

POLYEDRISCHE KOMBINATORIK  
UND SCHNITTEBENENVERFAHREN

von

Martin Grötschel, Augsburg

Zusammenfassung

Anhand einiger Beispiele wird ein Überblick über die Methoden und Resultate der polyedrischen Kombinatorik gegeben. Außerdem wird die Entwicklung und Implementation von Schnittebenenverfahren zur Lösung kombinatorischer Optimierungsprobleme diskutiert.

## 1. Einleitung

Dieser Übersichtsartikel ist an Mathematiker gerichtet, die keine Spezialisten in der kombinatorischen Optimierung sind. Ziel des Aufsatzes ist es, einen Einblick in die Methoden und Resultate der polyedrischen Kombinatorik und in die Entwicklung von Schnittebenenverfahren zu geben.

In Abschnitt 2 werden drei interessante kombinatorische Optimierungsprobleme und einige ihrer Anwendungen beschrieben: das Travelling-Salesman-Problem, das Max-Cut-Problem und das Linear-Ordering-Problem. (Diese englischen Namen haben sich inzwischen auch im deutschen eingebürgert und werden daher nicht übersetzt.)

Abschnitt 3 bringt eine Einführung in die polyedrische Kombinatorik. Dies ist ein Teilgebiet der kombinatorischen Optimierung, das sich in den letzten Jahren besonders stark entwickelt hat. Es beschäftigt sich mit der Anwendung der Polyedertheorie, der linearen Algebra und der Methoden zur Lösung linearer Gleichungs- und Ungleichungssysteme in der Kombinatorik.

In Abschnitt 4 werden die polyedertheoretischen Kenntnisse zu den in Abschnitt 2 eingeführten Problemen zusammengefaßt, um zu zeigen, welcher Art die Aussagen der polyedertheoretischen Methoden zu konkreten kombinatorischen Optimierungsproblemen sind.

Anwendungen der in den Abschnitten 3 und 4 dargestellten Resultate bringt der Abschnitt 5. Hier wird gezeigt, wie man für (jedes beliebige) kombinatorische Optimierungsproblem Schnittebenenverfahren entwerfen kann und wie dabei die polyedertheoretischen Erkenntnisse zum Entwurf relativ effizienter Algorithmen ausgenutzt werden können. In diesem Abschnitt werden auch einige offene Fragen angesprochen.

## 2. Drei kombinatorische Optimierungsprobleme

Kombinatorische Optimierungsprobleme treten in kaum überschaubarer Zahl und Vielfalt in der Praxis und anderen Wissenschaftsbereichen auf. (Man vergleiche etwa die Liste der NP-vollständigen Probleme in Garey & Johnson (1979).) Zentraler Anwendungsbereich waren früher die Wirtschafts- und Ingenieurwissenschaften. Jedoch werden Methoden der kombinatorischen Optimierung heute z. B. auch in den folgenden Gebieten erfolgreich benutzt: Archäologie, Betriebs- und Volkswirtschaft, Biologie, Chemie, Geographie, Linguistik, Raumplanung, Physik, Soziologie.

In diesem Abschnitt möchte ich drei repräsentative kombinatorische Optimierungsprobleme mit einigen ihrer Anwendungen vorstellen. Die Auswahl liegt einerseits darin begründet, daß ich mich in letzter Zeit mit diesen Problemen aus polyedertheoretischer Sicht selber beschäftigt habe, und andererseits darin, daß sie verschiedenen Anwendungsbereichen entstammen und über sie relativ viel bekannt ist.

### 2.1 Das Travelling-Salesman-Problem

Die klassische Formulierung, von der sicherlich jeder schon einmal gehört hat, dieses Problems ist die folgende.

*Gabegeben seien  $n$  Städte und Entfernungen zwischen diesen, gesucht ist eine Rundreise, die in Stadt 1 beginnt, durch alle anderen Städte genau einmal führt, wieder in Stadt 1 endet und die minimale Länge hat. Sind die Entfernungen  $c_{ij}$  symmetrisch, d. h.  $c_{ij} = c_{ji}$   $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ , so heißt das Problem symmetrisches Travelling-Salesman-Problem, andernfalls wird es asymmetrisch genannt.*

Rundreiseprobleme dieser Art treten in dieser klassischen Art durchaus bei Tourenplanungsproblemen auf. Häufig gibt es zusätzliche Nebenbedingungen wie etwa: nach dem Besuch von jeweils höchstens oder genau  $k$  Städten muß man zum Ort 1 zurückkehren, eine Rückkehr muß erfolgen, wenn gewisse Kapazitäten überschritten sind (z. B. Ladefähigkeit eines Lastwagens, Arbeitszeiten von Fahrern) etc.. Viele dieser Varianten lassen sich durch einfache Transformationen auf das Standardproblem zurückführen.

