Freie Universität Berlin
FB Mathematik und Informatik

Prof. Dr. Ralf Borndörfer
M.Sc. math. Stephan Schwartz

Diskrete Optimierung im Verkehr (WS 2014)

Übungsblatt 2

Abgabe: Fr, 31. Oktober 2014, in der Übung

Aufgabe 1. **10 Punkte**

Beweise: Sei $D = (V, A)$ ein Digraph und $x \in \mathbb{N}_0^A$ ein ganzzahliger (s, t)-Fluß in D vom Wert v. Dann gibt es st-Wege P_i für und gerichtete Kreise C_j in D mit der Eigenschaft

$$x = \sum \chi(P_i) + \sum \chi(C_j)$$

wobei $\chi(P_i) \in \{0,1\}^A$ bzw. $\chi(C_j) \in \{0,1\}^A$ jeweils den Inzidenzvektor von P_i bzw. C_j bezeichnet.

Aufgabe 2. **10 Punkte**

Zeige, dass der Algorithmus "Ein-Depot-Methode" aus der Vorlesung partiell korrekt ist. Das heißt, dass die Ausgabe K tatsächlich eine Menge disjunkter Fahrtenketten darstellt, die alle Fahrten enthalten, und dass $|K|$ minimal ist mit dieser Eigenschaft.

Aufgabe 3. **10 Punkte**

Betrachte das 1-Depot-Umlaufplanungsproblem mit Längenrestriktionen, d.h. die Fahrtstrecke jeder Fahrtenkette darf höchstens M Kilometer lang sein. Kann man dieses Problem mit Hilfe eines Minimalkostenflussalgorithmus auf einem geeigneten Graphen lösen oder nicht? Die Antwort "Ja" kann durch Angabe eines Verfahren begründet werden, die Antwort "Nein" durch eine Transformation auf ein geeignetes NP-hartes Optimierungsproblem.

Aufgabe 4. **Tutorial Session**

Zeige: Eine Matrix $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ ist vollständig unimodular, falls

(1) A pro Spalte maximal zwei Einträge ungleich 0 hat und

(2) die Zeilen von A in zwei disjunkte Mengen I_1, I_2 aufgeteilt werden können sodass

   (i) Für jede Spalte mit zwei Einträgen ungleich 0 und *gleichem* Vorzeichen liegen die zugehörigen Zeilen in *verschiedenen* I_j

   (ii) Für jede Spalte mit zwei Einträgen ungleich 0 und *verschiedenen* Vorzeichen liegen die zugehörigen Zeilen in *demselben* I_j

Aufgabe 5. **Tutorial Session**

a) Sei $b \in \mathbb{Z}^m$ und sei A die

- Knoten-Kanten Inzidenzmatrix eines Digraphen oder
- Knoten-Kanten Inzidenzmatrix eines ungerichteten bipartiten Graphen.

Zeige: Dann hat das lineare Programm $\max c^T x$ mit Nebenbedingungen $Ax = b$ oder $Ax \geq b$ nur ganzzahlige Basislösungen.

b) Gib zwei bekannte kombinatorische Optimierungsprobleme an, bei denen die Ganzzahligkeitsbedingungen problemlos relaxiert werden können (bei ganzzahliger rechter Seite).

Aufgabe 6. **Tutorial Session**

Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nicht vollständig unimodular ist, dass aber das Polyeder $P = \{x : Ax \leq b\}$ für alle $b \in \mathbb{Z}^3$ nur ganzzahlige Ecken besitzt.