Freie Universität Berlin
FB Mathematik und Informatik

Prof. Dr. Ralf Borndörfer
M.Sc. math. Stephan Schwartz

Diskrete Optimierung im Verkehr (WS 2014)

Übungsblatt 5

Abgabe: Fr, 21. November 2014, in der Übung

Aufgabe 1. **10 Punkte**

Wieviele Schritte benötigt die Subgradientenmethode mit konstanter Schrittweite $\alpha_k = h$, bis

$$f^* - f_k^{\text{best}} f(\lambda_j) \le L^2 h$$

gilt? Hierbei sei $f_k^{\text{best}} := \max f(\lambda_k)$ und $L := \max \|u_k\|_2$.

Aufgabe 2. **1+3+3+3 Punkte**

Betrachte das Optimierungsproblem

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \min\{2x - y, 2y - x, x + y\}.$$

a) Von welchem Typ ist die Funktion $f(x,y) := \min\{2x - y, 2y - x, x + y\}$?
b) Zeichne f.
c) Verwende zur Maximierung von f die Methode des “Koordinatenaufstiegs”

$$\max_{x \text{ oder } y} \min\{2x - y, 2y - x, x + y\}$$

ausgehend vom Punkt $(x_0, y_0) = (-1, -1)$. Zeichne die Iterationsfolge in das Bild aus Teilaufgabe b. Konvergiert das Verfahren? Falls ja, gegen welchen Punkt, und ist dieser ggf. optimal?
d) Verwende ein Subgradientenverfahren mit konstanter Schrittlänge 1 zur Maximierung von f ausgehend vom gleichen Startpunkt. Zeichne die Iterationsfolge in das Bild aus Teilaufgabe b. Was passiert diesmal?

Aufgabe 3. **10 Punkte**

Betrachte das folgende Umlaufplanungsproblem:

$$\begin{array}{llcll}
\text{(IP)} & \min \sum_{d\in D} \sum_{a\in A^d} c_a^d x_a^d & & & \\
\text{(i)} & x^d(\delta^+(v)) - x^d(\delta^-(v)) & = & \delta_{st}^d(v) & \forall s \ne v \ne t \in V^d \\
\text{(ii)} & x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v)) & = & \delta_{st}(v) & \forall s \ne v \ne t \in V \\
\text{(iii)} & x(\delta^-(v)) & = & 1 & \forall s \ne v \ne t \in V \\
\text{(iv)} & x(\delta^+(s^d)) & \le & u^d & \forall d \in D \\
\text{(v)} & x_a^d & \in & \{0,1\} & \forall d \in D, a \in A^d
\end{array}$$

und seine Lagrangerelaxierungen L_1 bzgl. Bedingung (iii) und L_2 bezüglich Bedingung (i) mit Lagrangefunktionen f_1 bzw. f_2. Zeige, dass $f_2(0) > f_1(0)$ gilt, falls $c > 0$.

Aufgabe 4. **2+2+6 Punkte**

Betrachte den Digraphen D in Abb. 1 mit den dort angegebenen Kantenkosten. Gesucht ist ein nicht notwendig ganzzahliger Mehrgüterfluss mit minimalen Kosten, der eine Einheit von $s^1 = 1$ zu $t^1 = 5$ transportiert, eine Einheit von $s^2 = 2$ zu $t^2 = 4$, und der genau eine Einheit Fluss durch den Knoten 3 schickt.

a) Formuliere dieses Problem als ganzzahliges Programm (IP).
b) Formuliere eine Lagrangerelaxierung (L) dieses Programms (IP) bzgl. der beiden Flussbedingungen.
c) Löse die Lagrangerelaxierung mit einem Subgradientenverfahren mit konstanter Schrittweite 1 ausgehend von dem Fluss mit Wert 0. Zeichne jeweils für jede Iteration die resultierenden Flüsse.

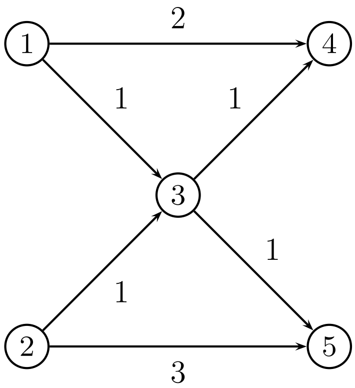

Abbildung 1: Digraph D mit Kantenkosten.

