Freie Universität Berlin
FB Mathematik und Informatik

Prof. Dr. Ralf Borndörfer
M.Sc. math. Stephan Schwartz

Diskrete Optimierung im Verkehr (WS 2014)

Übungsblatt 11

Abgabe: Fr, 23. Januar 2015, in der Übung

Aufgabe 1. **10 Punkte**

Betrachte das Bus Stop Location Problem in einem Netzwerk kollinearer Knoten. Zeige, dass die Überdeckungsmatrix die consecutive ones-Eigenschaft hat. Was folgt daraus für die Komplexität dieses Problems?

Aufgabe 2. **10 Punkte**

Seien $w^1 \geq \cdots \geq w^s > w^{s+1} = 0$ nichtnegative ganze Zahlen und sei $H(n) := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ die n-te harmonische Zahl, $n \in \mathbb{N}$. Zeige:

$$\sum_{i=1}^{s} (w^i - w^{i+1})/w^i \leq \sum_{i=1}^{s} \left(H(w^i) - H(w^{i+1}) \right) \leq H(w^1).$$

Aufgabe 3. **10 Punkte**

Betrachte das Set Covering Problem (SCP) $\min c^T x$, $Ax = \mathbb{1}, x \in \{0,1\}^{m+1}$ mit $A_{\cdot j} = e_j$, $c_j = 1/j$, $j = 1, \ldots, m$, und $A_{\cdot m+1} = \mathbb{1}$, $c_{m+1} > 1$. Welche Approximationsgüte erreicht der Greedy-Algorithmus für dieses Problem im schlechtesten Fall?

Aufgabe 4. **Präsenzübung**

Betrachte das Bus Stop Location Problem in Abb. 1 mit Einheitskosten, möglichen Haltestellen $S = \{s_1, \ldots, s_7\}$, Nachfragepunkten $V = \{v_1, \ldots, v_5\}$, Überdeckungsradius r und Überdeckungsmatrix

$$A_r^{\text{cov}} = \left(\begin{array}{ccccccc|c} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & v_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & v_5 \end{array} \right).$$

Löse dieses Problem mit Set Covering-Techniken. Illustriere Dein Vorgehen in der Abbildung.

Aufgabe 5. **10 Punkte**

Betrachte das Continuous Bus Stop Location Problem (CBSLP) in einem Netzwerk $N = (S \cup T, E)$ mit Nachfrageknoten V und Überdeckungsradius r, wobei $S = \{s \in \mathbb{R}^2 : \exists e \in E : s \in e\}$, d.h. Haltestellen können überall im Netz platziert werden. Zeige:

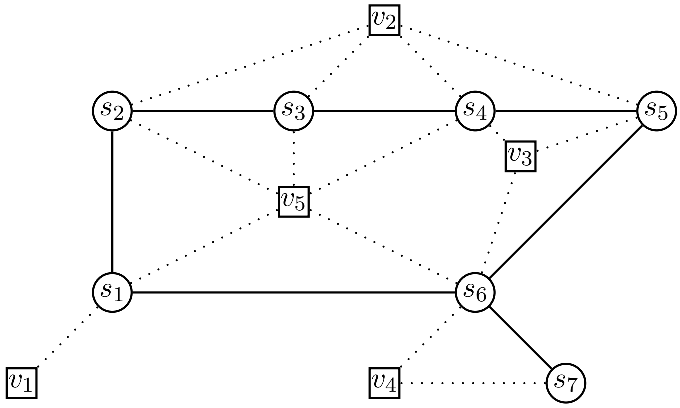

Abbildung 1: Bus stop location problem.

a) Wenn (CBSLP) eine Lösung hat, dann ist der optimale Zielfunktionswert endlich.
b) Die Menge
$$S_r := T \cup \{x \in N : \exists v \in V : \|x - v\|_2 = r\}.$$
ist endlich.
c) Betrachte für eine Kante $e = uv \in E$ die Menge
$$S_r^e := S_r \cap e = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}.$$
Sortiere $\{s_1, \ldots, s_k\}$, so dass $u = s_1 <_e \cdots <_e s_n = v$ in Bezug auf die natürliche Ordnung $<_e$ entlang der Kante $e = uv$ gilt (mit Start bei u). Sei s ein Punkt auf uv zwischen s_i and s_{i+1}, d.h. $s_i <_e s <_e s_{i+1}$. Dann gilt $\text{cov}_r(s_i) \supseteq \text{cov}_r(s)$ und $\text{cov}_r(s_{i+1}) \supseteq \text{cov}_r(s)$.
d) (CBSLP) hat eine Optimallösung $S^* \subseteq S_r$.

Aufgabe 6. **Präsenzübung**

Betrachte den durch die Kanten in der Datei `edges.dat` gegebenen gerichteten Graphen mit den in der Datei `times.dat` gegebenen Kantenkosten. Dieser Digraph soll in elementare Pfade (ohne Knotenwiederholungen) mit einer gegebenen Maximallänge $k \leq 5$ partitioniert werden. Dabei seien die Kosten von Pfad p als $c_p := \sum_{a \in p} c_a + 100$ definiert, d.h. je länger ein Pfad, desto billiger die einzelne Kante (vgl. auch Übungsblatt 8).

a) Formuliere dieses Problem als ganzzahliges Programm.
b) Formuliere das duale reduzierte Master-LP (DRMLP).
c) Implementiere das DRMLP mit `Zimpl` und initialisiere es mit den Pfaden der Länge 1 (eine Kante). Eine zugehörige Inzidenzmatrix findet sich in der Datei `rmlp-1.dat`.
d) Formuliere das Problem, einen elementaren Pfad der Länge k mit negativen reduzierten Kosten bzgl. gegebener Knotenpreise π zu finden, als ganzzahliges Programm (k-RCSP)(π).

e) Implementiere das k-RCSP(π) mit `Zimpl`.
f) Löse die LP-Relaxierung des Pfadpartitionierungsproblems mit Hilfe eines Spaltenerzeugungsverfahrens. Enumeriere dabei alle Pfade der Länge ≤ 4 und erzeuge nur Pfade der Länge 5 dynamisch.
g) Löse das Pfadpartitionierungsproblem mit Branch-and-Price.