Kombinatorische Optimierung

Priv.-Doz. Dr. Martin Grötschel, Institut für Ökonometrie und Operations Research

Bis zur Mitte dieses Jahrhunderts war die angewandte Mathematik hauptsächlich an der Physik und an den Ingenieurwissenschaften orientiert. Ziel der Untersuchung praktischer Probleme war meistens die Entwicklung von „geschlossenen Ausdrücken" bzw. von Formeln, die rechentechnisch gut ausgewertet werden können. Mit der Erfindung schneller Rechenanlagen zu Beginn der fünfziger Jahre begann für die anwendungsorientierte Mathematik ein neues Zeitalter. Nunmehr wurde es möglich, Anwendungsprobleme mit Hilfe von iterativen Verfahren (Algorithmen) zu lösen, die für schriftliche oder gar Kopfrechnung weitaus zu komplex und aufwendig sind.

Aufgrund dieser technologischen Entwicklung und der dadurch hervorgerufenen konzeptionellen Umorientierung konnten der Mathematik neue Anwendungsbereiche erschlossen werden. Für Probleme, die mit Hilfe der früher benutzten Mathematik (hauptsächlich Analysis) nicht adäquat behandelt werden konnten, wurden neue computerorientierte Modelle und Theorien entwickelt. Es wurde versucht, Formulierungen zu finden, die die Behandlung der Probleme auf Rechenanlagen vereinfachen.

Die ersten neuen Anwendungen kamen hauptsächlich aus dem Bereich der Wirtschaftswissenschaften, z.B. lineare Programmierung, Reihenfolgeprobleme. Es entstanden neue Disziplinen wie das Operations Research, das Methoden und Verfahren entwickelte, die heute erfolgreich angewendet werden in Bereichen wie Archäologie, Betriebs- und Volkswirtschaft, Biologie, Chemie, Ingenieurwissenschaften, Linguistik, Raumplanung, Physik, Sozialwissenschaft etc.

Ein großer Teil der neuen Anwendungsprobleme ist diskreter bzw. kombinatorischer Struktur. Die Untersuchung solcher Problemtypen bildet den Forschungsschwerpunkt der Projektgruppe „Methoden und Verfahren für Optimierungsmodelle" des Sonderforschungsbereiches 21 am Institut für Ökonometrie und Operations Research.

Um einen Einblick in die Vielfalt und den Anwendungsreichtum der in der kombinatorischen Optimierung betrachteten Probleme zu geben, sollen zunächst einige typische Beispiele aufgeführt werden.

1) Gegeben sei eine Platte, auf der an gewissen fest vorgeschriebenen Punkten Lötstellen angebracht (oder Löcher gebohrt) werden sollen. Das Löten wird von einer numerisch gesteuerten Maschine vorgenommen, die an einer Ecke der Platte startet; die dann von einem Punkt zum nächsten wandert, bis alle Lötstellen angebracht sind, und dann an einer anderen Ecke der Platte aufhört. Anschließend wird die nächste Platte in Angriff genommen. Das Optimierungsziel ist, die Gesamtbearbeitungsdauer einer Platte so kurz wie möglich zu machen. Dies bedeutet, daß für die Lötmaschine ein Weg gefunden werden muß, der zu allen Lötstellen führt, und so kurz wie möglich ist.

In Abbildung 1 ist die Lösung eines Problems dieser Art dargestellt. Hier handelt es sich um eine Platte für elektronische Bauteile, in die mit einem Laserbohrer 318 Löcher gebohrt werden sollen. Dieses Beispiel ist das größte bisher exakt gelöste seiner Art. Die Darstellung ist entnommen: H. CROWDER, M. W. PADBERG: Solving large-scale symmetric travelling salesman problems to optimality. In: Management Science 26, (1980), 495-509.

2) An einer bestimmten Stelle einer Stadt bricht ein Feuer aus. Von welchem Feuerwehrdepot sollen Löschzüge zur Brandstelle geschickt werden, und welches ist die zeitlich kürzeste Verbindung von diesem Depot zur Brandstelle?

3) Sämtliche Telefonzellen einer Stadt werden von der Post regelmäßig, z.B. wöchentlich, gewartet. Die Wartungstechniker erhalten täglich eine Tour zugewiesen, die sie zu bestimmten Telefonzellen führt. Wie müssen die Touren gestaltet werden, so daß jede Telefonzelle pro Woche einmal inspiziert und die Gesamtzahl der benötigten Arbeitsstunden minimiert wird? Dieses Problem taucht analog bei jeder Art von regelmäßigen Wartungs- und Reparaturaufgaben auf, z.B. Wartung von Verkehrsampeln, Kontrolle von metereologischen Meßgeräten, Überprüfung von wichtigen Komponenten eines Kraftwerks, Kontrolle von Sicherheitseinrichtungen in einem Bergwerk.

4) In einem Walzwerk werden Blechplatten in gewissen Standardgrößen gewalzt. Die von Kunden bestellten Bleche haben i.a. wesentlich kleinere Formate und müssen durch Zerschneiden der

