\quad p(v) \leftarrow u \\
\quad\quad \} \\
\quad \} \\
\}
\end{array}
$$

7.3 Bsp (Dijkstras Algorithmus):



$s=1, \; t=5$

Iteration	S	u	d: 1	2	3	4	5	6	p: 1	2	3	4	5	6
1	$\{1\}$	$s=1$	0	10	∞	∞	100	30	1	1	1	1	1	1
2	$\{1,2\}$	2	0	10	30	∞	100	30	1	1	2	1	1	1
3	$\{1,2,6\}$	6	0	10	30	80	90	30	1	1	2	6	6	1
4	$\{1,2,3,6\}$	3	0	10	30	60	90	30	1	1	2	3	6	1
5	$\{1,2,3,4,6\}$	4	0	10	30	60	80	30	1	1	2	3	4	1
6	$\{1,2,3,4,5,6\}$	5	0	10	30	60	80	30	1	1	2	3	4	1



7.4 Lemma In jedem Schritt von Alg. 7.2 gilt:

a) $d(v) = dist_c(s,v) \quad \forall v \in S$

b) $d(v) = dist_c^{G[S \cup \{v\}]}(s,v) \quad \forall v \notin S$

d.h. $d(v)$ ist die Länge eines kürzesten Wegs von s nach v, falls v markiert ist, und die Länge eines kürzesten Wegs von s nach v, der außer v nur markierte Knoten benutzt, sonst.

Bew.: Induktion über $k = |S|$

Ind. Anf.: $k = |S| = 1$ ✓

Ind. Schritt: $k = |S| \to k+1 = |S \cup \{u\}|$

a) Ann.: $d(u) = \mathrm{dist}_c^{G[S \cup \{u\}]}(s,u) > \mathrm{dist}_c(s,u)$

Sei $P \in \operatorname{argmin}_{P \in \mathcal{P}(s,u)} c(P)$, d.h. $c(P) = \mathrm{dist}_c(s,u)$

$\Rightarrow P = (\underbrace{s, \dots}_{\in S}, \underbrace{w}_{\notin S}, \dots, \underbrace{u}_{\notin S \text{ (zu Beginn der Iteration)}})$ mit einem ersten unmarkierten Knoten $w \notin S$

$\Rightarrow d(u) = \min_{v \notin S} d(v) \leq d(w) \leq c(P) = \mathrm{dist}_c(s,u)$ ↯

b) Ann.: $d(v) = \min\{ \underbrace{\min_{P \in \mathcal{P}^{G[S \cup \{u\}]}(s,v)} c(P)}_{\text{kürzester Weg über markierte Knoten}}, \underbrace{\min_{P \in \mathcal{P}^{G[S \cup \{u\}]}(s,u)} c(P) + c_{uv}}_{\text{kürzester Weg über markierte Knoten inkl. } u \text{, wobei } u \text{ Vorletzter Knoten ist}} \} > \mathrm{dist}_c^{G[S \cup \{u,v\}]}(s,v)$

$\Rightarrow \exists P \in G[S \cup \{u,v\}] : c(P) = \mathrm{dist}_c^{G[S \cup \{u,v\}]}(s,v)$

$\Rightarrow P = (s, \dots, u, \dots, w, v)$, $w \in S$

$\Rightarrow \mathrm{dist}_c^{G[S \cup \{u,v\}]}(s,v) = c(P) \geq \mathrm{dist}_c(w) + c_{wv} \geq d(v)$ ↯. □

7.5 Korollar: Alg 7.4 ist korrekt.

7.6 Bem.: Alg. 7.4 kann mit einer Laufzeit von $O(|V|^2 \langle C \rangle)$ implementiert werden, wobei $C = \max_{v \in V} \langle c_v \rangle$.

7.7 Bem.: Alg 7.4 funktioniert auch für gerichtete Graphen, falls $c \in \mathbb{R}^A_{\geq 0}$.

8. Maximale Flüsse in Netzwerken

8.1 Def. (Netzwerk, Fluss):

a) Ein **Netzwerk** $N = (V, A, c, s, t)$ besteht aus

i) einem gerichteten Graphen $D = (V, A)$

ii) einem Vektor von Kantenkapazitäten $c \in \mathbb{R}^A_{\geq 0}$

iii) zwei verschiedenen ausgezeichneten Knoten $s, t \in V$,
der Quelle s und der Senke t

b) Ein (zulässiger) (s,t)-Fluss (oder st-Fluss) in N ist ein Vektor $x \in \mathbb{R}^A$, der folgende Bedingungen erfüllt

i) $0 \le x_a \le c_a \quad \forall a \in A$ Kantenkapazitäten

ii) $\underbrace{x(\delta^-(v))}_{\text{Fluss nach } v} = \underbrace{x(\delta^+(v))}_{\text{Fluss aus } v} \quad \forall v \in V \setminus \{s,t\}$ Flusserhaltung

c) Sei x ein zulässiger st-Fluss, $W \subseteq V$, $s \in W \not\ni t$. Dann heißt

$\partial x(v) := x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v))$ Nettoausfluss aus $v \in V$
$\partial x(W) := x(\delta^+(W)) - x(\delta^-(W))$ " " $W \subseteq V$,
$\partial x(s) =: v(x)$ Wert des Flusses x

d) $\max\limits_{x \text{ Fluss in } N} v(x)$ Maximales Flussproblem in N (Max flow Problem)

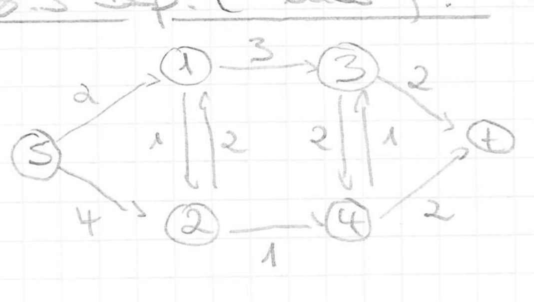
e) $x \in \operatorname{argmax} v(x)$ maximaler st-Fluss $\qquad W \subseteq V, s \in W, t \notin W$.

8.2 Beob.: Sei x ein st-Fluss in einem Netzwerk N. Dann gilt:

a) $\partial x(v) = 0 \quad \forall v \in V \setminus \{s,t\}$
b) $\partial x(W) = \partial x(s) \quad \forall W \subseteq V, s \in W \not\ni t$
c) $\partial x(t) = \partial x(s)$

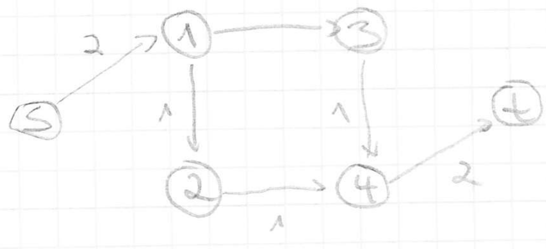
Bew.: a) Def., b), c) Übung $\square$

8.3 Bsp. (Fluss):

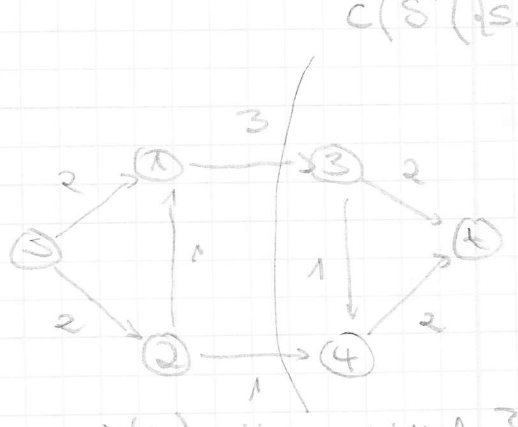


Netzwerk mit Kapazitäten

$c(\delta^+(\{s,1,2\})) = 4$



$v(x) = 2$



$v(x) = 4$ maximal?

