12. Erzeugende Funktionen

12.1 Def. (Erzeugende Funktion): Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und

$$(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = (a_0, a_1, a_2, \dots) \in \mathbb{K}^*$$

eine Folge von Zahlen aus $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Dann heißt die formale Potenzreihe

$$a(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{(gewöhnliche) erzeugende Funktion}$$

$$\hat{a}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k \quad \text{exponentielle erzeugende Funktion}$$

der Folge (a_k)

und $[z^n]\, a(z) := a_n$ der Koeff. von z^n in $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

12.2 Bem.: Erzeugende Funktionen erlauben eine dreifache Sichtweise auf eine Folge (a_k):

$$\underbrace{(a_0, a_1, \dots)}_{\text{explizite Darstellung}} \;\leftrightarrow\; \underbrace{\underbrace{\text{formale Potenzreihe}}_{\text{Algebra}} \;\leftrightarrow\; \underbrace{\text{konvergente Potenzreihe}}_{\text{Analysis}}}_{\text{eine geschlossene, kompakte Form}}$$

12.3 Bsp. (erzeugende Funktion):

a) $(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{(n+1)\text{-mal}}, 0, 0, \dots)$: $\sum_{k=0}^{n} z^k = a(z)$

$$\Rightarrow z\,a(z) - a(z) = (z-1)a(z) = z^{n+1} - 1$$

$$\Rightarrow a(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1} \quad \forall z \neq 1$$

b) $(1, 1, \dots)$: $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad \forall |z| < 1$

c) $(1, -1, 1, -1, \dots)$: $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k = \frac{1}{1+z} \quad \forall |z| < 1$

d) $(1, 0, 1, 0, \dots)$: $\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} = \frac{1}{1-z^2}$

e) $(0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots)$: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k} = \int_0^z \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \, dx$

$$= \int_0^z \frac{1}{1+x}\, dx$$

$$= \log(1+z) \quad \forall |z| < 1$$

f) $(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}, 0, \dots)$: $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} z^k = (1+z)^n \quad \forall z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0$

12.4 Satz (Ring der formalen Potenzreihen): Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

a) Die Menge

$$\mathbb{K}[[z]] = \Big\{ \overbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k}^{a(z) =},\ (a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{K}^* \Big\}$$

der formalen Potenzreihen mit Koeff. aus $\mathbb{K}$ bildet mit den Operationen

$$\lambda a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k z^k, \quad \lambda \in \mathbb{K}$$ Skalarmultiplikation

$$a(z) + b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) z^k$$ Addition

einen Vektorraum über $\mathbb{K}$ und mit dem Produkt

$$a(z) \cdot b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} z^k$$ Faltung oder

einen Ring mit Einselement 1 $(= 1 \cdot z^0)$. Konvolution

$$a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ invertierbar} \iff a_0 \neq 0.$$

b) $\mathbb{K}[[z]] \supseteq \mathbb{K}[z] := \left\{ a(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right\}$ Ring der Polynome mit Koeff. aus $\mathbb{K}$

c) $\mathbb{K}[[z]] \supseteq \left\{ a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k : \text{Konvergenzradius von } a(z) \text{ ist } > 0 \right\}$

Ring der konvergenten Potenzreihen mit Koeff. aus $\mathbb{K}$.

Bew.: a) $(\mathbb{K}[[z]], +)$ ist eine Gruppe mit verträglicher Skalarmultiplikation, $(\mathbb{K}[[z]], \cdot)$ ist assoziativ und $a(z) \cdot 1(z) = a(z)$.

Für $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_0 \neq 0$ def.

$$b_0 \cdot a_0 = 1 \implies b_0 := a_0^{-1}$$

$$\sum_{j=0}^{k} b_j a_{k-j} = b_k a_0 + \sum_{j=0}^{k-1} b_j a_{k-j} = 0 \implies b_k := -\frac{\sum_{j=0}^{k-1} b_j a_{k-j}}{a_0}, \quad k \geq 1$$

$$\implies a(z) b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{j=0}^{k} b_j a_{k-j}}_{= \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k \geq 1 \end{cases}} z^k = 1.$$

b), c): Skalarmultiplikation, $+$ und $\cdot$ sind abgeschlossen bzgl. der jeweiligen Mengen, die auch 1 enthalten. □

12.5 Bsp.:

a) $\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k \right) (1 - z) = 1 \implies \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k \right)^{-1} = \frac{1}{1-z}$ (in $\mathbb{K}[[z]]$)

b) $\frac{a(z)}{1-z} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j \cdot 1 \right) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j \right) z^k$

12.6 Satz: $(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k \quad \forall |z| < 1, \ \alpha \in \mathbb{R}$

Bew: Betrachte die Taylorentwicklung um 0 von:

$$(1+z)^\alpha = f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\underline{k}}}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k.$$

Sie konvergiert wegen $\left| \frac{\alpha^{\underline{k}}}{k!} \cdot \frac{(k+1)!}{\alpha^{\underline{k+1}}} \right| = \left| \frac{k+1}{\alpha - k} \right| = \left| \frac{1 + \frac{1}{k}}{\frac{\alpha}{k} - 1} \right| \to 1 \quad \forall |z| < 1.$ □

12.7 Kor.: $(x+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} y^k x^{\alpha - k} \quad \forall\, 0 \neq |x| < |y|, \ \alpha \in \mathbb{R}.$

12.8 Def. (Formale Ableitung einer formalen Potenzreihe):

Für eine formale Potenzreihe $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ heißt

$$Da(z) := a'(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} z^k \quad \text{formale Ableitung von } a(z)$$

und

$$D : \mathbb{K}[[z]] \to \mathbb{K}[[z]],\ a(z) \mapsto Da(z) \quad \text{Ableitungsoperator}$$

12.9 Prop (Ableitungsregeln): Der Ableitungsoperator D erfüllt folgende Rechenregeln:

a) $(a(z) + b(z))' = a'(z) + b'(z)$ } Linearität

b) $(\lambda a(z))' = \lambda a'(z) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

c) $(a(z)\, b(z))' = a'(z)\, b(z) + a(z)\, b'(z)$, Produktregel

Bew.: Nachrechnen. □

12.10 Bsp.

a) $$a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k z^k = z \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} \overset{\text{Indextransf.}}{=} z \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k = z D\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)$$
$$= z D\left(\frac{1}{1-z}\right) = z \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \frac{z}{(1-z)^2}$$

b) Derangementzahlen D_k, $k \in \mathbb{N}_0$, mit Rekursionsformel

$$D_k = (k-1)(D_{k-1} + D_{k-2}),\ k \geq 2,\ D_1 = 0,\ D_0 = 1.$$

$$\Leftrightarrow D_{k+1} = k(D_k + D_{k-1}),\ k \geq 1,\ D_1 = 0,\ D_0 = 1$$

Betrachte exp. erzeugende Funktion von $(D_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$

$$\hat{D}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{k!} z^k$$

$$\hat{D}'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{(k-1)!} z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_{k+1}}{k!} z^k \overset{D_1=0}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{k+1}}{k!} z^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(D_k + D_{k-1})}{k!} z^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{(k-1)!} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{k-1}}{(k-1)!} z^k$$

$$= z \hat{D}'(z) + z D(z)$$

$$\Rightarrow \hat{D}'(z) = \frac{z}{1-z} \hat{D}(z) = \frac{z-1+1}{1-z} \hat{D}(z) = \left(\frac{1}{1-z} - 1\right) \hat{D}(z)$$

$$\overset{\text{DGL}}{\Rightarrow} \hat{D}(z) = C \cdot e^{\int \frac{1}{1-z} - 1\, dz} = C \cdot e^{-\ln(1-z) - z} = \frac{C e^{-z}}{1-z}$$

$$\overset{z=0}{\Rightarrow} \hat{D}(0) = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow \hat{D}(z) = \frac{e^{-z}}{1-z} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} \right) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{k!} z^k$$

$$\Rightarrow D_k = k! \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad \text{wie früher.}$$

c) Wir haben 3 1€-Münzen, 3 2€-Münzen und 2 5€-Scheine.