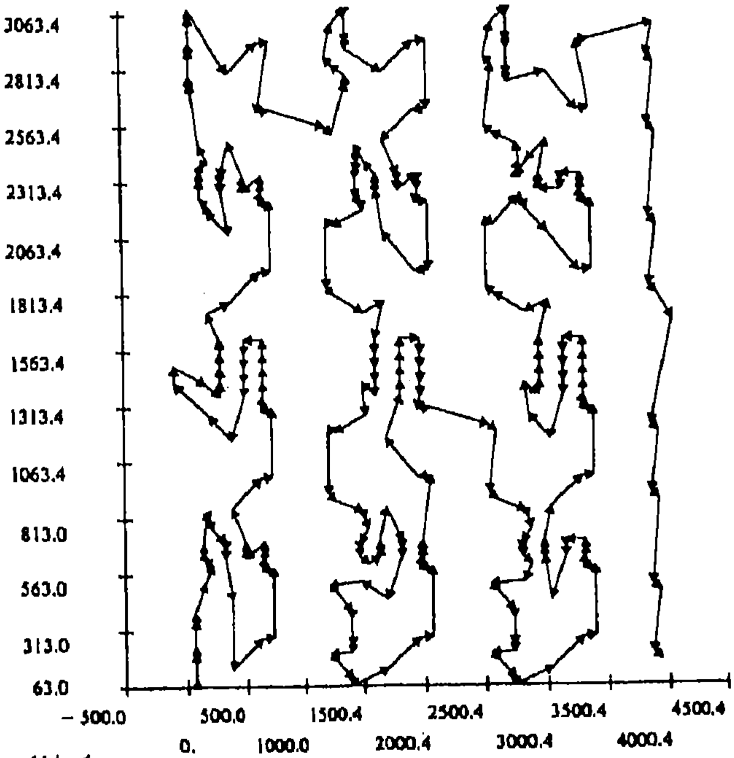

Abb. 1

gewalzten Platten hergestellt werden. Dabei sollen die bestellten Bleche so angeordnet werden, daß der Verlust beim Zerschneiden der Standardplatten möglichst gering ist.

5) Zwischen vorgegebenen Orten (Häusern etc.) soll ein Telefonnetz (oder Strom-, Fernwärme-, Gasleitungsnetz etc.) errichtet werden. Die Kosten zur Verlegung eines Kabels zwischen je zwei Orten seien bekannt. Gesucht wird ein Kabelnetz, das so ausgelegt ist, daß jeder Ort von jedem anderen erreichbar ist oder daß bei Ausfall einer (oder zwei oder drei...) Kabelverbindung immer noch jeder Ort jeden anderen erreichen kann und daß die Gesamtkosten zur Errichtung des Netzes minimal sind.

6) In einem archäologisch interessanten Gräberfeld soll festgelegt werden, in welcher chronologischen Reihenfolge die Gräber angelegt worden sind. Eine Möglichkeit, diese Reihenfolge annähernd zu bestimmen, ist die folgende. Die Töpferwaren der Gräber eines Gräberfeldes werden von Archäologen nach Stil, Farben, Materialzusammensetzung etc. klassifiziert. Um einen Überblick über die Gräberinhalte zu erhalten, kann man folgende Matrix $M = (m_{ij})$ aufstellen. Jedem Grab wird eine Zeile, jeder Keramikart eine Spalte zugeordnet. Das Element m_{ij} wird mit einer Eins belegt, falls das Grab i den Keramiktyp j enthält, sonst wird m_{ij} Null gesetzt. Nimmt man an, daß jedes Grab alle Keramiktypen enthält, die zum Zeitpunkt der Grablegung Mode waren, so ist es möglich, die Zeilen von M so umzuordnen, daß jede Spalte folgendes Aussehen hat. Die ersten Elemente einer jeden Spalte sind Nullen, dann folgen lauter Einsen, dann wiederum nur Nullen. Natürlich ist die obige Annahme in der Praxis nicht erfüllt. Man will daher eine Umordnung der Zeilen finden, die dieser Anordnung möglichst nahe kommt. Genauer, wir nennen ein Element $m_{ij} = 0$ eine Zwischennull, wenn es ein $r < i$ und ein $s > i$ gibt mit $m_{rj} = 1$ und $m_{sj} = 1$. Gesucht ist eine Umordnung der Zeilen von M, so daß die Anzahl der Zwischennullen möglichst klein ist. Eine solche Anordnung der Zeilen gibt i.a. eine sehr gute Annäherung an die wahre Reihenfolge der Gräber (geordnet nach dem Zeitpunkt der Grablegung). Analog kann man natürlich verfahren, wenn man die zeitlichen Überlappungen und die relative Besiedlungsreihenfolge verschiedener Fundstellen herausfinden möchte. Die folgenden Abbildungen sind K. GOLDMANN: Some archaeological criteria for chronological seriation. In: F. R. Hodson et al. (Eds): Mathematics in the archaeological and historical sciences. Edinburgh University Press 1971, 202-208 entnommen. Hier wird ein Vergleich verschiedener Fundstellen vorgenommen. Abbildung 2 stellt die Matrix M (dicke Punkte entsprechen Einsen) vor der Umordnung der Zeilen dar, Abbildung 3 gibt dieselbe Matrix nach der Zeilenumordnung wieder. Zusätzlich sind hier noch die Spalten von M umgeordnet worden, um die Diagonalgestalt hervorzuheben.