8.4 Def. (Kapazität eines Schnittes): Sei N ein Netzwerk.

a) Sei $W \subseteq V$, $s \in W \not\ni t$. Dann heisst

$S^+(W) =: (W : V \setminus W)$ (gerichteter) (s,t)-Schnitt oder st-Schnitt

b) $c(S^+(W)) = c(W : V \setminus W)$ Kapazität des st-Schnittes $S^+(W)$

c) $S^+(W^*) \in \underset{S^+(W) \text{ st-Schnitt}}{\operatorname{argmin}} c(S^+(W))$ minimaler st-Schnitt

21.05.13

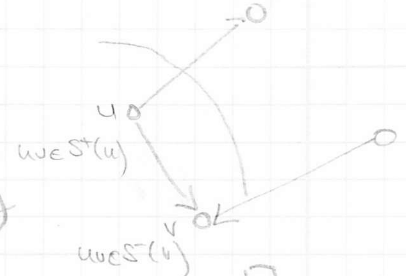
8.5 Prop.: Sei x st-Fluss in einem Netzwerk N und $S^+(W)$ ein st-Schnitt; Dann gilt:

$$v(x) \leq c(S^+(W)), \text{ insbesondere}$$

$$\max_{x \text{ st-Fluss}} v(x) \leq \min_{S^+(W) \text{ st-Schnitt}} c(S^+(W)).$$

Bew.:

$$c(S^+(W)) \geq x(S^+(W)) - x(S^-(W))$$
$$= \sum_{v \in W} \underbrace{x(S^+(v)) - x(S^-(v))}_{= \partial x(v)}$$
$$= \partial x(s) = v(x) \qquad \square$$



8.6 Def. (Saturierter Schnitt): Sei x st-Fluss in N und $S^+(W)$ st-Schnitt. Dann heisst

$S^+(W)$ saturiert durch x $:\Leftrightarrow c(S^+(W)) = \partial x(W)$.

8.7 Def. (Augmentierendes Netzwerk): Sei x st-Fluss im Netzwerk $N = (V, A, c, s, t)$. Def. das augmentierende Netzwerk oder Residualnetzwerk $N' = (V, A', c', s, t)$ von x bzgl. N durch

a) $uv \in A \Rightarrow uv \in A'$, $c'_{uv} := c_{uv} - x_{uv}$ Vorwärtsbogen

b) $uv \in A \Rightarrow vu \in A'$, $c'_{vu} := x_{uv}$ Rückwärtsbogen

8.8 Bem: a) Das augmentierende Netzwerk N' gibt die zu einer Flusserhöhung verbleibende Kapazität an.

b) N' ist nicht notwendig einfach (kann parallele Bögen enthalten).

$u \xrightarrow{c'_{uv} = c_{uv} - x_{uv}} v$ Vorwärtsbogen

$u \xleftarrow{c'_{uv} = x_{vu}} v$ Rückwärtsbogen

4a

8.9 Def. (Augmentierender Weg): Sei x st-Fluss in N und N' das augmentierende Netzwerk. Ein gerichteter uv-Weg P' in N' heißt augmentierend, wenn gilt

$$c'_a > 0 \quad \forall a \in P'.$$

8.10 Lemma: Sei P' ein aug. st-Weg in N' bzgl. x und

$$0 \le \varepsilon \le \min_{a \in P'} c'_a .$$

Dann ist $x^\varepsilon \in \mathbb{R}^A$ def. durch

$$x^\varepsilon_{uv} := \begin{cases} x_{uv}, & uv \notin P' \\ x_{uv} + \varepsilon, & uv \in P' \text{ Vorwärtsbogen} \\ x_{uv} - \varepsilon, & vu \in P' \text{ Rückwärtsbogen} \end{cases}$$

$u \xrightarrow{+\varepsilon} v$

$u \xleftarrow{-\varepsilon} v$

ein zul. st-Fluss in N und

$$v(x^\varepsilon) = v(x) + \varepsilon.$$

Wir sagen: x wurde durch Augmentieren um ε entlang P' zu x^ε erhöht.

Bew.: Wir zeigen zuerst, dass x' die Kapazitäts- und Flusserhaltungsbedingungen erfüllt.

a) $uv \notin P \Rightarrow 0 \le x^\varepsilon_{uv} = x_{uv} \le c$

$uv \in P'$ Vorwärtsbogen $\Rightarrow c'_{uv} = c_{uv} - x_{uv} \ge \varepsilon \ge 0$

$\Rightarrow 0 \le x^\varepsilon_{uv} = x_{uv} + \varepsilon \le x_{uv} + c_{uv} - x_{uv} = c_{uv}$

$vu \in P'$ Rückwärtsbogen $\Rightarrow c'_{vu} = x_{uv} \ge \varepsilon \ge 0$

$\Rightarrow 0 \le x^\varepsilon_{uv} = x_{uv} - \varepsilon \le x_{uv} \le c_{uv}$

b) Sei $v \in V \setminus V(P) \Rightarrow x^\varepsilon(\delta^+(v)) - x^\varepsilon(\delta^-(v)) = x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v)) = 0$

Sei $v \in V(P) \setminus \{s,t\}$, $vw \in P'$, $uv \in P'$

$\Rightarrow x^\varepsilon(\delta^+(v)) - x^\varepsilon(\delta^-(v))$

$= x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v))$

$$\begin{cases} +\varepsilon & \text{, falls } vw \text{ Vorwärtsbogen} \\ \quad - (-\varepsilon) & \text{, falls } vw \text{ Rückwärtsbogen} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\varepsilon & \text{, falls } uv \text{ Rückwärtsbogen} \\ \quad - \varepsilon & \text{, falls } uv \text{ Vorwärtsbogen} \end{cases}$$

$= 0$

c) Sei $sw \in P'$.

$$\Rightarrow x^{\varepsilon}(\delta^+(s)) - x^{\varepsilon}(\delta^-(s))$$

$$= x(\delta^+(s)) - x(\delta^-(s)) \begin{cases} +\varepsilon & \text{, falls } sw \text{ Vorwärtsbogen} \\ \quad - (-\varepsilon) & \text{, " " Rückwärtsbogen} \end{cases}$$

$$= v(x) + \varepsilon. \qquad \square$$

8.11 Kor. Ein Fluss ist genau dann max., wenn es keinen augmentierenden Weg gibt.

8.12 Lemma: Sei x ein max. st-Fluss in einem Netzwerk und

$$S := \{v \in V : \exists \text{ aug. } sv\text{-Weg}\} \cup \{s\}$$

Dann ist $\delta^+(S)$ ein der x saturierter st-Schnitt, d.h.

$$c(\delta^+(S)) = v(x).$$

Bew.: x max. $\overset{8.11}{\Rightarrow} \nexists$ aug. st-Weg $\Rightarrow t \notin S \Rightarrow \delta^+(S)$ st-Schnitt.

Sei $u \in S$, $v \notin S \Rightarrow c'_{uv} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_{uv} = c_{uv} & , uv \in A \\ x_{vu} = 0 & , vu \in A \end{cases}$

$$\Rightarrow v(x) \overset{8.2b)}{=} x(\delta^+(S)) - x(\delta^-(S)) = c(\delta^+(S)) - 0 = c(\delta^+(S)). \quad \square$$

8.13 Satz: In einem Netzwerk $N = (V, A, c, s, t)$ mit ganzzahligen Kapazitäten $c \in \mathbb{N}_0^A$ existiert ein max. Fluss.

Bew.: Starte mit dem Fluss $x = 0$. Solange x nicht max. ist, erhöhe den Wert von x entlang eines aug. Wegs um $\varepsilon = 1$. x und die Kapazitäten im aug. Netzwerk bleiben dabei stets ganzzahlig, d.h. der Schritt kann iteriert werden. Da der Flusswert durch die Kapazität jedes st-Schnittes beschränkt und insbesondere endlich ist, gibt es nur endlich viele aug. Wege. $\square$

8.14 Korollar: In einem Netzwerk $N = (V, A, c, s, t)$ mit rationalen Kapazitäten $c \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^A$ ex. ein max. Fluss.

Bew.: Sei $c_a = \frac{p_a}{q_a}$, $p_a \in \mathbb{Z}$, $q_a \in \mathbb{N}$, $Q := \text{kgV } q_a$. Setze $\bar{c} = cQ$, berechne max. Fluss $\bar{x}$, setze $x = \bar{x}/Q$. $\square$

8.15 Satz (Max-Flow-Min-Cut-Theorem, Ford & Fulkerson [ ])

Sei $N=(V,A,c,s,t)$ ein Netzwerk mit rationalen Bogenkapazitäten. Dann ist der Wert des max. st-Flusses gleich der Kapazität des minimalen st-Schnittes

$$\max_{x \text{ st-Fluss in } N} v(x) = \min_{W \text{ st-Schnitt in } N} c(\delta^+(W))$$

8.16 Alg. (Augmentierung Pfad-Algorithmus, Ford & Fulkerson [ ]):

Input: Netzwerk $N=(V,A,c,s,t)$, $c \in \mathbb{Q}^A_{\geq 0}$.