Auf wie viele Weisen können wir 11 € zahlen? Antwort:

$$\left| \{ (x_1, x_2, x_3) \in \{0,1,2,3\} \times \{0,2,4,6\} \times \{0,5,10\} : x_1 + x_2 + x_3 = 11 \} \right|$$

$$= [x^{11}] \, (1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^5+x^{10})$$

$$\begin{aligned} = [x^{11}] \, (1 + x + x^2 + x^3 \\ + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \\ + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 \\ + x^6 + x^7 + x^8 + x^9)(1 + x^5 + x^{10}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = [x^{11}] \, (1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 2x^7 + x^8 + x^9 \\ x^5 + x^6 + 2x^7 + 2x^8 + 2x^9 + 2x^{10} + 2x^{11} + 2x^{12} + x^{13} + x^{14} \\ x^{10} + x^{11} + 2x^{12} + 2x^{13} + 2x^{14} \\ + 2x^{15} + 2x^{16} + 2x^{17} + x^{18} + x^{19}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = 3 &= 1 + 0 + 2 \\ &= 0 + 3 + 1 \\ &= 2 + 2 + 1 . \end{aligned}$$

<u>11.11 Satz (Abzählen von k-Multimengen mit gegebenen Vielfachheiten):</u>

Sei $N = \{i_1, \dots, i_n\}$ eine n-Menge, $N_j \subseteq \mathbb{N}_0$, $j = 1, \dots, n$, und

$$a_k = \left| \left\{ M \in \left(\!\!\binom{N}{k}\!\!\right) : |M \cap \{i_j\}| \in N_j, \ j = 1, \dots, n \right\} \right|, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

d.h. a_k ist die Anzahl der k-Multiteilmengen einer n-Menge, bei denen die Vielfachheit des j-ten Elementes aus einer gegebenen Menge N_j stammt, $j = 1, \dots, n$. Dann ist die erzeugende Funktion der Folge (a_k)

$$a(z) = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j \in N_i} x^j \right).$$

<u>Bew.:</u> $a_k = \left| \left\{ (i_1, \dots, i_n) \in \bigtimes_{j=1}^{n} N_j : \sum_{j=1}^{n} i_j = k \right\} \right|$.

Dann ist

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j \in N_i} x^j \right) = \left(\sum_{j \in N_1} x^j \right) \cdots \left(\sum_{j \in N_n} x^j \right)$$

$$= \sum_{(i_1,\dots,i_n) \in \times_{j=1}^n \mathbb{N}_j : \sum_{j=1}^n i_j = k,\ k=0,1,\dots} x^{i_1+\dots+i_n}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left| \{ (i_1,\dots,i_n) \in \times_{j=1}^n \mathbb{N}_j : \sum_{j=1}^n i_j = k \} \right|}_{=a_k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

12.12 Kor. Die erzeugende Funktion für die Anzahl a_k der k-Multiteilungen einer n-Menge ist

$$a(z) = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j \in \mathbb{N}_0} x^j \right) = \left(\sum_{j \in \mathbb{N}_0} x^j \right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{1-z} \right)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\binom{n+k-1}{k}}_{=\#\ k\text{-Multiteilungen einer } n\text{-Menge}} z^k$$

Bew.:

$$\left(\frac{1}{1-z} \right)^n = (1+(-z))^{-n} \overset{\text{Allg. Binom. Satz Kor. 12.7}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-z)^k$$

$$\overset{\text{Neg. für Binom. Koeff. Kob 9.39}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} (-z)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k. \qquad \square$$

12.13 Bsp. (**k-Multiteilungen mit gegeb. Vielfachheiten**):

Wieviele Körbe mit k Früchten gibt es, bei denen die Anzahl der Äpfel gerade, die Anzahl der Bananen ein Vielfaches von 5, die Zahl der Orangen höchstens 4 und die Zahl der Birnen 0 oder 1 ist?

Die erzeugende Funktion ist

$$\underbrace{(1+z^2+z^4+\dots)}_{\text{Äpfel}} \underbrace{(1+z^5+z^{10}+\dots)}_{\text{Bananen}} \underbrace{(1+z+\dots+z^4)}_{\text{Orangen}} \underbrace{(1+z)}_{\text{Birnen}}$$

$$= \cancel{\frac{1}{1-z^2}} \cdot \cancel{\frac{1}{1-z^5}} \cdot \underbrace{\cancel{\frac{z^5-1}{z-1}}}_{\text{Bsp. 12.3 a)}} \cdot \cancel{\frac{z^2-1}{z-1}}$$

$$= z \sum_{k=0}^{\infty} f_{k-1} z^{k-1} + z^2 \sum_{k=0}^{\infty} f_{k-2} z^{k-2} + z$$

$$= z\, f(z) + z^2 f(z) + z$$

$$\Leftrightarrow f(z) - z f(z) - z^2 f(z) = (1 - z - z^2)\, f(z) = z$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

3. Entwickle die rechte Seite in eine Potenzreihe durch Partialbruchzerlegung

a) Zerlegung des Nenners in Linear- und quadratische Faktoren

$$(1 - z - z^2) = 1 - 2 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{2} z + \tfrac{1}{4} z^2 - \tfrac{5}{4} z^2$$

$$= \left(1 - \tfrac{1}{2} z\right)^2 - \tfrac{5}{4} z^2$$

$$= \Big(1 - \underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{=:\, \varphi_1} z\Big)\Big(1 - \underbrace{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{=:\, \varphi_2} z\Big)$$

φ_1 heißt <u>Verhältnis des goldenen Schnittes.</u>

$$= (1 - \varphi_1 z)(1 - \varphi_2 z)$$

b) Zerlegung der rationalen Funktion

$$\frac{z}{(1-\varphi_1 z)(1-\varphi_2 z)} = \frac{A}{1-\varphi_1 z} + \frac{B}{1-\varphi_2 z}$$

$$= \frac{A - A\varphi_2 z + B - B\varphi_1 z}{(1-\varphi_1 z)(1-\varphi_2 z)}$$

$$= \frac{(A+B) + (-A\varphi_2 - B\varphi_1) z}{(1-\varphi_1 z)(1-\varphi_2 z)}$$

$$\Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$-A\varphi_2 - B\varphi_1 = B(\underbrace{\varphi_2}_{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}} - \underbrace{\varphi_1}_{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}) = -B \cdot \sqrt{5} = 1 \to B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow A = +\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1-\varphi_1 z} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1 - \varphi_2 z}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_1^k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_2^k z^k \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi_1^k - \varphi_2^2\right) z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \right]}_{= f_k} z^k$$

$$= \left(\frac{1}{1-z}\right)^2 = \left(1+(-z)\right)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} (-z)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2+k-1}{k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{k} z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(k+1)}_{=a_k} z^k$$

$\Rightarrow$ $a_k = k+1$, d.h. es existieren $k+1$ Körbe.

