Facetten von Matroid-Polytopen

M. Grötschel, Bonn

Zusammenfassung: Unter Benutzung eines Basisaustauschsatzes wird ein neuer Beweis der Edmonds'schen Charakterisierung der Facetten von Matroid Polytopen gegeben.

Mit Hilfe der Theorie der Matroide ist es in den letzten Jahren gelungen, viele Einzelresultate der kombinatorischen Optimierung in einer einheitlichen Theorie darzustellen und die verschiedenen Problemen innewohnenden Gemeinsamkeiten auf elegante Art zu beschreiben und zusammenzufassen. Zu einem Überblick über die neueren Resultate der Theorie der Matroide sei auf die Bücher von Aigner [1976] und von Randow [1975] verwiesen; viele der Anwendungen der Matroidtheorie auf Probleme der kombinatorischen Optimierung finden sich in dem Buch von Lawler [1976]. Die hier benutzte Notation ist v. Randow [1975] entnommen.

Wesentlichen Anteil am erfolgreichen Einzug der Matroidtheorie in die kombinatorische Optimierung hatte J. Edmonds, der gezeigt hat, wie effizient sich matroidale Konzepte in Verbindung mit dem "polyhedral approach to combinatorics" zum Entwurf "guter" Algorithmen einsetzen lassen.

Sei E eine endliche Menge und $\mathcal{J}$ eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(E)$ von E, dann heißt $M = (E, \mathcal{J})$ ein Unabhängigkeitssystem, wenn gilt

$$J \subset I \in \mathcal{J} \Longrightarrow J \in \mathcal{J}.$$

Die Elemente von $\mathcal{J}$ heißen unabhängig, die Elemente von $\mathcal{P}(E) - \mathcal{J}$ abhängig. Für jede Menge $F \subset E$ heißen die maximalen unabhängigen Teilmengen $B \subset F$ Basen von F.

Ein Unabhängigkeitssystem $M = (E, \mathcal{J})$ heißt ein Matroid, wenn für alle Mengen $F \subset E$ gilt: Alle Basen von F haben die gleiche Kardinalität.

Damit können wir in einem Matroid $M = (E,\mathcal{J})$ für alle Teilmengen $F \subset E$ eine Rangfunktion $r: \mathcal{P}(E) \to N$ definieren durch

$$r(F) := |B| \quad , \text{ wobei } B \text{ eine Basis von } F \text{ ist.}$$

Man überlegt sich leicht, daß die Rangfunktion die folgenden Eigenschaften hat:

$$F \subset G \subset E \Longrightarrow r(F) \le r(G) \qquad \text{(Monotonie)}$$

$$F,G \subset E \Longrightarrow r(F \cup G) \le r(F) + r(G) \qquad \text{(Subadditivität)}$$

Eine Teilmenge $F \subset E$ heißt abgeschlossen, wenn gilt: $r(F \cup \{e\}) = r(F) + 1$ für alle $e \in E-F$. $F \subset E$ heißt separabel, falls es eine Partition F_1, F_2 von F gibt (d.h. $F_1 \neq \emptyset \neq F_2$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, $F_1 \cup F_2 = F$), so daß $r(F_1) + r(F_2) = r(F)$ gilt; falls solch eine Partition nicht existiert, heißt F inseparabel.

Ein Matroid heißt normal, wenn jede einelementige Menge unabhängig ist. O.B.d.A. werden wir nur normale Matroide betrachten, da einelementige Teilmengen des Ranges Null für Optimierungsprobleme ohne Bedeutung sind. Ist $M=(E,\mathcal{J})$ ein Matroid und $F \subset E$, dann ist offensichtlich $\mathcal{J}_F := \{I \subset F : I \in \mathcal{J}\}$ ein Unabhängigkeitssystem und $M_F := (F, \mathcal{J}_F)$ ein Matroid, das von M auf F induzierte Matroid.

Jedem Matroid $M=(E,\mathcal{J})$ kann man auf natürliche Weise einen Polytopen zuordnen: Ist $|E| = m$, dann ordnen wir jedem $e \in E$ eine Komponente x_e eines m-Tupels zu. Für jede Teilmenge $F \subset E$ definieren wir den Inzidenzvektor $x^F \in R^m$ durch

$$x^F_e = \begin{cases} 1 & \text{falls } e \in F \\ 0 & \text{falls } e \notin F \end{cases}$$

Die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren aller unabhängigen Teilmengen von E ist dann der Polytop

$$P_M := \operatorname{conv}\{x^I : I \in \mathcal{J}\}.$$

P_M heißt Matroid Polytop.