Output: max st-Fluss $x^* \in \mathbb{Q}^A_{\geq 0}$

1. $x^* \leftarrow 0$
2. while ($\exists$ augm. Pfad P') {
3. $\quad \varepsilon \leftarrow \min_{a \in P'} c'_a$
4. $\quad$ aug. x^* entlang P' um ε
5. }

8.17 Satz.: Alg. 8.16 berechnet in endlicher Zeit von

$$O(v(x^*) \cdot |A| \cdot \max\langle c_a \rangle)$$

einen max. st-Fluss.

8.18 Bem: Die Laufzeit von Alg. 8.16 ist nicht polynomial.

8.19 Satz (Successive Shortest Path Alg., Edmonds & Karp [1972]):

Wenn man in Alg 8.16 immer entlang aug. Wege mit minimaler Bogenzahl augmentiert, terminiert Alg 8.16 nach $O(|A||V|)$ Iterationen mit einer Gesamtlaufzeit von $O(|A|^2|V| \max\langle c_a \rangle)$.

Bew.: / $\square$

9. Abzählen

9.1 Def (Zählfunktion): Sei $\mathfrak{M} = \{M_n : n \in I\}$ eine Familie von Mengen mit Indexmenge I. Dann heisst

$$f: I \to \mathbb{N}_0, \quad n \mapsto |M_n| \quad \text{Zählfunktion von } \mathfrak{M}$$

9.2 Bsp. (Darstellungsmöglichkeiten für Zählfunktionen):

Sei $M_n = \dot{\bigcup}_{k=0}^{n} \binom{[n]}{k}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $f(n) = |S_n|$.

a) geschlossene Formel: $f(n) = 2^n$

b) Summenformel: $f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

c) Rekursion: $f(n) = 2 \cdot f(n-1)$, $f(0) = 1$

d) Erzeugende Funktion: $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n = \frac{1}{1-2z}$

9.3 Satz (Summenregel): Sei $M = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} M_i$ die disjunkte Vereinigung von Mengen M_i, $i = 1, \dots, n$. Dann gilt:

$$|M| = \sum_{i=1}^{n} |M_i|$$

9.4 Bsp (Summenregel):

$$\binom{[n]}{k} = \binom{[n-1]}{k} \,\dot{\cup}\, \left\{ M \cup \{n\} : M \in \binom{[n-1]}{k-1} \right\} \Rightarrow \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

9.5 Satz (Produktregel): Sei $M = \bigtimes_{i=1}^{n} M_i$ das Produkt der Mengen M_i. Dann gilt:

$$|M| = \prod_{i=1}^{n} |M_i|$$

9.6 Bsp. (Produktregel): $\left|\{0,1\}^n\right| = \left|\bigtimes_{i=1}^{n} \{0,1\}\right| = \prod_{i=1}^{n} \underbrace{|\{0,1\}|}_{=2} = 2^n$.

9.7 Satz (Gleichheitsregel): Sei $f: M \to N$ eine Bijektion zwischen endlichen Mengen M, N. Dann gilt

$$|M| = |N|.$$

9.8 Bsp. (Gleichheitsregel): $M = \dot{\bigcup}_{k=0}^{n} \binom{[n]}{k}$, $N = \{0,1\}^n$

$$f: M \to N, \quad I \mapsto \chi^I$$

wobei $\chi^I_i := \begin{cases} 1, & i \in I \\ 0, & i \notin I \end{cases}$ der Inzidenz- oder charakteristische Vektor von I.

f Bijektion $\Rightarrow |M| = |N| = 2^n$.

9.9 Satz (Regel vom zweifachen Abzählen): Sei $I \subseteq M \times N$ eine Relation zwischen endlichen Mengen M, N und

$$f(m) := |\{n \in N : mIn\}| \quad , m \in M$$

$$f(n) := |\{m \in M : mIn\}| \quad , n \in N$$

Dann gilt

$$\sum_{m \in M} f(m) = \sum_{n \in N} f(n).$$

Bew.: Sei $A \in \{0,1\}^{M \times N}$ die Inzidenzmatrix von I, d.h.

$$a_{mn} = \begin{cases} 1, & mIn \\ 0, & m\not{I}n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{m \in M} f(m) = \underbrace{\sum_{m \in M} \sum_{n \in N} a_{mn}}_{\text{zeilenweise Summation}} = \underbrace{\sum_{n \in N} \sum_{m \in M} a_{mn}}_{\text{spaltenweise Summation}} = \sum_{n \in N} f(n). \quad \square$$

9.10 Bsp. (Teiler): $M = N = [n]$, $iIj :\Leftrightarrow i \mid j$

$$M \quad \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & & 1 & & 1 & & 1 \\ 3 & & & 1 & & & 1 \\ 4 & & & & 1 & & \\ 5 & & & & & 1 & \\ 6 & & & & & & 1 \ \ddots \end{array} = A$$

$$f(i) = |\{1 \le j \le n : i \mid j\}| = \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \quad \text{\# Vielfache von } i$$

$$f(j) = |\{1 \le i \le n : i \mid j\}| = t(j) \quad \text{\# Teiler von } j$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} t(j) = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i} = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} =: n \underbrace{H(n)}_{n\text{-te harmonische Zahl}} \approx n \log n$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^{n} t(j)}{n} \approx \log n \quad \text{\# durchschnittliche Anzahl Teiler der ersten } n \text{ natürlichen Zahlen.}$$

9.11 Def. (k-Partition, k-Permutation, k-Multiteilmenge):

a) Eine Menge N heißt n-Menge, wenn $|N| = n$ ist.

b) Sei N eine n-Menge, $\emptyset \neq N_i \subseteq N$, $i = 1, \dots, k \le n$

$$N = \dot{\bigcup_{i=1}^{k}} \underbrace{N_i}_{\text{nichtleer}} \quad k\text{-Partition der Menge } N$$

$$S_{n,k} := \left\{ {n \atop k} \right\} \quad \text{\# } k\text{-Partitionen einer } n\text{-Menge}$$

Stirlingzahl der 2. Art

$S_{0,0} := 1$

$S_{n,0} := 0$

$S_{n,k} := 0 \quad , k > n$

c) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 1$ natürliche Zahlen.

$n = \sum_{i=1}^{k} \underset{\geq 1}{n_i}$ k-Partition der Zahl n

$P_{n,k} :=$ # k-Partitionen der nat. Zahl n

d) Sei N eine ~~Menge~~ Menge $|N| = n$; $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$.

$\{(n_1, \dots, n_k) \in N^k : n_i \neq n_j \text{ für } i \neq j\}$ k-Permutation der Menge N

$n^{\underline{k}} := n \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ # k-Permutationen einer ~~n-Menge~~ n-Menge

fallende Faktorielle

$n^{\overline{k}} := n \cdot \ldots \cdot (n+k-1)$ steigende Faktorielle

Insbesondere ist

$n^{\underline{n}} = n! = $ # Permutationen einer n-Menge

$n^{\underline{k}} = k! \binom{n}{k} = $ # geordneten k-Teilmengen einer n-Menge

e) Sei $N = \bigcup_{i=1}^{k} N_i$ eine k-Partition von N, $|N| = n$.

$(N_1, \dots, N_k)$ geordnete k-Partition der Menge N

$k! \, S_{n,k} = $ #   "

f) Sei $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ k-Partition von $n \in \mathbb{N}$, σ Permutation von $[k]$

$(n_{\sigma(1)}, \dots, n_{\sigma(k)})$ geordnete k-Partition der Zahl n

$\binom{n-1}{k-1} = $ #   "

9.13. Proposition: Die Anzahl der geordneten k-Partitionen einer natürlichen Zahl n ist $\binom{n-1}{k-1}$.

Bew.: Mit Gleichheitsregel. Sei

$M = \{(n_1, \dots, n_k) : \sum_{i=1}^{k} n_i = n, \; n_i \geq 1\}$

$N = \binom{[n-1]}{k-1}$.

$f: M \to N$, $(n_1, \dots, n_k) \mapsto \{n_1, n_1+n_2, \dots, \underbrace{n_1 + \dots + n_{k-1}}_{\leq n-1}\}$

$g: N \to M$, $\underset{a_1 < \dots < a_{k-1}}{\{a_1, \dots, a_{k-1}\}} \mapsto (a_1, a_2 - a_1, \dots, a_{k-1} - a_{k-2}, n - a_{k-1})$

$\cancel{a_1} + a_2 - \cancel{a_1} + \dots + \cancel{a_{k-1}} - a_{k-2} + n - \cancel{a_{k-1}} = n$

$\Rightarrow g = f^{-1}$.