12.14 Bsp. (Fibonaccizahlen, Leonardo von Pisa alias Filius Bonacci [1202]): Wenn ein Kaninchenweibchen von Vollendung des 2. Lebensmonats an monatlich ein neues Kaninchenpaar zur Welt bringt und zu Beginn ein neugeborenes Paar vorhanden ist, wie viele Paare gibt es nach n Monaten?

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Beginnen

Rekursion $f_n := \underbrace{f_{n-1}}_{\#\text{Paare}} + \underbrace{f_{n-2}}_{\#\text{Paare, die jetzt Nachwuchs bekommen}}$, $n \geq 2$, $f_1 := 1$, $f_0 = 0$

Frage: Formel für f_n?

1. Rekursion in einer geschlossenen Formel schreiben

Setze $f_n := 0$, $n \leq 0$

$\Rightarrow$ $f_0 = f_{-1} + f_{-2} = 0 + 0 = 0$

$f_1 = f_0 + f_{-1} + [n=1] = 0 + 0 + [n=1] = 1$

$\Rightarrow$ $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + [n=1]$, $n \in \mathbb{N}_0$.

2. Ansatz mit erzeugender Funktion

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$$

$$\overset{\text{Rek.}}{\underset{\text{formel}}{=}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(f_{k-1} + f_{k-2} + [k=1]\right) z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f_{k-1} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} f_{k-2} z^k + z$$

$$\Rightarrow \quad f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right], \quad k \in \mathbb{N}_0$$

R.15 Bsp. (Wege in der xy-Ebene): Starte in der xy-Ebene bei $(0,0)$, führe eine Folge folgender Schritte aus:

$r: (x,y) \mapsto (x+1,y)$

$l: (x,y) \mapsto (x-1,y)$

$o: (x,y) \mapsto (x,y+1)$

wobei die Schrittfolgen r,l und l,r verboten sind.

Wie viele Wege mit solchen Schrittfolgen der Länge n gibt es?

Sei a_k die Anzahl der Wege der Länge k.

1. Rekursionsformel

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 3$$

$$a_k = \underbrace{a_{k-1}}_{+o} + \underbrace{a_{k-1}}_{\substack{l: +r \\ r: +l \\ o: +l}} + \underbrace{a_{k-2}}_{+or} = 2a_{k-1} + a_{k-2}, \quad k \geq 2$$

$$a_k := 0, \quad k < 0$$

$$a_1 = 2a_0 + a_{-1} + [k=1] = 2 \cdot 1 + 0 + [k=1]$$

$$a_0 = 2a_{-1} + a_{-2} + [k=0] =$$

$$\Rightarrow \quad a_k = 2a_{k-1} + a_{k-2} + [k=1] + [k=0], \quad k \geq 0$$

2. Erzeugende Funktion

$$a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(2a_{k-1} + a_{k-2} + [k=1] + [k=0]\right) z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 2a_{k-1} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-2} z^k + z + 1$$

$$= 2z\,a(z) + z^2 a(z) + z + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - 2z - z^2)\,a(z) = 1 + z$$

$$\Rightarrow \quad a(z) = \frac{1+z}{1-2z-z^2}$$

3. Partialbruchzerlegung

$$1-2z-z^2 = 1-2\cdot 1\cdot z + z^2 - 2z^2$$
$$= (1-z)^2 - (\sqrt{2}z)^2$$
$$= \left(1-(1+\sqrt{2})z\right)\left(1-(1-\sqrt{2})z\right)$$

$$\frac{1+z}{1-2z-z^2} = \frac{A}{1-\underbrace{(1+\sqrt{2})}_{=\alpha}z} + \frac{B}{1-\underbrace{(1-\sqrt{2})}_{=\beta}z}$$
$$= \frac{A}{1-\alpha z} + \frac{B}{1-\beta z}$$
$$= \left[A(1-\beta z) + B(1-\alpha z)\right] / HN$$
$$= (A - A\beta z + B - B\alpha z) / HN$$
$$= \left[(A+B) - (A\beta + B\alpha)z\right] / HN$$

$$\Rightarrow A + B = 1$$
$$A\beta + B\alpha = -1 \Rightarrow 0\cdot\beta + B\underbrace{(\alpha-\beta)}_{2\sqrt{2}} = \underbrace{-(1+\beta)}_{2-\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow B = -\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$
$$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\beta$$
$$\Rightarrow A = 1 - B = 1 - \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{2-1+\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\alpha$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1+z}{1-2z-z^2} = \frac{\frac{1}{2}\alpha}{1-\alpha z} + \frac{\frac{1}{2}\beta}{1-\beta z}$$
$$= \frac{\alpha}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k z^k + \frac{\beta}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k z^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}}{2} z^k$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}}{2} = \frac{(1+\sqrt{2})^{k+1} + (1-\sqrt{2})^{k+1}}{2}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

N.16 Bsp (Catalanzahlen): Wie viele Möglichkeiten $\tilde{C}_n$ gibt es ein Produkt aus n Faktoren ($= n-1$ Multiplikationen) so zu klammern, dass immer nur 2 Faktoren miteinander multipliziert werden müssen, $n \geq 1$?

$n = 0$ $\qquad$ $\tilde{C}_0 := 0$

$n = 1$ $\quad x_1$ $\qquad$ $\tilde{C}_1 = 1$

$n = 2$ $\quad x_1 x_2$ $\qquad$ $\tilde{C}_2 = 1$

$n = 3$ $\quad (x_1 x_2) x_3, \; x_1 (x_2 x_3)$ $\qquad$ $\tilde{C}_3 = 2$

$n = 4$ $\quad \underbrace{((x_1 x_2) x_3) x_4, \; (x_1 (x_2 x_3)) x_4}_{= C_3 \cdot C_1 = 2 \cdot 1}, \; \underbrace{(x_1 x_2)(x_3 x_4)}_{= C_2 C_2 \; + 1 \cdot 1}, \; \underbrace{x_1 ((x_2 x_3) x_4), \; x_1 (x_2 (x_3 x_4))}_{= C_1 \cdot C_3 \; + 1 \cdot 2} = \tilde{C}_4 = 5$

n	1	2	3	4	5	…	n
$\tilde{C}_n$	1	1	2	5	14		$\sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}$,

denn die erste Multiplikation betrifft ein Produkt aus k und $n-k$ Faktoren.

1. Rekursion

$$\tilde{C}_n = \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{C}_k \tilde{C}_{n-k}$$

$$\tilde{C}_2 = \tilde{C}_1 \tilde{C}_1 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\tilde{C}_1 = 0 + 1 = 0 + [n=1]$$

$$\tilde{C}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{C}_n = \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{C}_k \tilde{C}_{n-k} + [n=1] = \sum_{k=0}^{n} \tilde{C}_k \tilde{C}_{n-k} + [n=1], \; n \geq 0.$$

2. Erzeugende Funktion

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{C}_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \tilde{C}_j \tilde{C}_{k-j} + [k=1] \right) z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \tilde{C}_j \tilde{C}_{k-j} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} [k=1] z^k$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{C}_k z^k \right)^2 + z$$

$$= f(z)^2 + z$$

$$\Rightarrow f(z)^2 - f(z) + z = 0$$

$$\Leftrightarrow f(z) - 2\cdot\tfrac{1}{2} f(z) + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} + z = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(f(z) - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{4} - z\right) = \left[f(z) - \left(\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} - z}\right)\right]\left[f(z) - \left(\tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{4} - z}\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow f(z) = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} - z}$$

$$f(0) = C_0 = 0 = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow f(z) = \tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{4} - z} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - 4z}$$

