

Diskrete Optimierung im Verkehr (WS 2014)

Übungsblatt 10

Abgabe: Fr, 16. Januar 2015, in der Übung

Aufgabe 1.

10 Punkte

Betrachte ein Set Partitioning Problem $\min c^T x, Ax = 1, x \in \{0, 1\}^n$, dessen Matrix A keine doppelten Spalten und keine Nullspalten enthält. Zeige: Wenn x eine fraktionale Lösung der LP-Relaxierung

$$(LP) \min c^T x, Ax = 1, 0 \leq x \leq 1$$

ist, dann gibt es Spalten i, j und Zeilen r, s mit $0 < x_i, x_j < 1$ und

$$\begin{pmatrix} a_{ri} & a_{rj} \\ a_{si} & a_{sj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.

10 Punkte

Bestimme in dem Digraphen D in Abb. 1 einen kostenminimalen 1,10-Weg mit Gewicht ≤ 10 mit Hilfe einer Lagrange-Relaxierung.

- Formulieren dieses Problem als ganzzahliges Programm.
- Formuliere die Lagrange-Relaxierung bzgl. der Ressourcenbedingung und bestimme die Lagrangefunktion $f(\lambda)$.
- Enumeriere alle (auch die nicht längenbeschränkten) 1,10-Pfade $p_i, i = 1, \dots, k$ in D . Erstelle eine Tabelle mit folgenden Spalten: $i, p_i, c(p_i), w(p_i) - 10, f_i(\lambda) := c(p_i) - \lambda[w(p_i) - 10]$.
- Zeichne mit Hilfe der Tabelle aus c) die Funktionen f_i für $\lambda \in [0, 2]$.
- Löse die Lagrange-Relaxierung mit Hilfe der Zeichnung aus d).
- Was ist der optimale Lagrange-Multiplikator? Was ist der zugehörige Pfad? Ist dieser eine Optimallösung des Ausgangsproblems?

Aufgabe 3.

10 Punkte

Löse das ressourcenbeschränkte Kürzeste-Wege-Problem aus Aufgabe 2 mit Hilfe von Branch & Bound. Verwende zur Berechnung der Zwischenlösungen die Lagrange-Relaxierung aus Aufgabe 2 mit dem Multiplikator $\lambda = 1$.

- Lege eine Branching-Regel fest.
- Führe die Berechnung aus.
- Zeichne den entstehenden Branch & Bound-Baum.

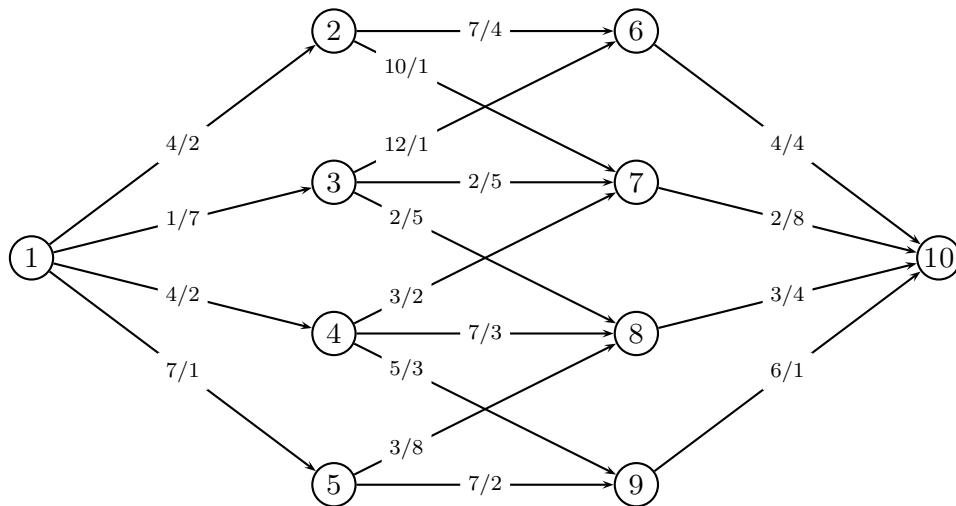


Abbildung 1: Digraph D mit Kantenkosten/Kantengewichten c/w .

Aufgabe 4.

10 Punkte

Betrachte das folgende ganzzahlige Programm:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 6x_1 + 8x_2 \leq 15 \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.
 \end{aligned}$$

- a) Löse dieses Problem mit Branch & Bound; löse die LPs graphisch oder mit SCIP.
- b) Zeichne den Branch & Bound-Baum.

Aufgabe 5.

Präsenzübung

Betrachte den in der Datei `digraph.dat` gegebenen knotengewichteten Digraphen. Überdecke diesen mit einer Minimalanzahl an 0,7-Pfaden mit Knotengewicht ≤ 8 .

- a) Zeichne den Digraphen.
- b) Wie sehen die möglichen Pfade aus?
- c) Enumeriere die Pfade und schreibe sie in eine Datei.
- d) Formuliere das Pfadüberdeckungsproblem als ganzzahliges Programm.
- e) Implementiere ein `Zimpl`-Modell.
- f) Formuliere eine Branching-Regel.
- g) Löse die LP-Relaxierung von d.
- h) Löse das Pfadüberdeckungsproblem mit Hilfe von `Scip`. Wie sieht der Branch & Bound-Baum aus? Wo findet ein Bounding-Schritt statt?