Die Aussage folgt auch aus Blatt 3, Aufgabe 2. □

9.12. Bsp. (geordnete k-Partition einer Zahl n): $n = 5$, $k = 3$:

$5 = 1+1+3 = 1+3+1 = 3+1+1 = 1+2+2 = 2+1+2 = 2+2+1$

$\binom{5-1}{3-1} = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$.

9.11 Def. (Fortsetzung):

f) Sei N eine n-Menge

$\{\{n_1, \dots, n_k\}\}$ k-Multiteilmenge von N

$$\frac{n^{\overline{k}}}{k!} = \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} = \binom{n+k-1}{k} \text{ \# } k\text{-Multiteilmenge von } N$$

9.13 Prop.: Die Anzahl der k-Multiteilmengen einer n-Menge N ist $\binom{n+k-1}{k}$.

Bew.: Mit Gleichheitsregel.

$$M = \left(\!\binom{N}{k}\!\right)$$

$$N = \binom{[n+k-1]}{k}$$

$$f: M \to N, \{n_1 \le \dots \le n_k\} \mapsto \{n_1, n_2+1, n_3+2, \dots, n_k+k-1\}$$

$$g: N \to M, \{\underbrace{a_1}_{\le n} < \dots < \underbrace{a_k}_{\le n+k-1}\} \mapsto \{\underbrace{a_1}_{\le n}, a_2-1, a_3-2, \dots, \underbrace{a_k-(k-1)}_{\le n}\}$$

$\Rightarrow g = f^{-1}$. $\square$

9.15 Kor. (Zählen von Funktionen): Sei $\overset{\text{Fächer}}{N}$ n-Menge, $\overset{\text{Bälle}}{M}$ m-Menge.

a) $|\{f: M \to N\}| = n \cdots n = n^m$

b) $|\{f: M \to N \text{ injektiv}\}| = n(n-1)\cdots(n-m+1) = n^{\underline{m}}$ höchstens 1 Ball / Fach

c) $|\{f: M \to N \text{ surjektiv}\}| = |\{\underbrace{\{f^{-1}(n) : n \in N\}}_{\text{geordnete } n\text{-Partition von } M}\}| = n!\, S_{m,n}$ mindestens 1 Ball / Fach

d)
$$\begin{aligned}
n^m &= |\{f: M \to N\}| \\
&= \sum_{A \subseteq N} |\{f: M \to A \text{ surjektiv}\}| \\
&= \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{A \subseteq N \\ |A| = k}} \underbrace{|\{f: M \to A \text{ surjektiv}\}|}_{k!\, S_{m,k}} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \binom{n}{k} k!\, S_{m,k} \\
&= \sum_{k=1}^{m} n^{\underline{k}}\, S_{m,k} \\
&\overset{S_{m,0}=0}{=} \sum_{k=0}^{m} n^{\underline{k}}\, S_{m,k}
\end{aligned}$$

9.16 Kor.: Es gilt:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}\, x^{\underline{k}}, \quad n \ge 0, \ x \in \mathbb{C}$$

Bew.: Setze in 9.15 d) $x = n$, $m = n$. Die Polynome x^n und $\sum_{k=0}^{n} S_{n,k} x^{\underline{k}}$ sind dann für alle $x \in \mathbb{N}$ gleich, also gleich. $\square$

9.17 Bsp: Suche Möglichkeiten gibt es, m Bälle auf
n M m-Menge von unterscheidbaren / nicht unterscheidbaren Bällen
N n-Menge " " Fächern

Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Bälle auf die Fächer aufzuteilen?

M unterscheidbar	N unterscheidbar	beliebig	injektiv	surjektiv
✓	✓	n^m	$n^{\underline{m}}$	$n!\, S_{m,n}$
–	✓	$\binom{n+m-1}{m}$	$\binom{n}{m}$	$\binom{m-1}{n-1}$
		m-Multiteilmenge von N	m-Teilmenge von N	geordnete n-Partition der Zahl m
✓	–	$\sum_{k=1}^{n} S_{m,\underbrace{k}_{\#\text{benutzte Fächer}}}$	1, falls $n \geq m$; 0, sonst	$S_{m,n}$
–	–	$\sum_{k=1}^{n} P_{m,k}$	1, falls $n \geq m$; 0, sonst	$P_{m,n}$

9.18 Def. (Zyklus einer Permutation, Fixpunkt): Sei $\pi: [n] \to [n]$ eine Permutation

a) $(i, \pi(i), \dots, \pi^{k-1}(i))$ mit $\pi^k(i) = i \neq \pi^j(i)$, $j < k$ Zykel der Länge k

b) Ein Zykel der Länge $= 1$ heißt Fixpunkt.

c) $\Pi_{n,k} = \{$Permutationen von $[n]$ mit k Zykeln$\}$, $1 \leq k \leq n$ $\Pi_n = \bigcup_{k=1}^{n} \Pi_{n,k}$

9.19 Bsp (Zykel):

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5, & 1, & 3, & 6, & 2, & 4 \end{pmatrix} \quad 1 \to 5 \to 2 \quad 3 \quad 4 \to 6$$

$$= (1,5,2)(3)(4,6)$$

9.20 Prop: Jede Permutation ist eine disjunkte Vereinigung von Zykeln.

Bew.: Für Permutation $\pi: [n] \to [n]$ konstruiere Digraph

$$D = ([n], \{(i, \pi(i)) : i \in [n]\})$$

$\Rightarrow \delta^+(i) = \delta^-(i) = 1 \quad \forall i \in [n]$

$\Rightarrow D$ zerfällt in gerichtete Kreise $D_j = (i_1^j, \dots, i_{n_j}^j)$, $j = 1, \dots, k$

$\Rightarrow \pi = (i_1^1, \dots, i_{n_1}^1) \dots (i_1^k, \dots, i_{n_k}^k)$. $\square$

9.21 Bem. a) Bei der Darstellung einer Permutation als Vereinigung von Zykeln spielt die Reihenfolge der Zykel und das 1. Element jedes Zykels keine Rolle.

b) Die Zykelzerlegung einer Permutation $\pi : [n] \to [n]$ induziert eine Partition der Menge $[n]$.

9.22 Bsp.:

a) $\pi = (1,5,2)(3)(4,6) = (3)(1,5,2)(4,6) = (3)(5,2,1)(6,4)$

$[6] = \{1,5,2\} \dot\cup \{3\} \dot\cup \{4,6\}$.

b) Permutationen $\pi : [3] \to [3]$

π	1 2 3	2 1 3	1 3 2	3 2 1	2 3 1	3 1 2
Zykel	(1)(2)(3)	(1,2)(3)	(1)(2,3)	(1,3)(2)	(1,2,3)	(1,3,2)
	3 Zykel	2 Zykel			1 Zykel	

9.23 Def. (Stirlingzahl 1. Art): Die Anzahl der Permutationen von $[n]$ mit k Zykeln, $0 \le k \le n \in \mathbb{N}$, $k+n \ge 1$ heisst $s_{n,k} := \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ Stirlingzahl 1. Art, $s_{0,0} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} := 1$.

$(s_{0,k} := 0,\ k \ge 1$
$s_{n,0} := 0,\ n \ge 1)$

$s_{n,k} := 0,\ k < 0$

9.24 Def (Typ einer Permutation): Sei $\pi : [n] \to [n]$ eine Permutation.

a) $b_i(\pi) := \#$ Anzahl der Zykel der Länge i von π

b) $b(\pi) := \sum_{i=1}^{n} b_i(\pi)$

c) $t(\pi) := \prod_{i=1}^{n} i^{b_i(\pi)}$ Typ von π

9.25 Beob.: Sei $\pi : [n] \to [n]$ eine Permutation.

a) $\sum_{i=1}^{n} i\, b_i(\pi) = n$ Partition von n

b) $|\{ b(\pi) : \pi : [n] \to [n] \text{ Perm} \}| = \#$ Partitionen der Zahl n

9.26 Bsp: $n = 4$

Partition	Typ		
4	4^1	=	$1^0 2^0 3^0 4^1$
1+3	$1^1 3^1$	=	$1^1 2^0 3^1 4^0$
1+1+2	$1^2 2^1$	=	$1^2 2^1 3^0 4^0$
1+1+1+1	1^4	=	$1^4 2^0 3^0 4^0$
2+2	2^2	=	$1^0 2^2 3^0 4^0$

9.27 Satz Die Anzahl der Permutationen π von $[n]$ vom Typ $t(\pi) = \prod_{i=1}^{n} i^{b_i}$ ist $\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} b_i!\, t(\pi)}$.