$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(1 - 4z)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \cancel{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\sum_{k=\cancel{0}1}^{\infty} \binom{1/2}{k}(-4)^k z^k$$

$\frac{1}{2} - k + 1$
$= 1 - 2k + 3$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}\right)\left(\cancel{-}\tfrac{3}{2}\right)\cdots\frac{\overbrace{1-2(k-1)}^{2k-3}}{2}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}\,\cancel{(-1)^k}\cdot\frac{2^k}{\cancel{4^k}} \quad (k \geq 1)$$

$$= \frac{(-1)\,1\cdot 3\cdots(2k-3)}{k!}\cdot 2^k\cdot\frac{1\cdot 2\cdots(k-1)}{(k-1)!}$$

$$= \frac{(-2)(2k-2)!}{k!\,(k-1)!} = \frac{-2}{k}\,\frac{(2k-2)!}{(k-1)!\,(k-1)!} \quad (k \geq 1)$$

$$= -\frac{2}{k}\binom{2k-2}{k-1}$$

$$= +\cancel{\tfrac{1}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\cancel{-\tfrac{2}{k}}\right)\binom{2k-2}{k-1} z^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1} z^k$$

$$\Rightarrow \tilde{C}_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}, \quad n \geq 1, \quad C_0 = 0.$$

$C_n := \tilde{C}_{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ = n-te Catalanzahl
= # Klammerungen eines Produkts mit n Multiplikationen ($= n+1$ Faktoren)

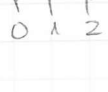
12.17 Bsp (Dyckpfade in der xy-Ebene): Starte in der xy-Ebene in $(0,0)$ und führe eine Folge folgender Schritte aus:

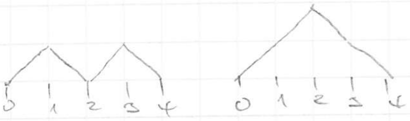
u(p): $(x,y) \mapsto (x+1, y+1)$ ↗

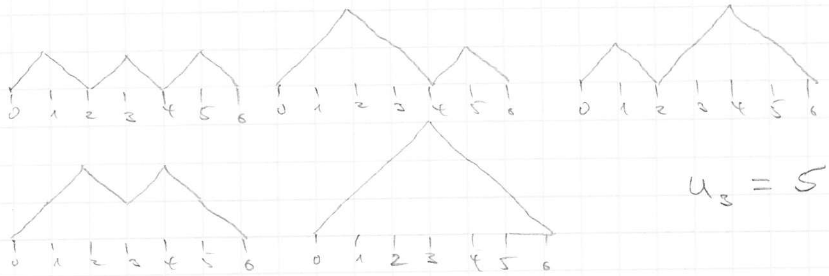
d(own): $(x,y) \mapsto (x+1, y-1)$ ↘

Gesucht ist die Anzahl u_n der Pfade von $(0,0)$ nach $(2n,0)$, bei denen die x-Achse nicht unterschritten wird.

$n=0$: · $\quad u_0 = 1$

$n=1$:  $\quad u_1 = 1$

$n=2$:  $u_2 = 2$

$n=3$:  $u_3 = 5$

n	0	1	2	3	...
u_n	1	1	2	5	

a) Beob: Jeder $\binom{0}{0}\binom{2n}{0}$-Weg, der die x-Achse nicht überschreitet, ist von der Form

$$\underbrace{\binom{0}{0}\binom{1}{1}}_{up} \dots \underbrace{\binom{2n-1}{1}\binom{2n}{0}}_{down}$$

b) Wie viele $\binom{i}{j}\binom{n}{m}$-Wege (die auch die x-Achse überschreiten dürfen) gibt es?

$\#$ Schritte $= n - i =: k$

$|\#up - \#down| = |m-j|$ Höhendifferenz

$\min \#up, \#down = \frac{k - |m-j|}{2} = l$ restliche Schritte abwechselnd

$\Rightarrow \# \binom{i}{j}\binom{n}{m}$-Pfade $= \binom{k}{l} = \binom{n-i}{\frac{n-i-|m-j|}{2}}$.

c) $= \# \binom{0}{0}\binom{2n}{0}$-Pfade, die die x-Achse nicht überschreiten

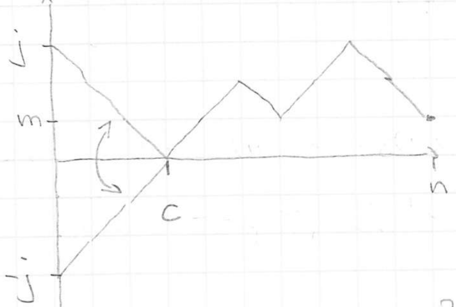
$= \# \binom{0}{1}\binom{2n}{1}$-Pfade, " nicht berühren

d) André Spiegelungsprinzip:

$x = \binom{i}{j}$, $j \geq 1$

$x' = \binom{i}{-j}$

$y = \binom{n}{m}$, $n \geq 1$



Sei $P = \{ xy\text{-Pfade, die die x-Achse berühren} \}$

Spiegle $p \in P$ am 1. Berührpunkt mit der x-Achse

$\Rightarrow \exists$ Bijektion: $P \to \{x'y\text{-Pfade}\}$

$$\Rightarrow |P| = \binom{n-i}{\frac{n-i-(m+j)}{2}}$$

e) # $\binom{0}{0}\binom{2n}{0}$-Pfade, die die x-Achse nicht unterschreiten

$= \#\ \binom{0}{1}\binom{2n}{1}$-Pfade, die die x-Achse nicht berühren

$= \#\ \binom{0}{1}\binom{2n}{1}$-Pfade

$- \#\ \binom{0}{1}\binom{2n}{1}$-Pfade, die die x-Achse berühren

$$= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{\frac{2n-2}{2}} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!\,(n-1)!} = \binom{2n}{n}\left[1 - \frac{n}{(n+1)}\right]$$

$$= \binom{2n}{n}\frac{n+1-n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = a_n = C_n.$$

<u>k.18 Bsp (Stirlingzahlen 2. Art)</u> Bestimme die exp. erzeugende Funktion $f_k(z)$ von $S_{n,k}$, $k \geq 1$ fest.

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{n,k}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=k}^{\infty} S_{n,k}\frac{z^n}{n!}$$

$$f_k'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{n,k}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \underbrace{S_{0,k}}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{n,k}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(S_{n-1,k-1} + k\,S_{n-1,k}\right)\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} S_{n-1,k-1}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + k\sum_{n=1}^{\infty} S_{n-1,k}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= f_{k-1}(z) + k\,f_k(z)$$

Ansatz: $f_k(z) := \frac{1}{k!}(e^z-1)^k$, $k \geq 0$

$$\Rightarrow f_k'(z) = \frac{k}{k!}(e^z-1)^{k-1}\cdot e^z = \frac{(e^z-1)^{k-1}\cdot e^z}{(k-1)!}, \quad k \geq 1.$$

und $$f_{k-1}(z) + k\,f_k(z) = \frac{1}{(k-1)!}(e^z-1)^{k-1} + \frac{k}{\cancel{k!}\ (k-1)!}(e^z-1)^k$$

$$= \frac{(e^z-1)^{k-1}e^z}{(k-1)!}$$

$$\Rightarrow f_k(z) = \frac{(e^z-1)^{k-1}e^z}{(k-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} S_{n,k}\frac{z^k}{k!}.$$

13. Lineare Rekursion

13.1 Bsp. (Lineare homogene Rekursionsgleichung):

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad (a_0, a_1) = (1,1) / (1,2)$$

$$\Leftrightarrow a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2, \quad (a_0, a_1) = (1,1) / (1,2)$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$ Charakteristisches Polynom