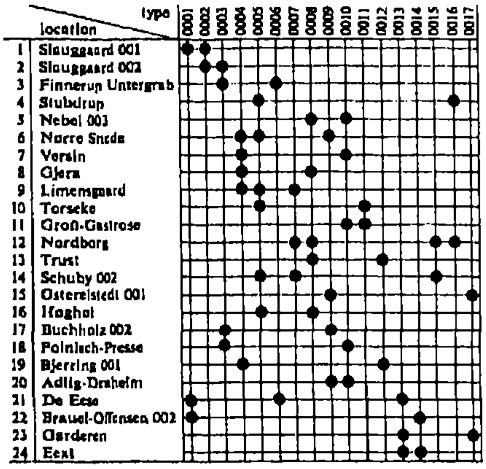

Abb. 2

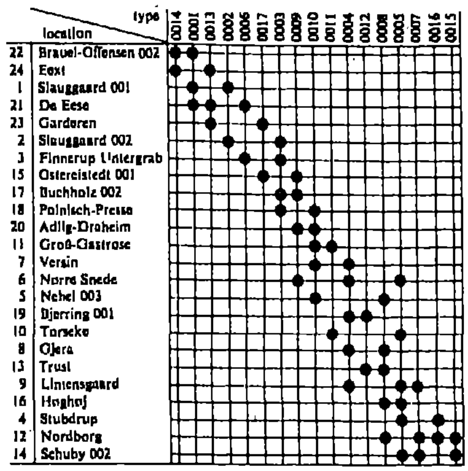

Abb. 3

7) In der Input-Output-Rechnung wird die Wirtschaft eines Landes in n Sektoren gegliedert. Die Lieferungen x_{ij} des Sektors i an den Sektor j während eines Jahres werden in einer Input-Output-Matrix $X = (x_{ij})$ zusammenfassen. Ein vieldiskutiertes Maß zur Messung des Vermaschungsgrades der Wirtschaft eines Landes, das häufig auch zum Vergleich der Ökonomien verschiedener Länder benutzt wird, ist der Linearitätsgrad, mit dem gleichzeitig eine lineare Ordnung der Sektoren definiert ist. Diese lineare Ordnung gibt - etwas salopp gesagt - die Reihenfolge der Wichtigkeit eines Sektors für die Aufrechterhaltung der gesamtwirtschaftlichen Produktion an. Mathematisch ausgedrückt wird eine simultane Permutation der Zeilen und Spalten von X gesucht, so daß der Quotient aus der Summe der Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen und der Summe aller Elemente von X, die nicht auf der Hauptdiagonalen stehen, so groß wie möglich ist.

8) In einem Wirtschaftprüfungsunternehmen ist eine Menge von Prüfungsaufträgen mit jeweils vertraglich vereinbartem frühestem Anfangs- und spätestem Endtermin während eines Planungszeitraumes gegeben. Jeder der Prüfungsaufträge zerfällt in eine Menge von Prüfungsfeldern, die aufgrund prüfungsrechtlicher und -technischer Interdependenzen in einer bestimmten Reihenfolge abgearbeitet werden müssen. Zur Bearbeitung der Prüfungsfelder stehen Prüfer, d.h. Einzelprüfer oder Prüfungteams, zur Verführung. Für jeden Prüfer sind Ausführungszeiten und Ausführungskosten für diejenigen Prüffelder bekannt, denen der Prüfer zugeordnet werden kann. Für jeden Prüfer darf dabei eine vorgegebene maximale Gesamtarbeitszeit nicht überschritten werden. Die Zuordnung von Prüfern hat so zu erfolgen, daß früheste Beginn- und späteste Endtermine der Prüfungsaufträge eingehalten und die zeitabhängigen Prüfungskosten aller Aufträge minimiert werden.

9) In der Elektroindustrie werden Schalttafeln etc. häufig gedruckt, oder Verbindungen werden durch Eintauchen in eine Ätzflüssigkeit hergestellt. Damit die Herstellung in einem Arbeitsgang erfolgen kann, ist es notwendig, daß der Schaltplan so dargestellt wird, daß sich keine zwei leitenden Verbindungen kreuzen (kreuzende Verbindungen müssen voneinander isoliert werden). Eine solche Darstellung nennt man planar. Gegeben sei ein Schaltplan, ist der Plan planar darstellbar? Falls nicht, welches ist die minimale Anzahl von Verbindungen, die entfernt werden müssen, damit der daraus resultierende Schaltplan planar darstellbar ist?

10) Ein Postbote (Zeitungsbote etc.) muß verschiedene Straßenzüge mit Post beliefern. Wie soll er seinen Weg einrichten, so daß die zurückgelegte Gesamtstrecke von der Post und zurück möglichst kurz ist. Der gleiche Problemtyp tritt auf, wenn gewisse Strecken oder Flächen zu „überdecken" sind, etwa bei der Versprühung von Düngemitteln auf Feldern oder bei der Festlegung von Kontrollgängen für zu bewachende Anlagen, bei der Einsatzplanung von Straßenreinigungs- oder Schneeräumfahrzeugen und bei der Tourenplanung der Müllabfuhr.

11) In einer Region (Stadt, Kreis, Land) sollen neue Versorgungseinrichtungen (Schulen, Krankenhäuser, Polizeistationen) errichtet werden. Wieviele dieser Einrichtungen sollen gebaut werden, damit jeder Bürger höchstens eine fest vorgegebene Distanz von einer dieser Einrichtungen entfernt wohnt und die Gesamtbaukosten minimal sind?

Die im vorhergehenden aufgeführten Beispiele lassen sich einfach z.B. in der Sprache der Graphentheorie formulieren. Für verschiedene Problemtypen, die häufig allgemeiner sind als die obigen Beispiele, haben sich inzwischen (meist englischsprachige) Standardnamen eingebürgert. So ist Beispiel 1) ein Spezialfall des symmetrischen Travelling-Salesman-Problem, Beispiel 2) ein Kürzeste-Wege-Problem, Beispiel 3) ein m-Salesman-Problems, Beispiel 4) ein zweidimensionales Verschnittproblem, Beispiel 5) ein Spanning-Tree- bzw. Zusammenhangsproblem, Beispiel 6) heißt Serialtionsproblem, Beispiel 7) wird als Triangulationsproblem von Input-Output-Matrizen bezeichnet, ist aber auch ein Spezialfall des azyklischen Subgraph-Problems, Beispiel 8) läßt sich als Set-Partitioning-Problem oder stabile-Mengen-Problem formulieren, Beispiel 9) heißt Planaritätsproblem, Beispiel 10) ist ein Sonderfall des Chinese-Postman-Problems, und Beispiel 11) ist ein spezielles Lokations- oder Standortproblem.