Bew.: $\pi = \underbrace{() \dots ()}_{b_1} \dots \underbrace{() \dots ()}_{b_n}$

Es gibt $n!$ Möglichkeiten, die Leerstellen zu füllen, $\prod_{i=1}^{n} b_i$ Möglichkeiten, die Zykel zu permutieren, und $\prod_{i=1}^{n} i^{b_i}$, das erste Element jedes Zykels zu wählen.

9.28 Bsp.: $n=5$ $5! = 120$

Partition	Typ	$\frac{n!}{\prod_{i=1} b_i!\, i^{b_i}}$	k	$s_{n,k} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$
5	5^1	24	1	$s_{5,1} = 24$
1+4	$1^1 4^1$	30	2	
2+3	$2^1 3^1$	20	2	$s_{5,2} = 50$
1+1+3	$1^2 3^1$	20	3	
1+2+2	$1^1 2^2$	15	3	$s_{5,3} = 35$
1+1+1+2	$1^3 2^1$	10	4	$s_{5,4} = 10$
1+1+1+1+1	1^5	1	5	$s_{5,5} = 1$

9.29 Satz (Rekursion für Stirlingzahlen 1. Art): Es gilt

$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1)\, s_{n-1,k}$, $1 \le k \le n$. $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$

Bew.: Sei $\pi = \prod_{i=1}^{k} (z_i)$.

a) O.B.d.A. $(z_k) = (n) \Rightarrow \pi' = \prod_{i=1}^{k-1} (z_i) \in \Pi_{n-1,k-1}$ $s_{n-1,k-1}$ Möglichk.

b) O.B.d.A. $(z_k) = (n\, j_2^k, \dots, j_{n_k}^k) \Rightarrow \pi'' = \underbrace{\prod_{i=1}^{k-1} (z_i)\, (j_2^k, \dots, j_{n_k}^k)}_{s_{n-1,k} \text{ Möglichkeiten}} \in \Pi_{n-1,k}$

$\pi''(n)$ $n-1$ Möglichkeiten $\square$

c) $s_{1,1} = \underbrace{s_{0,0}}_{=1} + 0\, \underbrace{s_{0,1}}_{=0} = 1$, $s_{1,0} = 0$

9.30 Bsp. (Stirlingdreieck 1. Art):

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1

Insbesondere (Bew. Übung):

a) $s_{n,1} = (n-1)!$, $n \ge 1$

b) $s_{n,n-1} = \binom{n}{2}$, $n \ge 1$

c) $s_{n,n} = 1$

d) $s_{n,2} = (n-1)!\, H_{n-1}$, $n \ge 1$.

9.31 Satz: Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} s_{n,k} x^k = x(x+1)\cdots(x+n-1) = x^{\overline{n}}, \quad n \geq 0, \ x \in \mathbb{C}.$$

Bew.: $x^{\overline{n}}$ ist ein Polynom vom Grad n. Sei $a_{n,k}$, $0 \leq k \leq n$, def. als

$$x^{\overline{n}} =: \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^k.$$

a) $n = 0$: $x^{\overline{0}} = a_{0,0} x^0 = a_{0,0} = 1 = s_{0,0}$.

b) $n > 0$:
$$\begin{aligned}
x^{\overline{n}} &= (x+n-1)\, x^{\overline{n-1}} \\
&= (x+n-1) \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} x^k \\
&= x \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} x^k + (n-1) \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} x^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{n-1,k-1} x^k + \sum_{k=0}^{n-1} (n-1) a_{n-1,k} x^k \\
&= (n-1) a_{n-1,0} \cdot x^0 \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \left[a_{n-1,k-1} + (n-1) a_{n-1,k} \right] x^k \\
&\quad + a_{n-1,n-1} \, x^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \, x^k
\end{aligned}$$

Koeff.-Vergleich $\Rightarrow$
$$\begin{cases} a_{n,k} = a_{n-1,k-1} + (n-1) a_{n-1,k}, & 1 \leq k \leq n-1 \\ a_{n-1,0} = 0 & (x^{\overline{n}} \text{ hat keinen konst. Term}) \\ a_{n,n} = a_{n-1,n-1} = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \ a_{n,k} = s_{n,k}, \quad 0 \leq k \leq n$ □

9.32 Kor.: Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k} x^k = x(x-1)\cdots(x-n+1) = x^{\underline{n}}, \quad n \geq 0, \ x \in \mathbb{C}$$

Bew.: Setze in 9.28 $(-x)$ ein:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} s_{n,k} (-x)^k &= (-x)(-x+1)\cdots(-x+n-1) \\
&= (-x)\left[-(x-1)\right]\cdots\left[-(x-n+1)\right]
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} s_{n,k} (-1)^k x^k = (-1)^n x(x-1)\cdots(x-n+1) = (-1)^n x^{\underline{n}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} s_{n,k} (-1)^{k-n} x^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k} x^k = x^{\underline{n}} \quad □$$

9.33 Bsp. (Fakultäten und Stirlingzahlen 1. Art):

a) $x^{\overline{4}} = \underbrace{x(x+1)(x+2)}_{=x^{\overline{3}}}(x+3)$

0	1				
1	0	1			
2	0	1	1		
3	0	2	3	1	
4	0	6	11	6	1

$= (\underbrace{2x}_{s_{3,1}} + \underbrace{3x^2}_{s_{3,2}} + \underbrace{1\cdot x^3}_{s_{3,3}})(x+3)$

$= \underbrace{6x}_{s_{3,0}+3s_{3,1}} + \underbrace{(2+3\cdot 3)}_{s_{3,1}+3s_{3,2}}x^2 + \underbrace{(3+3\cdot 1)}_{s_{3,2}+3s_{3,3}}x^3 + \underbrace{1}_{s_{3,3}}x^4$

$= \underbrace{6}_{s_{4,1}}x + \underbrace{11}_{s_{4,2}}x^2 + \underbrace{6}_{s_{4,2}}x^3 + \underbrace{1}_{s_{4,4}}\cdot x^4$

b) $x^{\underline{4}} = \underbrace{x(x-1)(x-2)}_{=x^{\underline{3}}}(x-3)$

$= (2x - 3x^2 + 1\cdot x^3)(x-3)$

$= -6x + (2+3\cdot 3)x^2 - (3+3\cdot 1)x^3 + 1\cdot x^4$

$= -6x + 11x^2 - 6x^3 + x^4.$

9.34 Satz (Rekursion für Stirlingzahlen 2. Art): Es gilt

$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k\, S_{n-1,k}, \quad 1 \le k \le n.$

$\iff \left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k \left\{ n-1 \atop k \right\}, \quad 1 \le k \le n$

Bew.: Sei $[n] = \dot\bigcup_{i=1}^{k} N_i$ eine k-Partition.

a) O.B.d.A. $N_k = \{n\} \Rightarrow [n-1] = \dot\bigcup_{i=1}^{k-1} N_i$; $S_{n-1,k-1} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$ Mögl.

b) O.B.d.A. $N_k = \underbrace{\{n, j_2^k, \dots, j_{n_k}^k\}}_{k\text{-Möglichkeiten}} \Rightarrow [n-1] = \underbrace{\dot\bigcup_{i=1} N_i \cup \{j_2^k, \dots, j_{n_k}^k\}}_{S_{n-1,k} = \left\{ n-1 \atop k \right\} \text{ Mögl.}}$

c) $S_{1,1} = \underbrace{S_{0,0}}_{=1} + 1\, \underbrace{S_{0,1}}_{=0} = 1, \quad S_{1,0} = 0$

9.35 Bsp. (Stirlingdreieck 2. Art):

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	1	3	1			
4	0	1	7	6	1		
5	0	1	15	25	10	1	
6	0	1	31	90	65	15	1

Insbesondere (Bew. Übung):

a) $S_{n,1} = 1, \quad n \ge 1$

b) $S_{n,n-1} = \binom{n}{2}$

c) $S_{n,n} = 1$

d) $S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$

9.36 Bem.: Es gilt

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} x^{\underline{k}}$$ Stirlingzahlen 2. Art

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right] x^k = \sum_{k=0}^{n} s_{n,k} x^k$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left[{n \atop k} \right] x^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k} x^k$$

Stirlingzahlen 1. Art

$$(-x)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n s_{n,k} x^k = (-1)^n x^{\overline{n}}$$ Reziprozitätsgesetz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$ Binomialkoeff.