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1$$

Setze

$$a_n = c_1 2^n + c_2 1^n = c_1 2^n + c_2$$

$$\Rightarrow a_0 = c_1 + c_2 = 1/1$$

$$a_1 = 2c_1 + c_2 = 1/2 \Rightarrow c_1 = 0/1, \quad c_2 = 1/0$$

$$\Rightarrow a_n = 1 / 2^n$$

13.2 Def. (Lineare Rekursionsgleichung): Sei $1 \leq r \leq n$ und $c_0, \ldots, c_r \in \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Dann heißt

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_r a_{n-r} + c_0 \qquad (R)$$

lineare Rekursion(sgleichung) r-ten Grades mit konst. Koeffizienten.

a) (R) homogen $:\Leftrightarrow c_0 = 0$.

b) (R) inhomogen $:\Leftrightarrow c_0 \neq 0$.

c) Ist (R) inhomogen, so erhält man durch Nullsetzen von c_0 die zu (R) gehörige homogene lin. Rekursion

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_r a_{n-r} \qquad (R_0).$$

d) $\chi(z) = z^r - c_1 z^{r-1} - \ldots - c_r z^0$ charakteristisches Polynom von (R_0)

e) $$\Phi(z) = 1 - c_1 z - \ldots - c_r z^r$$
$$= \frac{z^r}{z^r} - c_1 \frac{z^r}{z^{r-1}} - \ldots - c_r \frac{z^r}{z^0}$$
$$= z^r \chi\left(\frac{1}{z}\right)$$ reflektiertes charakteristisches Polynom von (R_0)

f) $$L(R_0) = \Big\{ \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}_{\text{erzeugende Funktion von } (a_n)} : (a_n) \text{ erfüllt } (R_0) \Big\}$$ Lösungsmenge von (R_0)

13.3 Satz: Sei (R_0) eine homogene lineare Rekursion r-ten Grades.
Dann ist $L(R_0)$ ein r-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{K}[[z]]$, und zwar
$$L(R_0) = \Phi(z)^{-1}\,\mathbb{K}[z]^{(r-1)}$$
wobei $\mathbb{K}[z]^{(r-1)} := \{ p(z) \in \mathbb{K}[z] : \operatorname{grad} p \le r-1 \}$.

Bew.: $[z^0]\,\Phi(z) = 1 \neq 0 \Rightarrow \Phi$ invertierbar.

Wir zeigen:
$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in L(R_0)$$
$$\Leftrightarrow \Phi(z)\,a(z) =: b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \in \mathbb{K}[z]^{(r-1)}$$
$$\Leftrightarrow a(z) = \Phi(z)^{-1} b(z) \in \Phi(z)^{-1}\,\mathbb{K}[z]^{(r-1)}$$

Es gilt:
$$\begin{aligned}
a(z)\,\Phi(z) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)(1 - c_1 z - \dots - c_r z^r) \\
&= \sum_{n=r}^{\infty} z^n \underbrace{(a_n - c_1 a_{n-1} - \dots - c_r a_{n-r})}_{=b_n} \\
&\quad + z^0 \underbrace{a_0}_{=b_0} \\
&\quad + z^1 \underbrace{(a_1 - a_0 c_1)}_{=b_1} \\
&\quad + z^2 \underbrace{(a_2 - c_1 a_1 - c_2 a_0)}_{=b_2} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + z^{r-1} \underbrace{(a_{r-1} - c_1 a_{r-2} - \dots - c_{r-1} a_0)}_{=b_{r-1}}
\end{aligned}$$
$$\Rightarrow b_n = a_n - c_1 a_{n-1} - \dots - c_r a_{n-r} = 0, \quad n \ge r$$
$$\Leftrightarrow a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_r a_{n-r}, \quad n \ge r$$
$$\Rightarrow b(z) \in \mathbb{K}[z]^{(r-1)}$$

13.4 Kor: Eine homogene lineare Rekursion (R_0) mit gegebenen Anfangsbedingungen $a_0, \dots, a_{r-1}$ hat eine eindeutige Lsg mit erzeugender Funktion
$$a(z) = \frac{b(z)}{\Phi(z)} = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_{r-1} z^{r-1}}{1 - c_1 z - \dots - c_{r-1} z^{r-1} - c_r z^r},$$
wobei
$$b_0 = a_0$$
$$b_1 = a_1 - a_0 c_1$$

⋮

$$b_{r-1} = a_{r-1} - c_1 a_{r-2} - \ldots - c_{r-1} a_0 .$$

13.5 Bem.: Nach Nr. 13.4 lässt sich die Lsg. eines homogenen lin. Rekursion mit gegeb. Anfangswerten im Prinzip durch Partialbruchzerlegung lösen.

13.6 Satz: Sei (R_0) eine homogene lin. Rekursion, $q \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

a) $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n z^n \in L(R_0) \Leftrightarrow \chi(q) = 0$

b) $\chi(z) = \prod_{i=1}^{r} (z - q_i)$, $q_i \neq q_j \; \forall i \neq j$ (paarweise verschieden)

$\Rightarrow \left\{ a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i q_i^n \right)}_{= a_n} z^n , \lambda_i \in \mathbb{K} \right\} = L(R_0)$.

c) → Seite

Bew.:

a) $q^n = c_1 q^{n-1} + \ldots + c_r q^{n-r}$, $n \geq r$

$\Leftrightarrow \underbrace{q^n - c_1 q^{n-1} - \ldots - c_r q^{n-r}}_{= \chi(q)} = 0$, $n \geq r$

b) $\chi(q_i) = 0 \overset{a)}{\Rightarrow} a_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_i^n z^n \in L(R_0)$, $i = 1, \ldots, r$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i q_i^n \right) z^n \in L(R_0)$

Wir zeigen: $a_i(z)$, $i = 1, \ldots, r$ linear unabhängig

$\overset{\dim L(R_0) = r}{\Rightarrow} \operatorname{span}_{i=1}^{r} a_i = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i(z) \right\} = L(R_0)$.

Es gilt: $a_i(z)$, $i = 1, \ldots, r$ lin. unabhängig

$\Leftrightarrow (1, q_i, \ldots, q_i^{r-1})$, $i = 1, \ldots, r$, lin. unabhängig

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ q_1 & & q_r \\ \vdots & & \vdots \\ q_1^{r-1} & & q_r^{r-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq r} \overbrace{(q_i - q_j)}^{\neq 0 \text{ wegen } q_i \neq q_j, \, i \neq j} \neq 0$$

Vandermonde-Determinante.