Die meisten kombinatorischen Optimierungsprobleme, z.B. alle oben aufgeführten, lassen sich mathematisch wie folgt formulieren. Gegeben ist eine endliche Menge E und eine Menge I von Teilmengen von E . Jedes Element von I heißt zulässige Lösung oder zulässige Menge. Gegeben ist ferner für jedes Elememt $e \in E$ eine Zahl c_e, genannt Kosten (oder Gewicht, Länge, Entfernung etc.). Für jede zulässige Menge $I \in I$ sind die Kosten c(I) definiert durch

$$c(I) := \sum_{e \in E} c_e.$$

Gesucht ist eine zulässige Menge I^*, so daß $c(I^*)$ minimal (oder maximal) ist. Formal schreibt man dafür

$$\min \{c(I) \mid I \in I\}$$

Alle kombinatorischen Optimierungsprobleme haben eine endliche Lösungsmenge. Ein naiver Ansatz wäre daher, die Kosten aller möglichen Lösungen zu berechnen und die kostengünstigste Lösung zu wählen. Es zeigt sich jedoch, daß i.a. die Anzahl der Lösungen kombinatorischer Optimierungsprobleme ungeheuer groß ist und eine vollständige Enumeration aller Lösungen selbst bei den schnellsten denkbaren Rechnern Milliarden von Jahren (oder mehr) in Anspruch nehmen würde. Beispielsweise gibt es $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ mögliche Wege der Lötmaschine in Beispiel 1) bei n Lötstellen. Auf den schnellsten zur Zeit existierenden Computern würde die vollständige Enumeration aller Lösungen bei nur 30 Lötstellen etwa 10^{20} Jahre dauern. Bedenkt man, daß in der Praxis Probleme mit bis zu 5000 Lötstellen auftreten, so sieht man, daß diese naive Strategie völlig unbrauchbar ist. Bei der Untersuchung spezieller kombinatorischer Optimierungsprobleme hat sich jedoch gezeigt, daß die Anzahl der Lösungen so gut wie irrelevant ist. Viel wichtiger sind spezielle Struktureigenschaften, die effiziente Lösungsalgorithmen möglich machen.

So konnten z.B. für Probleme des Typs 2), 5), 10) Verfahren entworfen werden, die praktische Aufgabenstellungen dieser Art in so gut wie jeder beliebigen Größenordnung lösen können. Für die übrigen oben dargestellten Problemtypen kann man i.a. nur Aufgaben bescheidener Größenordnungen exakt lösen. Die bisher für diese Probleme entwickelten Algorithmen sind zwar erheblich besser als die vollständige Enumeration, jedoch können diese Algorithmen bei einzelnen Beispielen eine Laufzeit haben, die exponentiell in der Problemgröße (das ist z.B. die Anzahl der Lötstellen in 1) oder die Anzahl der Sektoren in 8)) ist. Dies würde auf einem Computer schon bei relativ kleinen Problemen zum Abbruch des Verfahrens durch Zeitüberschreitung führen.

Dieses unterschiedliche Verhalten durchaus ähnlicher kombinatorischer Optimierungsprobleme wurde zunächst empirisch beobachtet. Inzwischen gibt es dafür recht gute theoretische Begründungen. Höchstwahrscheinlich zerfällt die Menge aller kombinatorischen Optimierungsprobleme im wesentlichen in zwei Klassen, sagen wir die „einfachen" und die „schwierigen" Probleme. Einfache Probleme sind für jede in der Praxis vorkommende Größenordnung in kurzer Zeit lösbar. Große schwierige Probleme wird man dagegen wohl nur selten in vernünftiger Zeit exakt lösen können.

Mit der Untersuchung von „Schwierigkeitsklassen" kombinatorischer Optimierungsprobleme (und anderer Probleme) befaßt sich die Komplexitätstheorie. Die in ihrem Sinne einfachen Probleme sind die P-Probleme (mit einem polynomialen Algorithmus lösbare Probleme), während die schwierigen Probleme die sogenannten NP-vollständigen Probleme sind. Wir verzichten auf eine exakte Definition, da diese die Einführung einer Reihe technischer Konzepte notwendig macht.

Ein wichtiger Forschungsgegenstand der letzten Jahre bestand darin, die Probleme der kombinatorischen Optimierung nach den Kriterien „einfach" und „schwierig" zu klassifizieren. Für die meisten der Probleme ist die Frage inzwischen entschieden, und es hat sich herausgestellt, daß ein großer Teil der praxisrelevanten Fragestellung zur Klasse der schwierigen Probleme gehört.

Einige der erzielten Resultate sind intuitiv nicht unmittelbar einleuchtend; zumindest ist nicht jedem sofort klar, warum ein Problem einfach und eine geringfügige Variante des Problems schwierig ist. Beispielsweise ist Problem 1) schwierig, während das relativ ähnliche Problem 10) einfach ist. In Beispiel 9) ist es einfach festzustellen, ob ein Schaltplan planar ist, es ist jedoch schwierig, die minimale Zahl der Verbindungen zu finden, die entfernt werden müssen, damit der Schaltplan planar ist. In Beispiel 6) ist es einfach festzustellen, ob eine Matrix M so umgeordnet werden kann, daß es keine Zwischennull gibt, dagegen ist es schwierig, die minimale Anzahl der Zwischennullen zu bestimmen.

Gegenwärtig konzentriert sich die Forschung hauptsächlich auf folgende Aspekte (ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir ein kombinatorisches Maximierungsproblem, das wir mit P bezeichnen):

a) Entwurf effizienter heuristischer Verfahren für P (d.h. von Verfahren, die auf Rechnern schnell arbeiten, aber nicht notwendig eine Optimallösung liefern), die gewisse Gütegarantien haben (d.h. gute untere Schranken für den Wert der Optimallösung liefern).

b) Konstruktion geeigneter Relaxierungen von P, die es erlauben, gute obere Schranken für den Wert der Optimallösung von P zu berechnen.

c) Entwicklung polynomialer Algorithmen für Spezialfälle schwieriger Probleme.

d) Entwicklung von Algorithmen für schwierige Probleme, die zwar theoretisch nicht effizient sind, aber Probleme aus der Praxis i.a. in annehmbarer Zeit lösen.

Anhand einiger Ergebnisse, die von Mitarbeitern des Instituts für Ökonometrie und Operations Research in letzter Zeit erzielt worden sind, soll das Vorgehen bei der Behandlung der Aufgaben a),....,d) kurz erläutert werden. Wir können hier nur auf einige wenige Resultate eingehen, die mit geringem mathematisch-technischen Aufwand darstellbar sind. Umfangreichere Übersichten finden sich in den Jahresberichten der Abteilung Operations Research des Instituts für Ökonometrie und Operations Research. Diese sind als Working Paper vom Institut erhältlich.