Bekanntlich ist jeder Polytop zum einen die konvexe Hülle seiner Ecken und zum anderen darstellbar als Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen. Es ist daher eine interessante Frage mit für die praktische Anwendung relevantem Hintergrund, wie das System von Ungleichungen, das den Matroid Polytopen definiert, aussieht. J. Edmonds konnte dieses Problem lösen und zeigte:

<u>Satz 1</u> [Edmonds, 1971]

Ist $M = (E,\mathfrak{J})$ ein normales Matroid und P_M der zugehörige Matroid Polytop, dann gilt:

$$P_M = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} : (1)\ x_e \geq 0 \quad \forall e \in E,$$
$$(2)\ \sum_{e \in F} x_e \leq r(F) \quad \forall F \subset E\}. \quad \square$$

Man kann sich leicht überlegen, daß dieses System sehr viele redundante Ungleichungen enthält; die Aufgabe, ein nicht-redundantes System von Ungleichungen zu finden, das P_M beschreibt, konnte J. Edmonds [1970] ebenfalls lösen. Ein Beweis dieses Resultats ist in der Literatur jedoch noch nicht erschienen und soll hier durchgeführt werden.

Eine Ungleichung $ax \leq a_o$ heißt <u>gültig</u> bezüglich P_M, falls $P_M \subset \{x \in \mathbb{R}^{|E|} : ax \leq a_o\}$. Eine gültige Ungleichung heißt eine <u>Facette</u> von P_M, wenn $\dim(P_M \cap \{x : ax = a_o\}) = \dim P_M - 1$ gilt. Eine gültige Ungleichung ist also genau dann eine Facette von P_M, wenn es $\dim P_M$ affin unabhängige Vektoren in P_M gibt, die die Ungleichung $ax \leq a_o$ mit Gleichheit erfüllen. Die Dimension von Matroid Polytopen läßt sich sehr einfach berechnen.

<u>Satz 2</u>

Sei $M = (E,\mathfrak{J})$ ein Matroid und k die Anzahl der abhängigen einelementigen Teilmengen von E, dann gilt

$$\dim P_M = |E| - k.$$

<u>Beweis:</u>

Da $\emptyset \in \mathfrak{J}$, ist der Nullvektor in P_M enthalten, desgleichen der Inzidenzvektor jeder unabhängigen einelementigen Teilmenge; damit enthält P_M $|E|-k+1$ offensichtlich affin unabhängige Vektoren. Kein Vektor aus P_M enthält nach Definition in den zu abhängigen einelementigen Teilmengen von E gehörenden Komponenten ein von Null verschiedenes Element. Folglich gilt:
$P_M \subset \{x \in \mathbb{R}^{|E|} : x_e = 0 \ \forall e \in E \quad \{e\}$ abhängig$\}$, das bedeutet $\dim P_M \leq |E|-k$, womit die Behauptung gezeigt ist. $\square$

Aus Satz 2 folgt, daß Matroid Polytope, die durch normale Matroide induziert werden volldimensional sind. Volldimensionale Polytope haben die schöne Eigenschaft, daß ihr minimales definierendes Restriktionensystem bis auf

Linearfaktoren eindeutig bestimmt ist. Da zu einer vollständigen linearen Beschreibung eines Polytopen die Kenntnis aller seiner Facetten ausreicht, genügt es also zu untersuchen, welche der Ungleichungen (1), (2), die P_M definieren, Facetten von P_M sind.

<u>Satz 3</u>

Sei $M = (E,\mathfrak{J})$ ein normales Matroid, dann ist die Ungleichung

$$x_e \geq 0$$

für alle $e \in E$ eine Facette von P_M.

<u>Beweis:</u>

Ist $P_e := P_M \cap \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid x_e = 0\}$, dann gilt: $0 \in P_e$ und $x^{\{f\}} \in P_e \ \forall f \in E - \{e\}$. Diese $|E|$ Vektoren sind offensichtlich affin unabhängig und erfüllen $x_e \geq 0$ mit Gleichheit. $\square$

Für die Ungleichungen des Typs (2) ist der Nachweis der Facettialeigenschaft etwas schwieriger. Wir benötigen dazu einen Basisaustauschsatz für Matroide.

<u>Satz 4</u>

Sei $M = (E,\mathfrak{J})$ ein Matroid, und seien B, B' Basen von E. Dann gibt es zu jeder Teilmenge $S \subset B$ eine Teilmenge $S' \subset B'$, so daß $(B-S) \cup S'$ und $(B' - S') \cup S$ Basen von E sind. $\square$

Einen Beweis dieser Tatsache kann man z. B. bei Woodall [1974] nachlesen.