13.7 Bsp. (Fibonaccizahlen):

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 2$

$\Leftrightarrow f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$, $n \geq 2$

$\Rightarrow z^2 - z - 1 = 0 = \chi(z)$

$$\Longleftrightarrow \quad z - 2\cdot\tfrac{1}{2}z - \tfrac{5}{4} = \Big(z - \underbrace{\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}}_{=q_1}\Big)\Big(z - \underbrace{\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}}_{=q_2}\Big)$$

$$\Rightarrow \quad f_n = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n$$
$$= \lambda_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \lambda_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$f_0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -\lambda_1$$
$$f_1 = 1 \Rightarrow \lambda_1\left(\frac{\cancel{1}+\sqrt{5}}{2}\right) - \lambda_1\left(\frac{\cancel{1}-\sqrt{5}}{2}\right) = \lambda_1\sqrt{5} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

13.6 Satz (Fortsetzung):

c) $\chi(z) = \prod_{i=1}^{k} (z-q_i)^{\alpha_i}$, $q_i \neq q_j \ \forall i \neq j$, $\alpha_i \geq 1$, $i=1,\dots,k$, $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i = r$

$$\Rightarrow \left\{ a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{\alpha_i-1} \lambda_{ij}\, n^j q^n\right)}_{=a_n} z^n,\ \lambda_{ij} \in \mathbb{K} \right\} = L(R_0)$$

Bew.: $$a(z) = \frac{b(z)}{\Phi(z)} = \frac{b(z)}{z^r \chi(\frac{1}{z})} = \frac{b(z)}{z^r \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{z} - q_i\right)^{\alpha_i}}$$

$$\overset{\sum \alpha_i = r}{=} \frac{b(z)}{\prod_{i=1}^{k}(1-zq_i)^{\alpha_i}}$$

$$\overset{\text{PBZ}}{=} \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-zq_i)^{\alpha_i}}, \quad \deg g_i(z) < \alpha_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} g_i(z)(1-zq_i)^{-\alpha_i}$$

$$\overset{\text{Binomial-satz}}{=} \sum_{i=1}^{k} g_i(z) \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{-\alpha_i}{n}(-1)^n}_{\text{Negation} = \binom{\alpha_i+n-1}{n}(-1)^n} z^n q_i^n$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \underbrace{g_i(z)}_{=\sum_{j=0}^{\alpha_i-1} g_{ij} z^j} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha_i+n-1}{n} q_i^n z^n$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\alpha_i-1}\binom{\alpha_i+n-j-1}{n-j} g_{ij}\, q_i^{n-j}\right) z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} \underbrace{\sum_{j=0}^{\alpha_i-1}\binom{\alpha_i+n-j-1}{n-j}\frac{g_{ij}}{q_i^j}}_{=:\,p_i(n)}\, q_i^n\right) z^n, \quad \deg p_i < \alpha_i$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} \lambda_{ij} n^j q_i^n \right) z^n .$$

13.8 Bsp.:

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \quad a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2$$

$$\chi(z) = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_n = (\lambda_1 n + \lambda_2) 2^n, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad n \geq 2$$

Probe:

$$\cancel{a_n = (\lambda_1 n + \lambda_2) 2^n = 4[\lambda_1(n-1) + \lambda_2] 2^{n-1} - 4[\lambda_1(n-2) + \lambda_2] 2^{n-2} = 0}$$

Anfangsbedingung $(a_0, a_1) = (2, 6)$

$$a_0 = (\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2) 2^0 = \lambda_2 = 2$$

$$a_1 = (\lambda_1 \cdot 1 + 2) 2^1 = 2\lambda_1 + 4 = 6 \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad a_n = (n+2) 2^n, \quad n \geq 0.$$

13.9 Bem.: Die allgemeine Lsg einer inhomogenen linearen Rekursionsgleichung (R) ist die Summe einer speziellen Lsg von (R) und der allgemeinen Lsg von (R_0).

13.10 Bsp. (Inhomogene lineare Rekursion)

a) $a_n = 2a_{n-1} + 2^n, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 2$

$-2\,(a_{n-1} = 2a_{n-2} + 2^{n-1}), \quad n \geq 2 \qquad a_1 = 2 \cdot 2 + 2 = 6$

$$a_n - 2a_{n-1} = 2a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$$

$$\overset{\text{Bsp 13.8}}{\Rightarrow} \quad a_n = (n+2) 2^n, \quad n \geq 0.$$

b) $a_n = 2a_{n-1} + \underbrace{(n^2 - 2n + 2)}_{\text{kein konstanter Koeff.!}}, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 1$

$$a_n = 2a_{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \lambda 2^n$$

Ansatz für spezielle Lsg: $\bar{a}_n = xn^2 + yn + z, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad \cancel{xn^2} + \cancel{yn} + z = 2(x\underbrace{(n-1)^2}_{n^2 - 2n + 1} + y(n-1) + z) + (n^2 - 2n + 2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = n^2(x+1) + n(-4x + y - 2) + (2x - 2y + z + 2)$$

$$\Rightarrow \quad x = -1, \quad y = -2, \quad z = -4$$

$\Rightarrow \quad \overline{a_n} = -n^2 - 2n - 4$

$\Rightarrow \quad a_n = \lambda 2^n - n^2 - 2n - 4$

$a_0 = \lambda - 4 = 1 \Rightarrow \lambda = 5$

$\Rightarrow \quad a_n = 5 \cdot 2^n - n^2 - 2n - 4.$

14. Summation

14.1 Motivation: $\sum_{k=a}^{b} g(k) = G(b) - G(a)$ analog zum Integral $\int_a^b g(x)\,dx = G(b) - G(a)$.

14.2 Def.: (Translations- und Differenzoperator):

Sei $\mathbb{N} \subseteq D \subseteq \mathbb{C}$, $a \in D$, $\mathbb{F} = D \to \mathbb{C}$.

a) $E^a : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, $f \mapsto E^a(f)$ mit $(E^a f)(x) := f(x+a)$ Translationsop. mit Schrittweite a

b) $\Delta := E - I$ Vorwärtsdifferenzoperator

c) $\nabla := I - E^{-1}$ Rückwärtsdifferenzoperator

14.3 Beob.

a) $E^1 = E$, $E^0 = I$

b) $(\Delta f)(x) = ((E - I)f)(x) = f(x+1) - f(x)$

c) $(\nabla f)(x) = ((I - E^{-1})f)(x) = f(x) - f(x-1)$

14.4 Bsp. $\Delta(x^3) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$.

14.5 Beob. (Rechenregeln): Für die Operatoren E^a, Δ und ∇ gelten die üblichen Rechenregeln mit Ausnahme der Existenz des multiplikativen Inversen, d.h. für $P, Q \in \{E^a, \Delta, \nabla\}$, $\alpha \in \mathbb{C}$

a) $(P+Q)(f) = Pf + Qf$

b) $(\alpha P)(f) = \alpha(Pf)$

c) $(PQ)(f) = P(Q(f))$ (aber i.a. nicht $(PQ)(f) = (QP)(f)$ für $P = I$ abweichend)

d) $(\Delta^n) f = (E - I)^n (f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k f$

14.6 Bsp:

a) $\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k)$

$\Rightarrow \Delta^n f(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(0)$

z.B. $\Delta^2 x^3 \big|_{x=0} = \sum_{k=0}^{2} (-1)^{2-k} \binom{2}{k} k^3 = 0 - 2 + 8 = 6$.

b) $\Delta x^{\underline{n}} = (x+1)^{\underline{n}} - x^{\underline{n}} = (x+1) x^{\underline{n-1}} - x^{\underline{n-1}} (x - n + 1)$

$= n x^{\underline{n-1}}$, $n \geq 1$.

c) $\nabla x^{\overline{n}} = x^{\overline{n}} - (x-1)^{\overline{n}} = x^{\overline{n-1}} (x + n - 1) - (x-1) x^{\overline{n-1}}$

$= n x^{\overline{n-1}}$, $n \geq 1$

14.7 Beob., Def und Satz): $\frac{x^{\underline{n}}}{x^{\underline{n+1}}} = \frac{1}{x-n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Das motiviert

a) $x^{\underline{-1}} := \frac{x^{\underline{-1}}}{x^{\underline{0}}} = \frac{1}{x+1}$

$$x^{\underline{-n}} := \frac{x^{\underline{-n+1}}}{x-n} = \frac{1}{(x+1)\cdots(x+n)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

b) $x^{\overline{-n}} : \;= \frac{1}{(x-1)\cdots(x-n)}$, $n \in \mathbb{N}$.