Zu a): Analyse und Entwurf heuristischer Verfahren

Sei E eine endliche Menge, und sei $\mathcal{I}$ eine Menge von Teilmengen von E, die folgende Eigenschaften hat:

$$(I.1)\ \emptyset \in \mathcal{I}$$
$$(I.2)\ I \subseteq J \in \mathcal{I} \Rightarrow I \in \mathcal{I}.$$

$\mathcal{I}$ heißt ein Unabhängigkeitssystem auf E, und jedes Element von $\mathcal{I}$ heißt unabhängig. Ist $c_e \in \mathbb{R}$ für alle $e \in E$ ein Gewicht und

$$c(I) := \sum_{e \in I} c_e,$$

dann heißt

$$\max \{c(I) \mid I \in \mathcal{I}\}$$

ein Optimierungsproblem über einem Unabhängigkeitssystem. Es ist sehr einfach, alle Beispiele 1), ...,11) als Optimierungsprobleme über einem Unabhängigkeitssystem zu formulieren. Das heißt Probleme des obrigen Typs sind relativ allgemeiner Natur und natürlich im Sinne der Komplexitätstheorie schwer.

Eine wichtige Klasse von Unabhängigkeitssystemen bilden die Matroide. Sei $\mathcal{I}$ ein Unabhängigkeitssystem auf E und $F \subseteq E$. Eine unabhängige Menge $B \in \mathcal{I}$ mit $B \subseteq F$ heißt Basis von F, wenn es keine unabhängige Menge $B' \subseteq F$ gibt, die B echt enthält. Wir setzen für $F \subseteq E$

$$r^*(F) := \max \{|B| : B \text{ Basis von } F\},$$

$$r_*(F) := \min \{|B| : B \text{ Basis von } F\}.$$

Ein Unabhängigkeitssystem $\mathcal{I}$ auf E heißt Matroid, wenn zusätzlich gilt

$$(I.3)\ r^*(F) = r_*(F) \text{ für alle } F \subseteq E.$$

Von Edmonds, Rado und Welsh wurde gezeigt, daß Optimierungsprobleme der Form $\max\{c(I) \mid I \in \mathcal{I}\}$ für Matroide $\mathcal{I}$ wie folgt mit einem sehr einfachen Verfahren, dem sogenannten Greedy-Algorithmus, gelöst werden können.

(G.1) Ordne die Gewichte c_e, $e \in E$, so daß gilt
$c_{e_1} \geq c_{e_2} \geq \ldots c_{e_k} > 0 \geq c_{e_{k+1}} \geq \ldots c_{e_n}$.
(G.2) Setze F: $= \emptyset$ und I: $= 1$.
(G.3) Ist I $= k+1$, STOP.
(G.4) Ist $F \cup \{e_i\}$ unabhängig, dann setze $F := F \cup \{e_i\}$.
(G.5) Setze I $:= I+1$ und gehe zu (G.3).

Das heißt, nach der Sortierung der Elemente nach der Größe ihrer Gewichte nimmt man jeweils das größte noch verbleibende positive Element, schaut nach, ob dieses zur bereits vorhandenen Menge F hinzugefügt werden kann, ohne die Unabhängigkeit zu verletzen. Ist dies der Fall, fügt man dieses Element zu F hinzu, andernfalls wirft man das Element für immer weg.

Offensichtlich kann man den Greedy-Algorithmus auch auf Optimierungsprobleme über Unabhängigkeitssystemen anwenden; in der Tat ist diese Methode (oder eine ihrer Varianten) eine der in der Praxis am häufigsten verwendeten Heuristiken. Es ist sehr einfach, für jedes Unabhängigkeitssystem, das kein Matroid ist, Beispiele anzugeben, wo der Greedy-Algorithmus nicht die Optimallösung liefert. Gelegentlich können diese Lösungen sogar erheblich von der Optimallösung abweichen.

In den Aufsätzen B. KORTE, D. HAUSMANN: An analysis of the greedy heuristic for independent systems. In: Annals of Discrete Mathematics, 2 (1978), 65-74. und D. HAUSMANN, T. A. JENKYNS, B. KORTE: Worst-case type analysis of greedy type algorithms for independence systems. In: Mathematical Programming Study, 12 (1980), 61-77 konnte das Verhalten des Greedy-Algorithmus und vieler seiner Varianten bezüglich Unabhängigkeitssystemen vollständig geklärt werden. Ist c_{opt} der Optimalwert von $\max\{c(I) \mid I \in \mathcal{I}\}$ und c_g der Wert der vom Greedy-Algorithmus gelieferten Lösung, so gilt

$$\frac{c_g}{c_{opt}} \geq \min_{F \subseteq E} \frac{r_*(F)}{r^*(F)}$$

Da $c_g \leq c_{opt}$ gilt, zeigt dieses Resultat als Spezialfall, daß aufgrund von (I. 3) bei Matroid-Problemen die Greedy-Lösung eine Optimallösung ist.

Ferner konnte in den o.g. Aufsätzen gezeigt werden, daß die angegebene Schranke scharf ist und daß es keinen polynomialen Approximationsalgorithmus für Unabhängigkeitssysteme gibt, der eine gleichmäßig bessere Gütegarantie liefert als der Greedy-Algorithmus. Diese sehr allgemeinen Resultate wurden auf verschiedene spezielle kombinatorische Optimierungsprobleme angewendet. So konnten Gütegarantien für das Matching-Problem, das symmetrische und asymmetrische Travelling-Salesman-Problem, das stabile-Mengen-Problem, das azyklische-Subgraph-Problem etc. gefunden werden. Durch diese Arbeiten wird einerseits eine nachträgliche theoretische Rechtfertigung von vielen in der Praxis verwendeten Heuristiken gegeben, andererseits wird gezeigt, daß es sinnvoll ist, mit Varianten der Greedy-Technik bei der Lösung praktischer Probleme intensiv zu experimentieren.