9.37 Def. ((Allg.) Binomialkoeffizient): Sei $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\binom{z}{k} := \frac{z(z-1)\cdot\ldots\cdot(z-k+1)}{1\cdot 2 \cdot\ldots\cdot k} = \frac{z^{\underline{k}}}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$\binom{z}{k} := 0, \quad k < 0$$

Verallg. Binomialkoeffizient

9.38 Satz (Rekursion für allg. Binomialkoeffizienten):

$$\binom{z}{k} = \binom{z-1}{k-1} + \binom{z-1}{k}, \quad z \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}$$

Bew.:

a) $n, k \in \mathbb{N},\ k \le n$: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \Leftarrow 3.2\,b)$

$n, k \in \mathbb{N},\ k > n$: $\underbrace{\binom{n}{k}}_{=0} = \underbrace{\binom{n-1}{k-1}}_{=0} + \underbrace{\binom{n-1}{k}}_{=0}$

$n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z},\ k<0$: $\underbrace{\binom{n}{k}}_{=0} = \underbrace{\binom{n-1}{k-1}}_{=0} + \underbrace{\binom{n-1}{k}}_{=0}$

$\Rightarrow \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}$

b) $$\binom{z}{k} = \underbrace{\frac{z(z-1)\cdot\ldots\cdot(z-k+1)}{k!}}_{\text{Polynom vom Grad } k} = \underbrace{\binom{z-1}{k-1} + \binom{z-1}{k}}_{\text{Polynom vom Grad } k}$$

$$= p(z) \qquad\qquad = q(z)$$

$p(z) = q(z)$ für $z = 0, 1, \ldots, k$

Fundamentalsatz der Algebra

$\Rightarrow p(z) = q(z) \ \forall z \in \mathbb{C}$. $\square$

9.39 Folg. (Negation für Binomialkoeff.):

$$\binom{-z}{k} = (-1)^k \binom{z+k-1}{k}, \quad z \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Bew.: $$\binom{-z}{k} = \frac{(-z)^{\underline{k}}}{k!} \overset{\text{Reziprozität}}{=} \frac{(-1)^k z^{\overline{k}}}{k!} = (-1)^k \binom{z+k-1}{k}. \ \square$$

9.40 Bsp. ($\binom{\cdot}{k}$ Pascalsches Dreieck):

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$r=5, n=2$

$1+4+10=\binom{6}{2}=15$

Insbesondere

a) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ Zeilensumme

b) $\sum_{r=0}^{n}\binom{r}{k} = \sum_{r=k}^{n}\binom{r}{k} \overset{\text{Blatt 3 Aufgabe 2 i)}}{=} \binom{n+1}{k+1}$ Spaltensumme

c) $\sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{k} = \binom{n+r+1}{n}$ Diagonalsumme (Haus Übung)

9.41 Satz (von Vandermonde):

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}, \quad x,y \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Bew: Seien $x,y \in \mathbb{N}_0$, X x-Menge, Y y-Menge.

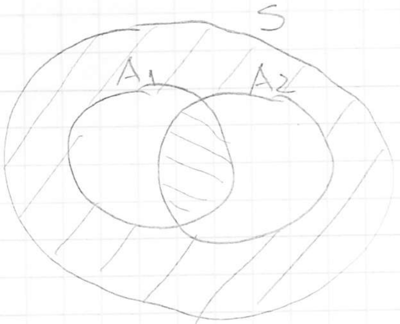
$$\binom{x+y}{n} = \left|\binom{X \dot\cup Y}{n}\right| = \left|\dot\bigcup_{k=0}^{n}\left\{\binom{X}{k} \dot\cup \binom{Y}{n-k}\right\}\right| \overset{\text{Summenregel, Produktregel}}{=} \sum_{k=0}^{n}\left|\binom{X}{k}\right|\cdot\left|\binom{Y}{n-k}\right| = \sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}.$$

$$\Rightarrow \underbrace{p(x,y)}_{\text{Polynom in } x,y \text{ vom Grad } n} = \underbrace{q(x,y)}_{\text{Polynom in } x,y \text{ vom Grad } n} \quad \text{für } x,y = 0,\dots,n$$

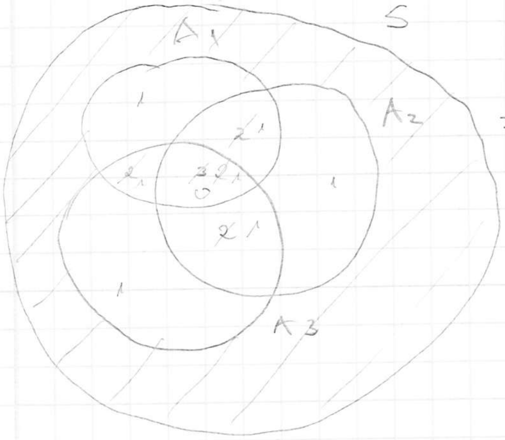
$$\Rightarrow p(x,y) = q(x,y) \quad \forall x,y \in \mathbb{C}. \quad \square$$

10. Inklusion – Exklusion

10.1 Motivation: Sei S eine n-Menge, $A_1, \dots, A_m \subseteq S$



$$|S \setminus (A_1 \cup A_2)| = |S| - (|A_1| + |A_2|) + |A_1 \cap A_2|$$



$$\begin{aligned}
&|S \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| \\
&= |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) \\
&\quad + (|A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_3|) \\
&\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|
\end{aligned}$$

10.2 Satz: Sei S eine n-Menge, $A_1, \dots, A_m \subseteq S$. Sei

$$N(I) := \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| \qquad \forall\, I \in \binom{[m]}{j},\ j = 1, \dots, m$$

$$N_j := \sum_{|I| = j} N(I) \qquad j = 1, \dots, m$$

$$N_0 := |S| = n.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left|S \setminus \bigcup_{i=1}^m A_i\right| &= |S| - \sum_{i=1}^m |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| - \dots + (-1)^m \left|\bigcap_{i=1}^m A_i\right| \\
&= |S| + \sum_{j=1}^m \sum_{I \in \binom{[m]}{j}} (-1)^j \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| \\
&= N_0 - N_1 + N_2 - \dots (-1)^m N_m \\
&= \sum_{j=0}^m (-1)^j N_j .
\end{aligned}$$

Bew.: Sei $x \in S$.

a) $x \notin \bigcup_{i=1}^m A_i \Rightarrow$ x wird auf beiden Seiten der Gleichung genau einmal gezählt.

b) Sei $\{i_1, \dots, i_k\} = \{i \in [m] : x \in A_i\}$, $k \ge 1$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} A_i \quad \forall\, I \in \binom{\{i_1, \dots, i_k\}}{j},\ j = 1, \dots, k.$$

$$0 = \left|\left(S \setminus \bigcup_{i=1}^m A_i\right) \cap \{x\}\right| = |S \cap \{x\}| + \sum_{j=1}^m \sum_{I \in \binom{[m]}{j}} (-1)^j \left|\bigcap_{i \in I} A_i \cap \{x\}\right|$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{k} \sum_{I \in \binom{\{i_1,\dots,i_k\}}{j}} (-1)^j \cdot 1$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \cdot 1^{k-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \cdot 1^{k-j}$$

$$\underset{\text{Satz 3.5}}{\overset{\text{Binomischer}}{=}} (1-1)^k$$

$$= 0 \qquad (k \geq 1). \qquad \square$$

10.3 Korollar (Prinzip der Inklusion-Exklusion): Sei S eine n-Menge und $E_1, \dots, E_m$ Eigenschaften, die Elemente aus S haben oder nicht haben. Sei $I \subseteq [m]$ und

$$n(I) := \left| \{ x \in S : x \text{ hat } E_i \ \forall i \in I \} \right| .$$

$$\overline{n} := \left| \{ x \in S : x \text{ hat nicht } E_i \ \forall i \in I \} \right| .$$

Dann gilt

$$\overline{n} := n + \sum_{j=1}^{m} (-1)^j \sum_{I \in \binom{[m]}{j}} n(I). \qquad (*)$$