14.8 Satz Satz 14.6 b), c) gilt für $n \in \mathbb{Z}$.

Bew.:

a) $n=0$: $\Delta x^{\underline{0}} = (x+1)^{\underline{0}} - x^{\underline{0}} = 0 = 0\, x^{\underline{-1}}$, analog für $\Delta x^{\overline{0}}$.

b) $-n<0$: $\Delta x^{\underline{-n}} = (x+1)^{\underline{-n}} - x^{\underline{-n}}$

$$= \frac{1}{(x+2)\cdots(x+n+1)} - \frac{1}{(x+1)\cdots(x+n)}$$

$$= \frac{(x+1)-(x+n+1)}{(x+1)\cdots(x+n+1)} = -n\,\Delta^{\underline{-n-1}}$$, analog für $\Delta x^{\overline{-n}}$. □

14.9 Def. (Diskrete Stammfunktion): Seien $F, f \in \mathbb{F}$

$\Delta F = f :\iff$ F diskrete Stammfunktion von f

$\iff: F = \sum f$ „unbestimmte Summe"

14.10 Satz Sei $F = \sum f$ diskrete Stammfunktion f, $a,b \in D$.

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = F(b+1) - F(a) =: F\Big|_a^{b+1}.$$

Bew.: $\sum_{k=a}^{b} f(k) = \sum_{k=a}^{b} \Delta F(k) = \sum_{k=a}^{b} \left[F(k+1) - F(k)\right] = F(b+1) - F(a)$ □

14.11 Beob.: Ist $F = \sum f$ und $G \in \mathbb{F}$ mit $\Delta G = G(x+1) - G(x) = 0$, dann ist auch $F + G = \sum f$, z.B. $G = \sin(2\pi x)$, $G \equiv c$.

14.12 Bsp.:

a) $\sum x^{\underline{n}} = \frac{x^{\underline{n+1}}}{n+1}$, $n \neq 1$

b) $x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1} = \Delta F(x) = F(x+1) - F(x)$

$\Rightarrow F(x+1) = F(x) + \Delta F(x) = \frac{1}{x+1} + F(x)$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{x} + F(x-1) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \underbrace{F(x - \lfloor x \rfloor)}_{=:0}$

$:= H_x$ harmonische Zahl

$\Rightarrow \sum x^{\underline{-1}} = H_x$.

c) $\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = (a-1)\,a^x$

$\Rightarrow \Delta \frac{a^x}{a-1} = a^x, \quad a \neq 1$

$\Rightarrow \sum a^x = \frac{a^x}{a-1}, \quad a \neq 1.$

$\frac{2n-2+3}{6} = \frac{n+\frac{1}{2}}{3}$

d) Bestimmung von $\sum_{k=0}^{n} k^2$:

$$\sum_{k=0}^{n} \underbrace{k^2}_{= f(k) = x^2|_{x=k} = (x(x-1)+x)|_{x=k} = (x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}})|_{x=k}} = \left(\frac{x^{\underline{3}}}{3} + \frac{x^{\underline{2}}}{2}\right)\Big|_0^{n+1} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{(n+1)n(n+\frac{1}{2})}{3}.$$

$\sum x^{\underline{2}} = \frac{x^{\underline{3}}}{3}$

e) Bestimmung von $\sum_{k=0}^{n} k^m$:

$$\sum_{k=0}^{n} \underbrace{k^m}_{= f(k) = x^m|_{x=k} \overset{9.16}{=} \sum_{j=0}^{m} S_{m,j}\, x^{\underline{j}}|_{x=k}} = \left(\sum_{j=0}^{m} S_{m,j} \frac{x^{\underline{j+1}}}{j+1}\right)\Big|_0^{n+1} = \sum_{k=0}^{m} \frac{S_{m,k}}{k+1}(n+1)^{\underline{k+1}}$$

14.13 Satz (Partielle Summation): Für $f, g \in \mathbb{F}$ gilt

$$fg = \sum f \Delta g + \sum \Delta f\,(Eg)$$

Bew.: $\Delta\big(f(x)g(x)\big) = f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x)$

$$= \underbrace{f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x+1)}_{= \Delta f(x)(Eg)(x)} + \underbrace{f(x)g(x+1) - f(x)g(x)}_{= f(x)\Delta g(x)} \quad \square$$

14.14 Bsp.: Partielle Summation wird typischerweise wie folgt verwendet:

$$\sum f\Delta g = fg - \sum (Eg)\Delta f.$$

a) $\sum_{k=1}^{n} H_k = \left(\sum H_x\right)\Big|_1^{n+1} = \left(\sum \underbrace{H_x}_{=f}\, \underbrace{x^{\underline{0}}}_{=\Delta g}\right)\Big|_1^{n+1}$

$= \left(H_x \frac{x^{\underline{1}}}{1} - \sum \underbrace{\frac{(x+1)^{\underline{1}}}{1} \frac{1}{x+1}}_{= x^{\underline{0}}}\right)\Big|_1^{n+1}$

$= H_{n+1}(n+1) - 1 - (n+1) + 1$ $\quad = \frac{x^{\underline{1}}}{1}$

$= (n+1)(H_{n+1} - 1)$

b) $\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} H_k = \left(\sum H_x \underbrace{\binom{x}{m}}_{= \frac{x^{\underline{m}}}{m!}}\right)\Big|_1^{n+1}$ $\quad = \frac{1}{m+1}\binom{x}{m+1}$ $\quad = \frac{1}{m+1}\binom{x}{m}$

$= \left(H_x \binom{x}{m+1} - \sum \binom{x+1}{m+1} \frac{1}{x+1}\right)\Big|_1^{n+1}$

$= \left[\binom{n+1}{m+1} H_{n+1} - \binom{1}{m+1} H_1\right] - \left[\frac{1}{m+1}\binom{n+1}{m+1} - \frac{1}{m+1}\underbrace{\binom{1}{m+1}}_{=0}\right]$

$= \binom{n+1}{m+1}\left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1}\right), \quad m \geq 1.$

14.15 Satz (Newton-Darstellung von Polynomen): Sei $f \in \mathbb{K}[x]^{(n)}$ ein Polynom vom Grad $\leq n$. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f(0)}{k!} x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k f(0) \binom{x}{k}.$$

$$\Delta \;\hat{=}\; \frac{d}{dx} \qquad x^{\underline{k}} \;\hat{=}\; x^k$$

analog zur Taylorentwicklung im diff'baren Fall.

Bew.: $(x^{\underline{k}})$ ist Basisfolge

$\Rightarrow \exists!\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{\underline{k}}$

$\overset{14.6\,b)}{\Rightarrow} \Delta^i f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k k^{\underline{i}} x^{\underline{k-i}}$

$\Rightarrow \Delta^i f(0) = b_i i^{\underline{i}} = b_i\, i! \Rightarrow b_i = \frac{\Delta^i f(0)}{i!}$

$\Rightarrow b_k = \frac{\Delta^k f(0)}{k!}.$ $\square$

14.16 Bsp.:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} x^{\underline{k}}$$

$$\Rightarrow S_{n,k} = \frac{\Delta^k x^n}{k!}\Big|_{x=0} = \frac{(E-I)^k x^n}{k!}\Big|_{x=0}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} E^i\right) \frac{x^n}{k!}\Big|_{x=0}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \frac{i^n}{k!}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

1. Lösen Sie die lineare inhomogene Rekursion

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n^2 - 8n + 12 + [n=0] + 5[n=1] \quad , n \in \mathbb{N}_0$$

a) Homogene Lsg.