Wie das Beispiel des Greedy-Algorithmus zeigt, können für viele Problemtypen polynomiale (also in der Praxis effiziente) Heuristiken konstruiert werden, die eine gewisse Gütegarantie besitzen. Es stellt sich daher sofort die Frage, ob es nicht möglich ist, den Optimalwert eines kombinatorischen Optimierungsproblems mit Hilfe von polynomialen Algorithmen beliebig genau zu approximieren. Dies ist in der Tat gelegentlich möglich, zum Beispiel beim sogenannten Knapsackproblem und bei einigen Reihenfolgeproblemen.

In B. KORTE, R. SCHRADER: On the existence of fast approximation schemes. In: O. L. MANGASARIAN, R. R. MEYER, S. M. ROBINSON (Eds): Nonlinear Programming 4, Academic Press, New York 1981, 415-437 werden alle Klassen kombinatorischer Optimierungsprobleme, für die dies der Fall ist, vollständig charakterisiert. Es stellt sich heraus, daß die beliebig genaue Approximierbarkeit der Optimallösung durch polynomiale Algorithmen eine äußerst seltene Eigenschaft ist. Bei fast allen kombinatorischen Optimierungsalgorithmen gibt es Approximierbarkeitsgrenzen, die mit Hilfe polynomialer Algorithmen nicht überschritten werden können. Vielfach sind diese Grenzen jedoch noch nicht bekannt.

Zu b): Polyedrische Charakterisierungen kombinatorischer Optimierungsprobleme

Eine Forschungsrichtung, in der in letzter Zeit sehr interessante Ergebnisse erzielt worden sind, beschäftigt sich mit der Möglichkeit, kombinatorische Optimierungsprobleme mit Hilfe von Polyedern darzustellen, um dann lineare Programmierungsverfahren zur Berechnung von guten Schranken für die Optimallösung einzusetzen.

Dieser Ansatz soll kurz anhand des symmetrischen Travelling-Salesman-Problems (TSP) dargestellt werden. Die Resultate sind den Aufsätzen M. GRÖTSCHEL, M. W. PADBERG: On the symmetric travelling salesman problem I : Inequalities. In : Mathematical Programming 16 (1979), 265-280, und M. GRÖTSCHEL, M. W. PADBERG: On the symmetric travelling salesman problem II : lifting theorems and facets. In : Mathematical Programming 16 (1979), 281-302 entnommen.

Das TSP läßt sich graphentheoretisch wie folgt beschreiben. Gegeben sei ein vollständiger Graph $K_n = [V,E]$ mit n Knoten (Städten) und $m := n(n-1)/2$ Kanten (Verbindungen zwischen je zwei Städten). Für jede Kante ij ist eine Entfernung c_{ij} (zwischen Stadt i und Stadt j) gegeben. Gesucht ist eine Tour (Rundreise, die in einer Stadt beginnt, alle anderen Städte genau einmal berührt und wieder zur Ausgangsstadt zurückführt) minimaler Länge.

Dem n-Städte TSP kann man ein Polyeder folgendermaßen zuordnen. Mit jeder Kante $ij \in E$ assoziiert man eine Variable x_{ij}. Der Kantenmenge E wird somit ein Vektor $x = (x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{n-1,n}) \in \mathbb{R}^E$ zugeordnet. Jede Tour besteht offensichtlich aus n Kanten. Einer solchen Kantenmenge $T \subseteq E$ wird ein Inzidenzvektor $x^T \in \mathbb{R}^E$ zugeordnet mit $x^T_{ij} = 1$, falls $ij \in T$, und $x^T_{ij} = 0$, falls $ij \notin T$. Somit gehört zu jeder Tour ein eindeutig bestimmter 0/1-Vektor und umgekehrt. Nun definiert man

$$Q^n_T := \mathrm{conv}\,\{x^T \mid T \text{ Tour in } K_n\}.$$

Als konvexe Hülle von endlich vielen Vektoren ist Q^n_T ein Polytop, und Q^n_T hat die Eigenschaft, daß jede seiner Ecken einer Tour entspricht und umgekehrt. Das TSP kann man nun als lineares Programm

$$\min c^T x,\ x \in Q^n_T$$

lösen. Allerdings geht dies nur, wenn Q^n_T in Form eines Ungleichungssystems dargestellt ist, d.h. $Q^n_T = \{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax \leq b\}$. Nach einem bekannten Satz ist dies immer möglich. Wie jedoch alle notwendigen Ungleichungen zur Beschreibung von Q^n_T aussehen, ist unbekannt. Es gibt gute Gründe anzunehmen, daß niemals alle Ungleichungen explizit angegeben werden können.

In den oben zitierten Arbeiten ist es gelungen, große Klassen von Facetten von Q^n_T zu identifizieren, die bereits eine sehr gute Approximation des Polyeders Q^n_T ergeben. Bezeichnet man den durch diese Ungleichungen bestimmten Polyeder mit Q^n_C, so gilt $Q^n_T \subseteq Q^n_C$. Ein auf solche Weise bestimmtes Polyeder nennt man lineare Relaxierung von Q^n_T. Kann man lineare Programme über Q^n_C in polynomialer Zeit lösen, so erhält man durch Berechnung von $\min c^T x,\ x \in Q^n_C$ sehr gute untere Schranken für die Länge der kürzesten Tour.

In weiteren Arbeiten wurden von Mitarbeitern des Instituts ähnliche Probleme bezüglich anderer kombinatorischer Optimierungsprobleme (stabile-Mengen-Problem, Matching-Problem, verschiedene Reihenfolgeprobleme) angegangen. Auch hier konnten große Facettenklassen bestimmt werden, die auch algorithmisch von Nutzen sind.