Bew.: Setze $A_i = \{ x \in S : x \text{ hat } E_i \}$, $i = 1, \dots, m$.

$$\Rightarrow n(I) = \left| \{ x \in S : x \text{ hat } E_i \ \forall i \in I \} \right|$$

$$= \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

$$= N(I) \qquad \forall I \in \binom{[m]}{j}, \ j = 1, \dots, m. \ \square$$

10.4 Korollar: Falls

$$n(I) = n_j \qquad \forall I \in \binom{[m]}{j}, \ j = 1, \dots, m$$

nur von der Anzahl $|I| = j$ der E_i abhängt, vereinfacht sich $(*)$ zu

$$\overline{n} = n - \sum_{j=1}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} n_j .$$

10.5 Bsp. (Stirlingzahlen 2. Art): M m-Menge, N n-Menge.

$$S = \{ f : M \to N \}, \quad |S| = n^m$$

$$E_i \Leftrightarrow f(M) \not\ni i, \quad i \in N$$

$$A_i = \{ f : M \to N, \ f(M) \not\ni i \}, \quad i \in N.$$

$$S \setminus \bigcup_{i \in N} A_i = \{ f : M \to N \text{ surjektiv} \}$$

$$\begin{aligned}
n(I) &= \left|\{f: M \to N,\ f(M) \not\ni i,\ i \in I\}\right| \\
&= \left|\{f: M \to N \setminus I\}\right| \\
&= (n - |I|)^m \\
&= \underbrace{(n-j)^m}_{} \quad \forall\, I \in \binom{[n]}{j},\ j=1,\dots,n \\
&= n_j \quad \text{hängt nur von } |I| = j \text{ ab}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left|S \setminus \bigcup_{i \in N} A_i\right| \overset{10.4}{=} n^m + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^m$$

$$\Rightarrow n!\, S_{m,n} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^m$$

$$\Rightarrow S_{m,n} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^m, \quad m,n \in \mathbb{N}.$$

$$= S_{m-1,n-1} + n\, S_{m-1,n}$$

10.6 Def. (Derangement): Eine fixpunktfreie Permutation heißt Derangement (Umordnung).

10.7 Bsp. (Derangementzahlen): Sei $n \in \mathbb{N}$

$S = \Pi_n = \{\pi : [n] \to [n] \text{ Permutation}\}$

$E_i \Leftrightarrow \pi(i) = i, \quad i \in [n]$

$A_i = \{\pi \in \Pi_n : \pi(i) = i\}, \quad i \in [n]$

$S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{\pi : [n] \to [n] \text{ Derangements}\}$

$$\begin{aligned}
n(I) &= \left|\{\pi : [n] \to [n],\ \pi(i) = i,\ i \in I\}\right| \\
&= (n - |I|)! \\
&= (n-j)! \quad \forall\, I \in \binom{[n]}{j},\ j = 1,\dots,n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow D_n := \left|S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &\overset{10.4}{=} n! + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)! \\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)! \\
&= n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}
\end{aligned}$$

10.8 Bem. (Rekursionsformel für Derangementzahlen): Es gilt:

$D_0 := 1,\ D_1 = 0,\ D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}),\ n \geq 2.$

Bew.: Sei $n \geq 2$, $\pi \in \Pi_n$ Derangement, $\pi(1) = i \in \{2, \dots, n\}$.

a) $\pi(i) = 1$ $\quad \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ i & . & & 1 & . & \pi(n) \end{matrix}$

$\Rightarrow \left|\{\pi \in \Pi_n \text{ Derangement} : \pi(i) = 1\}\right| = D_{n-2}$

b) $\pi(i) \neq 1$ $\quad \begin{matrix} 1 & \dots & i & \dots & n \\ i & & \pi(i) & & \pi(n) \\ & & \neq & & \\ & & 1 & & \end{matrix} \xrightarrow{1 \leftrightarrow i} \begin{matrix} \cancel{i} & \dots & 1 & \dots & n \\ \cancel{1} & & \pi(i) & & \pi(n) \\ & & \neq & & \\ & & 1 & & \end{matrix}$

$$\pi' : [n] \setminus \{i\} \to [n] \setminus \{i\}, \quad \pi'(j) = \begin{cases} j, & j \neq i, 1 \\ \pi(i), & j = 1 \end{cases} \quad \text{Derangement}$$

$$\Rightarrow \left| \{ \pi \in \Pi_n \text{ Derangement} : \pi(i) \neq 1 \} \right| = D_{n-1}$$

c) $\pi(1) = i \in \{2, \dots, n\}$

$$\Rightarrow D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}).$$

10.9 Bsp (Eulerfunktion): Sei $n \in \mathbb{N}$,

$$n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}, \quad p_i \text{ prim}, k_i \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, m$$

$$S = [n]$$

$$E_i \Leftrightarrow p_i \mid x, \quad i = 1, \dots, m, \quad x \in [n]$$

$$A_i = \{ x \in [n] : p_i \mid x \}, \quad |A_i| = \frac{n}{p_i}, \quad i = 1, \dots, m$$

$$S \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i = \{ x \in [n] : \underbrace{p_i \nmid x}_{\Leftrightarrow \, ggT(p_i, x) = 1}, \ i = 1, \dots, m \}$$

$$= \varphi(n) = \{ x \in [n] : ggT(n, x) = 1 \} \quad \underline{\text{Eulerfunktion}}$$

$$n(I) = \left| \{ x \in [n] : \prod_{i \in I} p_i \mid x \} \right| = \frac{n}{\prod_{i \in I} p_i} \quad \forall I \in \binom{[m]}{j}, \ j = 1, \dots, m.$$

$$\varphi(n) = \left| S \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i \right| = n + \sum_{j=1}^{m} (-1)^j \sum_{I \in \binom{[m]}{j}} \frac{n}{\prod_{i \in I} p_i}$$

$$= n \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \sum_{I \in \binom{[m]}{j}} \frac{1}{\prod_{i \in I} p_i}$$

$$= n \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_i} \right)$$

10.10 Bsp. (Eulerfunktion): a) $12 = 2^2 \cdot 3^1$

$$\left| \{ x \in [12] : ggT(x, 12) = 1 \} \right| = \left| \{ 1, 5, 7, 11 \} \right| = 4$$

$$= \varphi(12) = 12 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 4.$$

b) $\{ x \in [12] : x \mid 12 \} = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 12 \}$

$\varphi(1) = 1, \ \varphi(2) = 1, \ \varphi(3) = 2, \ \varphi(4) = 2, \ \varphi(6) = 2, \ \varphi(12) = 4$

$$\sum_{x \mid 12} \varphi(x) = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12.$$

10.11 Satz: $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$, $n \in \mathbb{N}$.

Bew.: Es gilt

$$[n] = \dot{\bigcup_{d|n}} \{x \in [n] : ggT(x,n) = d\} \qquad n = x \cdot d$$

$$\Rightarrow \quad n = \sum_{d|n} \left|\{x \in [n] : ggT(x,n) = d\}\right|$$

$$= \sum_{d|n} \left|\{y \in \mathbb{N} : \underbrace{y \cdot d = x \in [n]}_{y \le \frac{n}{d}},\ ggT(y, \tfrac{n}{d}) = 1\}\right|$$

$$= \sum_{d|n} \left|\{y \in [\tfrac{n}{d}] : ggT(y, \tfrac{n}{d}) = 1\}\right|$$

$$= \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$= \sum_{d|n} \varphi(d). \quad \square$$

10.12 Bsp. (Variante des Ménageproblems): Auf wieviele Weisen kann man n Ehepaare in eine Reihe aufstellen, so dass niemals Eheleute hintereinander stehen?