Eine besonders wichtige Anwendung tritt bei der Herstellung von Leiterplatten und ähnlichen Objekten mit Hilfe numerisch kontrollierter Maschinen (NC-Maschinen) auf. Hier müssen z. B. auf einer Platte Löcher (z. B. mit einem Laserbohrer oder Stanzer) gebohrt, Lötstellen angebracht, Punkte geschweißt oder genau plazierte chemische Mittel aufgebracht werden. Die NC-Maschine soll so über die Platte geführt werden, daß die durch den Bohrkopf (Lötkopf etc.) zurückgelegte Wegstrecke minimal ist. Normalerweise hat eine derartige NC-Maschine einen "Startpunkt" (Nullposition vor Einführung der Platte in die Maschine), so daß es sich hierbei um eine Rundreise vom Startpunkt zum Startpunkt handelt. Probleme dieser Art sind üblicherweise sehr groß. Mir sind Anwendungsfälle mit über 5000 zu bohrenden Löchern bekannt.

Im nachfolgenden Bild 2.1 sind die Bohrstellen einer Leiterplatte im Maßstab 1:1 wiedergegeben. Links unten ist der Startpunkt, insgesamt sind 441 Löcher zu bohren. Dieses 442-Städte Problem ist ungelöst. Die beste uns bekannte und mit Heuristiken gefundene Rundreise hat eine Länge von 51.299 inches. Sie ist in Bild 2.1 angegeben.

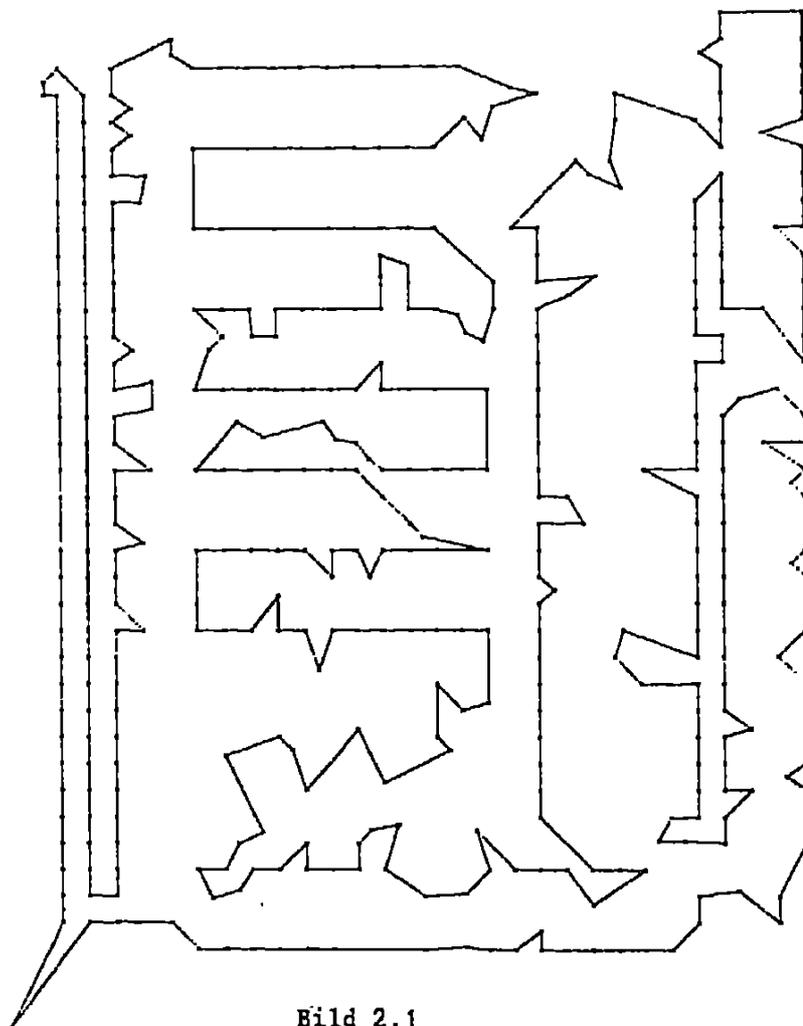


Bild 2.1

Als Travelling-Salesman-Problem lassen sich auch folgende Probleme formulieren:

- a) Bestimmung einer optimalen Durchlaufreihenfolge der Flüssigkeiten (Chargen) in einer Mehrproduktenpipeline,
- b) Bestimmung der optimalen Verarbeitungsfolge von Lacken in einer Großlackiererei,

bei den Problemen a) und b) werden Reinigungszeiten minimiert,

- c) Bestimmung einer Reihenfolge des Walzens von Profilen in einem Walzwerk, so daß die Umrüstzeiten der Walzstraße minimiert werden,
- d) Bestimmung der zeitlichen Reihenfolge von archäologischen Fundstätten (Grablegungsreihenfolge von Gräbern in einem Gräberfeld, Besiedlungsreihenfolge von Orten) aufgrund von Ähnlichkeitsmaßen (Distanzen), die durch die aufgefundenen Fundstücke definiert werden.

## 2.2 Das Max-Cut-Problem

Formal ist dieses Problem wie folgt definiert.

Gegeben sei ein Graph  $G = (V, E)$  mit Kantengewichten  $c_e \in \mathbb{R}$  für alle  $e \in E$ , gesucht ist eine Zerlegung (Partition) der Knotenmenge  $V$  in Mengen  $V_1, V_2$  mit  $V_1 \cup V_2 = V$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , so daß die Summe der Gewichte der Kanten, die einen Endknoten in  $V_1$  und den anderen in  $V_2$  haben (eine solche Kantenmenge heißt Schnitt oder Cut), maximal ist.

Ich will hier kurz eine besonders interessante Anwendung dieses Problems in der Physik skizzieren. Es handelt sich um die Bestimmung des Grundzustandes von Spingläsern.

Ein *Spinglas* besteht aus nichtmagnetischem Material, das an einigen Stellen durch magnetische Atome "verunreinigt" ist. Man interessiert sich für die Energie des Systems und die Orientierung der magnetischen Atome (Verunreinigungen) bei  $0^\circ \text{ K}$ , also für den sogenannten (gefrorenen) Grundzustand des Spinglases. Dieser Grundzustand ist experimentell nicht herstellbar, und die Physiker haben unterschiedliche, sich z. T. widersprechende Theorien über einige Eigenschaften dieses Grundzustandes. Die im nachfolgenden beschriebenen Ideen können vielleicht dazu beitragen, einige Phänomene des Magnetismus besser zu verstehen.

Mathematisch wird dieses Problem wie folgt modelliert. Jeder Verunreinigung  $i$  wird ein Vektor  $S_i \in \mathbb{R}^3$  zugeordnet, der (bei einem gegebenen Bezugssystem) die Orientierung des Atomes im Raum, d. h. den magnetischen Spin, beschreibt. Zwischen zwei Verunreinigungen  $i, j$  besteht eine magnetische Interaktion, die durch

$$H_{ij} = J(r_{ij}) S_i \cdot S_j$$

beschrieben wird, wobei  $J(r_{ij})$  eine Funktion ist die vom Abstand  $r_{ij}$  der Verunreinigungen abhängt und  $S_i \cdot S_j$  das innere Produkt der Vektoren  $S_i, S_j$  ist. In der Praxis wird  $J$  wie folgt bestimmt

$$J(r_{ij}) := \cos(Kr_{ij}) / r_{ij}^3,$$

wobei  $K$  eine materialabhängige Konstante ist (z. B.  $K = 2.4 \times 10^8$ ). Die gesamte Energie einer Spinkonfiguration ist gegeben durch

$$H = -\sum J(r_{ij}) S_i \cdot S_j + \sum F \cdot S_i,$$

wobei  $F$  ein äußeres magnetisches Feld ist. (Der Einfachheit halber nehmen wir im folgenden an  $F = 0$ .) Ein Zustand minimaler Energie ist also dadurch charakterisiert, daß  $\sum J(r_{ij}) S_i \cdot S_j$  maximal ist.

Das hierdurch gegebene Maximierungsproblem ist mathematisch kaum behandelbar. Von Ising wurde folgende Vereinfachung vorgeschlagen. Statt jeder beliebigen räumlichen Orientierung werden jeder Verunreinigung nur zwei Orientierungen erlaubt: "Nordpol oben" oder "Nordpol unten". Die dreidimensionalen Vektoren  $S_i$  werden dann in diesem Modell durch Variable  $s_i$  mit Werten in  $\{1, -1\}$  ersetzt, wobei unter Physikern Übereinstimmung darüber besteht, daß dieses Ising-Modell das wahre Verhalten von Spingläsern gut widerspiegelt. Das obige Maximierungsproblem lautet dann bezüglich des Ising Modells