Da sich die Polyedertheorie als besonders wichtig für die Behandlung kombinatorischer Optimierungsprobleme erwiesen hat, die Konzepte der klassischen Polyedertheorie für die mathematische Programmierung jedoch nicht besonders geeignet waren, mußte ein großer Teil der Polyedertheorie unter neuen Gesichtspunkten aufgearbeitet werden. Teilweise mußten neue Konzepte entwickelt werden, die die algorithmischen Aspekte stärker berücksichtigten. Eine umfangreiche Untersuchung dieser Art ist der Aufsatz A. BACHEM, M. GRÖTSCHEL: New aspects of polyhedral theory. In: B. KORTE: Modern applied mathematics: optimization and operations research. North Holland, Amsterdam 1982, 53-105. Hier wird auf algorithmische Charakterisierungen der Zulässigkeit von Polyedern, der Adjazenz von Seitenflächen, der Darstellung von Polyedern durch Ungleichungs- bzw. Erzeugendensysteme und anderes eingegangen. Ebenso werden verbandstheoretische Aspekte der Polyedertheorie durchleuchtet.

Zu c): Entwicklung polynomialer Algorithmen für Spezialfälle schwieriger Probleme

Nachdem weitgehend geklärt ist, welche der allgemeinen Problemklassen der kombinatorischen Optimierung im Sinne der Komplexitätstheorie einfach oder schwierig sind, wird versucht, für praxisrelevante Spezialfälle polynomiale Algorithmen zu entwickeln, die die besondere Struktur dieser Spezialfälle ausnutzen.

Betrachten wir als Beispiel stabile Mengen in Graphen. Gegeben sei ein Graph G = [V,E] mit Knotengewichten c_v für alle v ∈ V. Eine Knotenmenge S heißt stabil, wenn keine zwei Knoten in S miteinander durch eine Kante verbunden sind. Gesucht ist eine stabile Menge, so daß die Summe ihrer Knotengewichte maximal ist.

Bekanntlich ist das stabile-Mengen-Problem schwierig für die Klasse aller Graphen. Für eine Anzahl von Graphenklassen waren jedoch polynomiale Algorithmen bekannt (bipartite und triangulierte Graphen, Kreisgraphen, Intervallgraphen, Vergleichbarkeitsgraphen). Unter Ausnutzung der 1979 von dem russischen Mathematiker Khachiyan entwickelten Ellipsoidmethode konnte in M. GRÖTSCHEL, L. LOVÁSZ, A. SCHRIJVER: Polynomial algorithms for perfect graphs. To appear in: Annals of Discrete Mathematics gezeigt werden, daß das stabile-Mengen-Problem auch für perfekte Graphen polynomial lösbar ist. Dieses Resultat verallgemeinert fast alle vorher bekannten Ergebnisse dieser Art.

Gelegentlich ist es möglich, für schwierige Probleme polynomiale Algorithmen zu entwerfen, die das gesuchte Optimum mit beliebiger Genauigkeit approximieren, deren Rechenaufwand jedoch mit dem geforderten Genauigkeitsgrad steigt.

In R. SCHRADER: A note on approximation algorithms for graph partitioning problems. In: ZAMM, Bd. 62, Heft 3/4 (1982), 384-386 wurde das folgende Problem untersucht. Gegeben sei ein Graph G = [V,E] mit Knoten- und Kantengewichten. Gesucht ist eine Partitionierung der Knotenmenge in Teilmengen, so daß die Summe der Knotengewichte in jeder Teilmenge eine bestimmte Schranke nicht überschreitet und die Summe der Gewichte der Kanten, die beide Endknoten in derselben Teilmenge haben, maximal ist. Dieses Problem ist schwer für die Klasse aller Graphen, und wie in Schraders Aufsatz gezeigt wurde, sogar schwer für die Klasse aller Bäume. Für Bäume konnte jedoch ein polynomialer Approximationsalgorithmus der oben angegeben Art entworfen werden. Dieser gibt in einer Reihe von Spezialfällen sogar das exakte Optimum in polynomialer Zeit.

Wie das Gauß'sche Eliminations-Verfahren in fast allen Methoden der linearen Algebra auf die eine oder andere Art erscheint, werden in der ganzzahligen Programmierung Methoden zur Berechnung der Smith- bzw. Hermite-Normalform als fundamentale Hilfsmittel benutzt. Zur Berechnung dieser Normalformen standen bisher nur Verfahren mit exponentieller Laufzeit zur Verfügung. In A. BACHEM, R. KANNAN: Polynomial algorithms for computing the Smith and Hermite normal forms. In: SIAM Journal on Computing, 8 (1979), 499-507 konnte nun zum ersten Mal ein Algorithmus vorgelegt werden, der eine polynomiale Laufzeit hat und somit im praktischen und theoretischen Sinne schnell ist.

Zu d): Implementierung von Algorithmen

Ein nicht unwesentlicher Teil der Arbeit der Mitarbeiter des Instituts wird in die Implementierung von neu entwickelten Algorithmen investiert. Das heißt, die neuen Verfahren werden programmiert und an Problembeispielen aus der Praxis getestet. Häufig gibt es für ein theoretisches Konzept verschiedene, theoretisch äquivalente Implementationsmöglichkeiten. Es bedarf i. a. vieler Testläufe, um heuristisch-empirisch die in der Praxis effizientesten Realisierungen zu ermitteln. Diese Entwicklungen geben allerdings auch vielfältige Anregungen zu theoretischen Arbeiten, um z.B. das unterschiedliche empirische Verhalten im Prinzip äquivalenter Ansätze etwa mit statistischen Methoden zu erklären.

Da die meisten kombinatorischen Optimierungsprobleme, die von praktischen Fragestellungen herrühren, im theoretischen Sinne schwierig sind und diese Probleme meistens erhebliche Größenordnungen haben (z.T. hunderttausende von Variablen), können selten Verfahren eingesetzt werden, die das Erreichen des exakten Optimums garantieren. Es ist daher notwendig, Verfahren zu entwickeln, die gute untere und obere Schranken für das wahre Optimum liefern und die nur wenig Rechenzeit benötigen.