Aufgabe 5. **Präsenzübung**

Betrachte das Umlaufplanungsproblem in der Datei `arcs.dat`:

```
#  dh  tail  head  depot   cost
a   0     0     1      2   1800
a   1     0     2      2   1800
a   2     0     3      0   1320
a   3     0     4      2   1800
...
```

File `arcs.dat`.

Die Datei hat das folgende Format. Eine Zeile, die mit `#` beginnt, enthält einen Kommentar. Eine Zeile, die mit `a` beginnt, definiert einen Bogen mit Hilfe der folgenden fünf Zahlen: einen Leerfahrtindex `dh`, einen Startknoten `tail`, einen Endknoten `head`, einen Fahrzeugtyp oder Depot `depot`, für den dieser Bogen zulässig ist, und einen Kostenwert `cost`. Es kann mehrere Bögen mit dem gleichen Leerfahrtindex, Startknoten, und Endknoten, aber unterschiedlichen Fahrzeugtypen geben; diese Bögen modellieren die Zulässigkeit einer Leerfahrt für verschiedene Fahrzeugtypen. `dh`, `tail`, `head` und `type` sind ganze Zahlen die bei 0 starten, die Kosten sind nicht-negative ganze Zahlen. Der künstliche Knoten 0 bezeichnet den Beginn und das Ende der Fahrzeugumläufe, die anderen Knoten bezeichnen Fahrgastfahrten. Die Instanz in der Datei `arcs.dat` hat 11 Fahrzeugtypen, 7 130 Fahrgastfahrten, 7 131 Knoten, 75 137 Leerfahrten und 126 992 Bögen.

a) Formuliere und löse dieses Umlaufplanungsproblem mit Zimpl und `Scip`.
b) Was ist der optimale Zielfunktionswert des IPs und der LP-Relaxierung?
c) Wieviele Fahrzeuge werden jeweils verwendet?
d) Ist das die minimale Flottengröße (= Anzahl an Fahrzeugen)?

Aufgabe 6. **Präsenzübung**

Diese Aufgabe setzt Aufgabe 5 fort. Die Dateien `tripduals.dat` und `flowduals.dat` enthalten Lagrange-Multiplikatoren für die Fluss- und die Flusserhaltungsbedingungen einer Mehrgüterflussformulierung des Umlaufplanungsproblems:

```
# node    dual
v    1    1740.000000
v    2    2280.000000
v    3    1200.000000
v    4    2040.000000
...
```

File `tripduals.dat`.

```
# node depot    dual
v    0    0     420.000000
v    0    1       0.000000
v    0    2     240.000000
v    0    3    3330.000000
...
```

File `flowduals.dat`.

Jede Nichtkommentarzeile der Datei `tripduals.dat` beginnt mit `v` und enthält einen Knotenindex (= Index einer Fahrgastfahrt und verschieden von 0) und einen zugehörigen Multiplikator. Jede Nichtkommentarzeile der Datei `flowduals.dat` enthält einen Knotenindex, einen Fahrzeugtyp und einen zugehörigen Multiplikator. Die Multiplikatoren sind beliebige Fließkommazahlen sein.

a) Konstruiere eine m-Depot-Relaxierung des Umlaufplanungsproblems durch Relaxierung der Flussbedingung. Zeige dass diese m-Depot-Relaxierung ein Minimalkostenflussproblem ist. Was ist ihr optimaler Zielfunktionswert?
b) Verbessere die m-Depot-Relaxierung mit Hilfe einer Lagrange-Relaxierung der Flussbedingung. Verwende dazu die Multiplikatoren aus der Datei `tripduals.dat`. Zeige, dass diese Lagrange-Relaxierung (bzgl. festen Multiplikatoren) ein Minimalkostenflussproblem ist. Was ist ihr optimaler Zielfunktionswert?
c) Konstruiere eine 1-Depot-Relaxierung des Umlaufplanungsproblems mit Hilfe der Annahme, dass all Bögen für Fahrzeugtyp 1 zulässig sind. Zeige, dass diese 1-Depot-Relaxierung ein Minimalkostenflussproblem ist. Was ist ihr optimaler Zielfunktionswert?
d) Verbessere die 1-Depot-Relaxierung mit Hilfe einer Lagrange-Relaxierung der Flusserhaltungsbedingungen für die einzelnen Fahrzeugtypen. Verwende dazu die Multiplikatoren aus der Datei `flowduals.dat`. Zeige, dass diese Lagrange-Relaxierung (bzgl. festen Multiplikatoren) ein Minimalkostenflussproblem ist. Was ist ihr optimaler Zielfunktionswert?
e) Welche Relaxierung ist besser?