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$$

$$\Rightarrow \chi(z) = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a_n = (\lambda n + \mu) 2^n \quad , \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

b) Inhomogene Lsg.

Ansatz $\overline{a_n} = xn^2 + yn + z$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ 1}}{\cancel{x}n^2} + \cancel{yn} + z - 4\cancel{x}(\cancel{n^2} - 2n + 1) - 4y(\cancel{n} - 1) - \cancel{4z}$$
$$+ 4\cancel{x}(\cancel{n^2} - 4n + 4) + 4y(\cancel{n} - 2) + \cancel{4z} \stackrel{!}{=} n^2 - 8n + 12$$

$$\Leftrightarrow \underset{\substack{\| \\ 1}}{x}n^2 + (\underset{\substack{\| \\ 0}}{y - 8})n + (\underset{\substack{\| \\ 0}}{z - 4 + 16}) = n^2 - 8n + 12$$

c) Allgemeine Lsg.

$$a_n = (\lambda n + \mu) 2^n + n^2$$

$$a_0 = 0 = \mu$$

$$a_1 = 5 = \lambda 2 + 1 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$\Rightarrow a_n = 2n2^n + n^2.$$

2. Auf wieviele Weisen a_k kann man k Cent mit höchstens 4 1ct-Stücken und beliebig vielen 2ct und beliebig vielen 5ct-Stücken herausgeben?

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = (1 + z + z^2 + z^3 + z^4)(1 + z^2 + \ldots)(1 + z^5 + \ldots)$$

$$= \frac{\cancel{z^5 - 1}}{z - 1} \frac{1}{1 - z^2} \frac{1}{\cancel{1 - z^5}} = \frac{1}{1 - z} \frac{1}{1 - z^2}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} z^{2j + k - j} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} z^{k+j}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\left(z^{2n} + z^{2n+1}\right)$$

$$2n = k + j = \left.\begin{array}{l} n + n \\ (n+1) + (n-1) \\ \vdots \\ 2n + 0 \end{array}\right\} n+1$$

$$2n+1 = k + j = \left.\begin{array}{l} (n+1) + n \\ (n+2) + (n-1) \\ \vdots \\ (2n+1) + 0 \end{array}\right\} n+1$$

$$\Rightarrow a_{2k} = a_{2k+1} = k + 1$$

z.B. $a_{10} = 6 = |\{5+5, 5+2+2+1, 5+2+1+1+1, 2+2+2+2+2, 2+2+2+2+1+1, 2+2+2+1+1+1+1\}|$.

3. Wie viele Zahlen von 1 bis 100 sind nicht durch 3, 5, 7 teilbar?

Sei $A_i = \{n \in [100] : i | n\}$.

$$\left| [100] - \bigcup A_i \right| = 100 - |A_3| - |A_5| - |A_7|$$
$$+ |A_3 \cap A_5| + |A_3 \cap A_7| + |A_5 \cap A_7|$$
$$- |A_3 \cap A_5 \cap A_7|$$
$$= 100 \underbrace{- 33 - 20 - 14}_{-67} + \underbrace{6 + 4 + 2}_{+12} - 0$$
$$= 45.$$

4. Beweisen Sie durch doppeltes Abzählen

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

wähle m aus n, dann k aus m | wähle k aus n, dann $m-k$ aus $n-k$.

5. Welche Laufzeit hat folgender Algorithmus?

Input: n

Output: n^n

1. $x \leftarrow 1$ — $O(1)$
2. for $i = 1, \ldots, n$ do { — $\times n$
3. $x \leftarrow x n$ — $O(1)$
4. }

$O(n)$

a) Elementare Operationen: $O(n)$

b) Codierungslänge größte Zahl: $\langle n^n \rangle = n \langle n \rangle$

c) Laufzeit: $O(n^2 \langle n \rangle)$

d) Codierungslänge Input: $\langle n \rangle = k$

e) Laufzeitfunktion $O(\underbrace{n^2}_{=(2^k)^2} \langle n \rangle) = O(4^k k)$

$= (2^k)^2 \cdot k$

$\Rightarrow$ exponentiell.

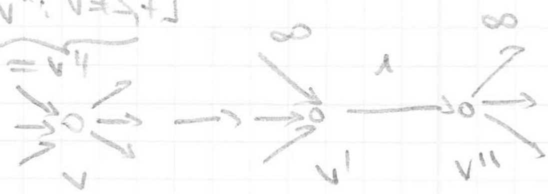
6. Beweisen Sie den Satz von Menger (Knotenform):

Sei $D=(V,A)$ ein Digraph, $s,t \in V$, $s \neq t$.

Dann ist max. Anzahl von kreuzungsfreien (= im Inneren knotendisjunkten) st-Wegen gleich der minimalen Kardinalität einer s und t trennenden Knotenmenge W (= $D \setminus W$ enthält keinen st-Weg).

1. Konstruiere Netzwerk $D' = (V''', A', c', s, t)$ mit

$$V''' = \{s,t\} \cup \underbrace{\{v' : v \neq s,t\}}_{=V'} \cup \underbrace{\{v'' : v \neq s,t\}}_{=V''}$$



$$A' = \{ sv' : sv \in A \}$$
$$\cup \{ v''t : vt \in A \}$$
$$\cup \{ u''v' : uv \in A \}$$
$$\cup \{ v'v'' : v \in V \setminus \{s,t\} \}$$

$c'_{v'v''} = 1$, $v'v'' \in A'$

$c'_a = \infty$, sonst

2. $P = s\, v_1 v_2 \dots v_k\, t$ st-Weg in D

$\Leftrightarrow P' = s\, v_1' v_1'' v_2' v_2'' \dots v_k' v_k''\, t$ " D'

3. P, Q kreuzungsfreie Wege in D

$\Leftrightarrow P', Q'$ kantendisjunkte Wege in D'

4. Max-Flow-Min-Cut-Theorem

max # kreuzungsfreie Wege in D

= max # kantendisjunkte Wege in D'

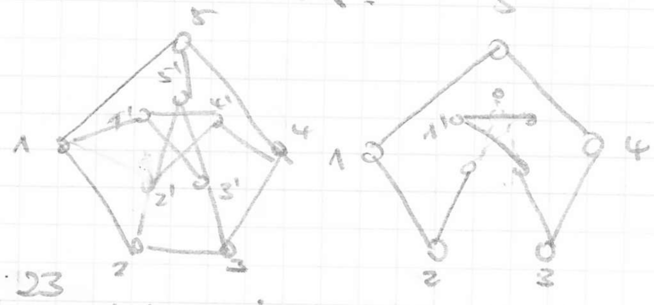
= max Wert eines st-Flusses in D'

= min Kap eines st-Schnittes in D' $\left(\leq |\delta^+(\{s\} \cup V')| = |V|+1 \right)$

= $|A \subseteq \{v'v'' : v \in V\} : A$ st-Schnitt$|$

= $|W \subseteq V : W$ trennt s und t$|$.

7. Betrachten Sie den Petersengraph. Zeigen Sie, daß dieser nicht hamiltonsch ist.



a) eine Kante auf dem äußeren Kreis ist nicht in HK H.

b) $12, 22', 33', 34 \in H$

c) $11', 44' \in H \Rightarrow ↯ \Rightarrow$ o.B.d.A. $15 \in H$

d) $\Rightarrow 1'4', 1'3' \in H$

e) $\Rightarrow 45 \in H$

f) $\Rightarrow ↯$.