Sei $S = \{(a_1, \dots, a_{2n}) \in [n]^{2n} : \forall i \in [n] : \exists j \ne k \ a_j = a_k = i\}$

$E_i \Leftrightarrow (a_1, \dots, a_{2n})$ enthält $a_j = a_{j+1} = i$

$A_i = \{(a_1, \dots, a_{2n}) \in S : \exists j : a_j = a_{j+1} = i\}$

$S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, \dots, a_{2n}) \in S : a_j \ne a_{j+1},\ j = 1, \dots, 2n-1\}$

Sei $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq [n]$

$$n(I) = \left|\{(a_1, \dots, a_{2n}) : \exists j_1, \dots, j_k : a_{j_l} = a_{j_l+1} = i_l,\ l = 1, \dots, k\}\right|$$

1. Paar   2. Paar   …   k. Paar

1. Lücke n_1 2. Lücke n_2 k+1. Lücke n_{k+1}

$$\sum_{i=1}^{k+1} n_i = 2n - 2k$$

$$= \underbrace{\binom{2n - \cancel{2k} + \cancel{k+1-1}}{k+1-1}}_{\text{Positionen der Paare}} \cdot \underbrace{k!}_{\text{Reihenfolgen der Paare}} \cdot \underbrace{\frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}}}_{\text{restliche Personen modulo Ehepaare}}$$

$$= \binom{2n-k}{k} \cdot k! \, \frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}} \quad (\text{auch für } k = 0)$$

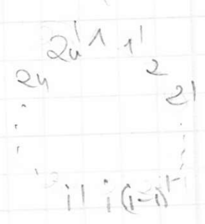
$$\left|S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{2n-j}{j} j! \, \frac{(2n-2j)!}{2^{n-j}}$$

$$\overset{k=n-j}{\underset{\Leftrightarrow j=n-k}{=}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{n-k} \binom{2n-\cancel{n}+k}{n-k} (n-k)! \, \frac{(\cancel{2n-2n}+2k)!}{2^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{(n+k)!}{\cancel{(2k)!}} \cdot \frac{\cancel{(2k)!}}{2^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{(n+k)!}{2^k}$$

<u>10.13 Bsp</u> (Ménageproblem): Wie viele Möglichkeiten gibt es, n Paare so um einen runden Tisch zu setzen, dass jede Frau neben 2 Männern sitzt, aber nicht neben ihrem eigenen?



Der Tisch hat Plätze $1, 1', 2, 2', \ldots, 2n, 2n'$

Wir setzen Frau i auf Platz i', $i' = 1', \ldots, n'$

und Mann i auf Platz $\pi(i)$, $i = 1, \ldots, n$, $\pi \in \Pi_n$.

$S = \Pi_n$

$E_1 \Leftrightarrow \pi(1) = 1$

$E_2 \Leftrightarrow \pi(1) = 2$

$E_3 \Leftrightarrow \pi(2) = 2$

$E_4 \Leftrightarrow \pi(2) = 3$

$\vdots$

$E_{2n-1} \Leftrightarrow \pi(n) = n$

$E_{2n} \Leftrightarrow \pi(n) = 1$

$\Rightarrow \nexists\, \pi \in \Pi_n : E_i \wedge E_{i \bmod n+1}$, d.h. zwei aufeinanderfolgende Bedingungen können nicht gleichzeitig zutreffen

$A_i = \{\pi \in \Pi_n : E_i\}$, $i = 1, \ldots, 2n$

$\Rightarrow |A_i \cap A_{i \bmod n+1}| = 0$, $i = 1, \ldots, 2n$

Sei $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$.

$$\Rightarrow n(I) = \begin{cases} 0, & \text{falls } i_j = i_{j \bmod n+1} \text{ für ein } j = 1, \ldots, k \\ (n-k)!, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\left| \left\{ I \in \binom{[2n]}{k} : n(I) > 0 \right\} \right|$$

$$= \left| \left\{ I \in \binom{[2n]}{k} : n(I) > 0, \ 1 \in I \right\} \right| \,\dot\cup\, \left| \left\{ I \in \binom{[2n]}{k} : n(I) > 0 : 1 \notin I \right\} \right|$$

$$\underset{\geq 1}{n_1} + n_2 + \ldots + n_k = 2n-k \qquad \underset{\geq 0}{n_1} + n_2 \ \ldots \ n_k \ n_{k+1} = 2n-2k$$

$$1 \ldots 1 \ldots 1 \ldots 1 \qquad 01 \ 01 \ldots 01$$

$$= \binom{2n-k-1}{k-1} + \binom{2n-2k+k+1-1}{k+1-1}$$

$$= \binom{2n-k-1}{k-1} + \binom{2n-k}{k}$$

$$= \frac{(2n-k-1)!\,(2n-k)}{(k-1)!\,(2n-2k)!\,(2n-k)} + \frac{(2n-k)!}{k!\,(2n-2k)!}$$

$$= \left(\frac{k}{2n-k} + 1\right)\binom{2n-k}{k}$$

$$= \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$$

$$\Rightarrow \left|S \setminus \bigcup_{i=1}^{2n} A_i\right| = n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$

Die Frauen können auf $n!$ Weisen permutiert werden und entweder auf den geraden oder den ungeraden Plätzen sitzen. Insgesamt gibt es also

$$2n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$

Möglichkeiten.

11. Inversion

11.1 Def. (Basisfolge): Eine Folge von Polynomen über $\mathbb{K}$ $(=\mathbb{R}, \mathbb{C})$ $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit grad $p_n = n$ heisst Basisfolge.

11.2 Satz (Basisdarstellung): Sei q ein Polynom über $\mathbb{K}$ vom grad $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ex. eindeutig bestimmte Koeffizienten $c_k \in \mathbb{K}$, $0 \le k \le n$ mit

$$q = \sum_{k=0}^{n} c_k p_k.$$

Bew: Lin. Algebra.

11.3 Kor.: Seien (p_n), (q_n) zwei Basisfolgen von Polynomen über $\mathbb{K}$. Dann ex. eindeutig bestimmte Zusammenhangskoeffizienten $a_{n,k}, b_{n,k} \in \mathbb{K}$, $0 \le k \le n$, mit

$$q_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} p_k \quad \text{und} \quad p_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} q_k.$$

Setze $a_{n,k} := b_{n,k} := 0$ für $k > n$ und def Matrizen

$$A_n := (a_{ij})_{0\le i,j\le n}, \quad B_n := (b_{ij})_{0 \le i,j \le n}.$$

Dann gilt:

$$\sum_{j=0}^{n} (B_{i\cdot} A_{\cdot j}) p_j(x) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} b_{i,k} a_{k,j} p_j(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} b_{i,k} \sum_{j=0}^{n} a_{k,j} p_j(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{i,k} q_k(x)$$

$$= p_i(x)$$

$$\Rightarrow \quad B_{i\cdot} A_{\cdot j} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad A = B^{-1}.$$

11.4 Satz: Seien (p_n), (q_n) zwei Basisfolgen über $\mathbb{K}$ mit Zusammenhangskoeffizienten $a_{n,k}$, $b_{n,k} \in \mathbb{K}$, $0 \le k \le n$. Dann gilt für zwei Folgen (u_n), (v_n) aus $\mathbb{K}$

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} u_k \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} v_k \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Bew.: Sei $v = (v_0, \dots, v_n)$, $u = (u_0, \dots, u_n)$.

$\Rightarrow \quad v = A_n u \Leftrightarrow u = A_n^{-1} v = B_n v.$

11.5 Bsp (Binomialinversion):

$$\underbrace{x^n}_{=q_n} = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{=a_{n,k}} \underbrace{(x-1)^k}_{=p_k}, \quad \underbrace{(x-1)^n}_{=p_n} = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}(-1)^{n-k}}_{=b_{n,k}} \underbrace{x^k}_{q_k}$$

$$\Rightarrow \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \Leftrightarrow u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} v_k \ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Sei $d(n,k) := \left| \{ \pi \in \Pi_n : \pi \text{ hat } k \text{ Fixpunkt} \} \right|$

$d(n,0) = D_n$. Derangementzahl

$d(n,k) = \binom{n}{k} D_{n-k} \quad 0 \le k \le n$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{n!}_{=v_n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{D_k}_{=u_k}$$

Binomialinversion $\Rightarrow$

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{=\frac{n!}{(n-k)!\,\cancel{k!}}} (-1)^{n-k} \cancel{k!}$$

$$= n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!}$$

$$= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

11.6 Bsp (Stirlinginversion):

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} x^{\underline{k}}, \quad x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k} x^k$$

$$\Rightarrow \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} u_k \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \Leftrightarrow u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k} v_k \ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Insbesondere

$$\sum_{k=0}^{n} S_{i,k} (-1)^{k-j} s_{k,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

denn die Matrizen der Zusammenhangskoeffizienten sind invers zueinander. z.B. ist für $n=6$, $i=4$, $j=3$

$$\sum_{k=0}^{6} S_{4,k} (-1)^{k-3} s_{k,3} =$$

$$= \cancel{-0 \cdot 0} + \cancel{1 \cdot 0} - \cancel{7 \cdot 0} + 6 \cdot 1 - 1 \cdot 6 + 0 \cdot 35 - 0 \cdot 225 = 0$$