<u>Satz 5</u>

Sei $M = (E,\mathfrak{J})$ ein normales Matroid, dann gilt

(*) $\sum_{e \in E} x_e \leq r(E)$ ist eine Facette von P_M genau dann, wenn E inseparabel ist.

<u>Beweis:</u>

a) Ist E separabel, dann gibt es eine Partition E_1, E_2 von E mit $r(E) = r(E_1) + r(E_2)$, folglich gilt $\sum_E x = \sum_{E_1} x + \sum_{E_2} x \leq r(E_1) + r(E_2) = r(E)$. Als Summe von gültigen Ungleichungen kann (*) natürlich keine Facette sein.

b) Angenommen $(*)$ ist keine Facette. Wenn wir zeigen können, daß dann E separabel sein muß, haben wir den Beweis erledigt.

Alle Inzidenzvektoren von Basen von E erfüllen $(*)$ mit Gleichheit. Wir fassen diese zu einer Matrix A zusammen, so daß jede Zeile von A ein Inzidenzvektor einer Basis von E ist. Ist $(*)$ keine Facette von P_M, dann gibt es keine $\dim P_M$ affin bzw. linear unabhängigen Vektoren aus P_M, die $(*)$ mit Gleichheit erfüllen. Folglich muß der Rang von A kleiner als $|E|$ sein, d.h. es existiert ein Vektor $b \in \mathbb{R}^{|E|} - \{0\}$ mit

$$Ab = 0.$$

Sei
$$E_1 := \{e \in E \ : \ b_e < 0\},$$
$$E_2 := \{e \in E \ : \ b_e \geq 0\}.$$

Da $a_{ij} \in \{0,1\}$, gilt $E_1 \neq \emptyset$, $E_2 \neq \emptyset$, und es ist $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $E_1 \cup E_2 = E$, d.h. E_1, E_2 ist eine Partition von E.

Sei S_i eine beliebige Basis von E_i, $i = 1,2$. Wir ergänzen die unabhängigen Mengen S_i zu Basen $B_i = S_i \cup T_i$ von E, $i=1,2$, was ohne Schwierigkeiten möglich ist.

Nach Satz 4 gibt es zu $T_2 \subset B_2$ eine Teilmenge $T'' \subset B_1$, so daß $I := (B_2 - T_2) \cup T'' = S_2 \cup T''$ eine Basis von E ist. Es gilt daher $r(E_2) = |S_2| = r(E_2 \cap S_2) \leq r(E_2 \cap (S_2 \cup T'')) \leq r(E_2)$.

Da T'' eine unabhängige Teilmenge ist, folgt daraus $T'' \cap E_2 = \emptyset$ und somit $T'' \subset S_1$. Die Inzidenzvektoren x^{B_2}, x^I sind Zeilen der Matrix A, daher gilt

$$\sum_{e \in S_2} b_e + \sum_{e \in T_2} b_e = x^{B_2} b = 0 = x^I b = \sum_{e \in S_2} b_e + \sum_{e \in T''} b_e$$

und damit
$$\sum_{e \in T_2} b_e = \sum_{e \in T''} b_e .$$

Satz 4 impliziert mit den obigen Argumenten, daß zu $T_1 \subset B_1$ eine Teilmenge $T' \subset S_2$ existiert, so daß $\sum_{e \in T_1} b_e = \sum_{e \in T'} b_e$ gilt. Daraus ergibt sich:

$$\sum_{e \in T_2} b_e = -\sum_{e \in S_2} b_e \leq -\sum_{e \in T'} b_e = -\sum_{e \in T_1} b_e = \sum_{e \in S_1} b_e \leq \sum_{e \in T''} b_e = \sum_{e \in T_2} b_e,$$

das heißt $\sum_{e \in S_1} b_e = \sum_{e \in T''} b_e$. Da $b_e < 0 \ \forall e \in E_1$ und $T'' \subset S_1 \subset E_1$, folgt aus dieser Beziehung $T'' = S_1$. Daher gilt $I = S_1 \cup S_2$ und $r(E) = |I| = |S_1| + |S_2| = r(E_1) + r(E_2)$. Also ist E separabel. Widerspruch! □

Mit Hilfe von Satz 5 können wir nun alle Facetten von P_M bestimmen.

<u>Satz 6</u>

Sei $M = (E, \mathfrak{I})$ ein normales Matroid und $\emptyset \neq F \subset E$, dann gilt

$(*)$ $\sum_{e \in F} x_e \leq r(F)$ ist genau dann eine Facette von P_M, wenn F abgeschlossen und inseparabel ist.