Bei der Lösung praktischer Aufgaben wird daher häufig in mehreren Stufen vorgegangen. Zuerst wird versucht, mit schnellen Heuristiken obere und untere Schranken zu berechnen. Falls man z.B. zeigen kann, daß der Wert der heuristisch gefundenen Lösung höchstens 5% vom wahren Optimum abweicht, könnte eine solche Lösung aufgrund von Datenungenauigkeiten etc. für praktische Zwecke durchaus akzeptabel sein. Falls man mit Heuristiken nicht diese Güte erreicht oder eine größere Genauigkeit wünscht, muß mit erheblich aufwendigeren Verfahren eine bessere Lösung gesucht werden. Man muß sich jedoch darüber im Klaren sein, daß die Ermittlung einer besseren Lösung mit z. T. exponentiellen ansteigendem Rechenaufwand erkauft werden muß.

Im Institut für Ökonometrie und Operations Research werden derzeit Verfahren der obengenannten Art für verschiedene kombinatorische Optimierungsprobleme entwickelt. Dabei wird mit dem gesamten Spektrum der zur Verfügung stehenden Ansätze experimentiert (Schnittebenenverfahren mit LP-Ansatz, Polyederrelaxierungen, Branch-and-Bound-Verfahren, Lagrange-Relaxierungen, dynamische Programmierung etc.) Es hat sich gezeigt, daß Methoden, die bei einigen Problemen sehr erfolgreich sind, bei anderen Problemen durchaus versagen können und daß dort z. T. völlig neue Wege beschritten werden müssen.

Zum Beispiel sind auf dynamischer Programmierung beruhende Methoden sehr gut für das Knapsackproblem und verschiedene Partitions- und Reihenfolgeprobleme geeignet und weitaus besser als LP-Ansätze. Schnittebenenverfahren, die auf polyedertheoretischen Ansätzen beruhen, erbringen hervorragende Resultate bei symmetrischen Travelling-Salesman Problemen. Hier können Probleme mit bis zu 300 Städten teilweise exakt gelöst werden. Lösungen, die höchstens 5% vom Optimum abweichen, werden bei Problemen mit bis zu 1000 Städten in akzeptabler Rechenzeit gefunden. Immerhin besitzen solche Probleme bis zu 500.000 Variable, was zu nicht unerheblichen speichertechnischen Schwierigkeiten führt.

Aus der industriellen Praxis sind Verfahren der kombinatorischen Optimierung bzw. des Operations Research nicht mehr wegzudenken. Am weitesten fortgeschritten sind sicherlich die Anwendungen im Erdölbereich. Beginnend mit der Festlegung optimaler Bohrstrategien zur Aufschließung möglichst vieler Erdölquellen, über die optimale Routenplanung und Auslastung von Tankschiffen, die kostengünstigste Verarbeitung des Rohöls in Crack-Anlagen, bis zur Optimierung der Lagerhaltung und der Auslieferung von Benzin und Heizöl durch Tankwagen werden Förderung, Verarbeitung und Verteilung in starkem Maße von OR-Verfahren geplant.

Aber auch in anderen Industriezweigen werden kombinatorische Optimierungsverfahren auf vielfältige Weise eingesetzt. Als weitere Beispiele seien erwähnt:

- Festlegung einer optimalen Walzfolge in einem Walzwerk,
- Einsatzplanung von Flugzeugbesatzungen,
- optimale Auslegung von Schulbuslinien,
- optimale Planung von Großprojekten (Bau einer Fabrik, eines Flughafens, eines Stausees) mit Hilfe von Netzplantechniken,
- Management von Blutbanken,
- Bestimmung optimaler Förderstrategien im Diamantenbergbau,
- optimale Nutzung von Wäldern zur Holzkohleherstellung (in Brasilien),
- Bestimmung der günstigsten Standorte für Düngemittelfabriken in Entwicklungsländern,
- Optimierung des Cash-Flows in Großunternehmen.

Für die oben aufgeführten und weitere kombinatorische Optimierungsprobleme sind im Institut für Ökonometrie und Operations Research sowohl exakte als auch schnelle heuristische Verfahren entwickelt worden. Diese Algorithmen sind größtenteils programmiert und auf der IBM 4331 des Instituts implementiert worden. Die Programme stehen allen interessierten Anwendern zur Verfügung.

Aus diesen Beispielen wird deutlich, wie vielfältig die Anwendung der hier besprochenen Modelle und Verfahren sind. Mit Sicherheit ist das Potential möglicher Anwendungen bei weitem noch nicht ausgeschöpft.

Operations Research wird erst seit relativ kurzer Zeit an den Universitäten gelehrt, dementsprechend sind Kenntnisse über dieses Gebiet noch nicht allzu weit verbreitet. Zusätzlich besteht vielfach bei Praktikern noch kein ausreichendes Problembewußtsein; das heißt, viele Anwender bemerken gar nicht, daß man mathematische Verfahren benutzen kann, um z.B. Arbeitsabläufe zu optimieren oder Rohstoffe rationeller einzusetzen. Häufig wird für ein vorliegendes Problem einfach nur eine zulässige Lösung konstruiert, und es wird nicht überprüft, ob es nicht kostengünstigere Lösungen gibt, die technisch oder betriebswirtschaftlich dieselbe Wirkung haben.

Natürlich spielt auch die Tatsache eine Rolle, daß manche Produktionsfaktoren relativ billig sind (oder daß man sie nicht selbst bezahlen muß), so daß der Aufwand zur Optimierung eines Problems gar nicht betrieben wird. Steigende Kosten ändern jedoch vielfach den Blickwinkel (Benzin wird erst gespart, wenn es knapp oder teuer ist).

Durch die Verknappung der Resourcen und die enormen Preissteigerungen in vielen Bereichen wird jedoch in Zukunft mit Sicherheit wesentlich mehr Wert auf eine optimale Ausnutzung aller vorhandenen Mittel gelegt werden müssen.

Zusammenfassend läßt sich sicherlich feststellen, daß die kombinatorische Optimierung ein Gebiet ist, das noch ein erhebliches Entwicklungspotential besitzt. Trotz vieler wissenschaftlicher Fortschritte in den letzten Jahren sind noch eine Reihe bahnbrechender Entwicklungen in der Theorie und in der praktischen Anwendung zu erwarten.