<u>Beweis:</u>

a) Ist F nicht abgeschlossen, dann existiert $f \in E-F$ mit $r(F) = r(F \cup \{f\})$, das heißt $\sum_{e \in F} x_e \leq \sum_{e \in F} x_e + x_f \leq r(F)$, also kann $(*)$ keine Facette sein.

Mit dem gleichen Argument wie in Beweisteil a) von Satz 4 folgt, daß $(*)$ keine Facette ist, wenn F separabel ist.

b) Ist F inseparabel, dann ist nach Satz 5 $\sum_{e \in F} x_e \leq r(F)$ eine Facette des Matroid Polytopen P_{M_F}, wobei M_F das von M auf F induzierte Matroid ist. Es gibt somit $\dim P_{M_F} = |F|$ Basen von F, deren Inzidenzvektoren affin (in diesem Falle sogar linear) unabhängig sind und $(*)$ mit Gleichheit erfüllen. Da F abgeschlossen ist, gilt nach Definition für jedes $e \in E-F$: $r(F \cup \{e\}) = r(F)+1$. Also gibt es zu jedem $e \in E-F$ eine Basis B von F, so daß $I_e := B \cup \{e\}$ unabhängig ist. Der Inzidenzvektor x^{I_e} erfüllt nach Definition $(*)$ mit Gleichheit. Auf diese Weise erhalten wir insgesamt $|F|+|E-F|$ Element von $\mathfrak{I}$, deren Inzidenzvektoren $(*)$ mit Gleichheit erfüllen. Fassen wir diese Inzidenzvektoren (Zeilenvektoren) zu einer Matrix zusammen, so hat diese bei geeigneter Anordnung die folgende Form

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ M & I \end{pmatrix} ,$$

wobei A die Matrix der Inzidenzvektoren der Basen von F, also regulär ist und I die $|E-F| \times |E-F|$ Einheitsmatrix ist. Mithin ist die gesamte Matrix regulär, d.h. es gibt $|E|$ Elemente von , deren Inzidenzvektoren linear unabhängig sind und (✱) mit Gleichheit erfüllen, also ist (✱) eine Facette von P_M. ▯

Aus den Sätzen 1,3 und 6 folgt

Satz 7 [Edmonds, 1970]

Sei $M = (E, \mathfrak{I})$ ein normales Matroid, P_M der zugehörige Matroid Polytop, dann ist eine vollständige und nicht-redundante lineare Charakterisierung von P_M gegeben durch

$$(1) \quad x_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

$$(2) \quad \sum_{e \in F} x \leq r(F) \qquad \forall F \subset E,\ F \neq \emptyset \text{ mit } F \text{ abgeschlossen und inseparabel.}$$ ▯

Zahlreiche in der kombinatorischen Optimierung auftretende Matroid Polytope lassen sich mit Hilfe dieser Charakterisierung einfach beschreiben, siehe etwa [Giles, 1975], [Grötschel, 1977]; desgleichen erlaubt diese vollständige und nicht redundante lineare Beschreibung von Matroid Polytopen die Untersuchung gewisser "Verwandtschaftsbeziehungen" zwischen einfachen (d.h. matroidalen) und wesentlich komplizierteren (z. B. NP-vollständigen) kombinatorischen Optimierungsproblemen (siehe [Grötschel, 1977]).

Literatur:

M. Aigner [1976]: Kombinatorik, II. Matroide und Transversaltheorie. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1976

J. Edmonds [1970]: Submodular Functions, Matroids, and Certain Polyhedra. in: Guy, Hanani, Sauer, Schonheim (eds.): Combinatorial Structures and their Applications, 69-87, Gordon and Breach, New York, 1970

J. Edmonds [1971]: Matroids and the Greedy Algorithm. Mathematical Programming 1, 127-136 (1971)

R. Giles [1975]: Submodular Functions, Graphs and Integer Polyhedra. Dissertation, University of Waterloo, Waterloo, Canada, 1975

M. Grötschel [1977]: Polyedrische Charakterisierungen kombinatorischer Optimierungsprobleme. Dissertation, Universität Bonn, 1977

E. Lawler [1976]: Combinatorial Optimization: Networks and Matroids. Holt, Rinehart, Winston, New York, 1976

R. v. Randow [1975]: Introduction to the Theory of Matroids. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1975

D.R. Woodall [1974]: An Exchange Theorem for Bases of Matroids. Journal of Combinatorial Theory (B) 16, 227 - 228 (1974)

Anschrift:
Universität Bonn
Institut für Ökonometrie und Operations Research
Nassestr. 2
D–5300 Bonn 1