$$\max \{ \sum J(r_{ij}) s_i s_j \mid s_i \in \{-1, 1\} \}.$$

Der Schritt zum Max-Cut Problem ist nun leicht. Wir definieren einen Graphen  $G = (V, E)$ , wobei jeder Knoten aus  $V$  eine Verunreinigung repräsentiert, je zwei Knoten  $i, j$  sind durch eine Kante verbunden, die das Gewicht  $c_{ij} = -J(r_{ij})$  trägt. (Ist  $r_{ij}$  groß, so ist nach Definition  $c_{ij}$  sehr klein, und üblicherweise werden Kanten mit kleinen Gewichten  $c_{ij}$  gar nicht berücksichtigt). Eine Partition von  $V$  in  $V_1$

und  $V_2$  entspricht einer Orientierungsfestlegung der Variablen, z. B.  
 $V_1 := \{i \in V \mid i \text{ repräsentiert eine Verunreinigung mit Nordpol oben}\}$ ,  
 $V_2 := \{i \in V \mid \text{der Nordpol von } i \text{ ist unten}\}$ . Bei gegebenen Orientierungen  
der Atome (Partition  $V_1, V_2$  von  $V$ ) ist die Energie des Spinglaszustandes  
also wie folgt definiert

$$\sum_{i \in V_1, j \in V_2} c_{ij} - \sum_{i, j \in V_1} c_{ij} - \sum_{i, j \in V_2} c_{ij}.$$

Der Zustand minimaler Energie kann also durch Maximierung des obigen Ausdrucks bestimmt werden. Addieren wir zu diesem Ausdruck die Konstante  $C := \sum_{i, j \in V} c_{ij}$ , so folgt daraus, daß der Grundzustand eines Spinglases durch die Lösung des Max-Cut-Problems

$$\max \left\{ \sum_{i \in V_1} \sum_{j \in V_2} c_{ij} \mid V_1, V_2 \text{ Partition von } V \right\}$$

bestimmt werden kann. Eine detailliertere Analyse dieses Problems und die Bestimmung vieler Grundzustände von Spingläsern kann man in Barahona, Maynard, Rammal & Uhry (1982) finden.

### 2.3 Das Linear-Ordering-Problem

Probleme dieses Typs tauchen immer dann auf, wenn gewisse Objekte in eine Rangfolge (lineare Ordnung) gebracht werden sollen, und diese bezüglich eines Kriteriums optimal sein soll. Das Linear-Ordering-Problem, das wir hier skizzieren wollen, kann folgendermaßen beschrieben werden.

Gegeben sei ein vollständiger gerichteter Graph  $D_n = (V, A_n)$ , und jeder Bogen  $(i, j) \in A_n$  sei mit einem Gewicht  $c_{ij} \in \mathbb{R}$  belegt. Gesucht wird eine lineare Anordnung der Knoten, sagen wir  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , so daß

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n c_{i_j i_k}$$

maximal ist, d. h. es wird eine Rangfolge der Knoten gesucht, so daß die Summe der Gewichte der Bögen, die mit der Rangfolge kompatibel sind, maximal ist.

Dieses Problem hat vielfältige Anwendungen. Eine der wichtigsten ist die Triangulation von Input-Output-Matrizen, bei der eine "optimale" Hierarchie der Sektoren einer Volkswirtschaft gesucht wird, die gewisse Strukturana-

Eine besonders wichtige Anwendung tritt bei der Herstellung von Leiterplatten und ähnlichen Objekten mit Hilfe numerisch kontrollierter Maschinen (NC-Maschinen) auf. Hier müssen z. B. auf einer Platte Löcher (z. B. mit einem Laserbohrer oder Stanzer) gebohrt, Lötstellen angebracht, Punkte geschweißt oder genau plaziert chemische Mittel aufgebracht werden. Die NC-Maschine soll so über die Platte geführt werden, daß die durch den Bohrkopf (Lötkopf etc.) zurückgelegte Wegstrecke minimal ist. Normalerweise hat eine derartige NC-Maschine einen "Startpunkt" (Nullposition vor Einführung der Platte in die Maschine), so daß es sich hierbei um eine Rundreise vom Startpunkt zum Startpunkt handelt. Probleme dieser Art sind üblicherweise sehr groß. Mir sind Anwendungsfälle mit über 5000 zu bohrenden Löchern bekannt.

Im nachfolgenden Bild 2.1 sind die Bohrstellen einer Leiterplatte im Maßstab 1:1 wiedergegeben. Links unten ist der Startpunkt, insgesamt sind 441 Löcher zu bohren. Dieses 442-Städte Problem ist ungelöst. Die beste uns bekannte und mit Heuristiken gefundene Rundreise hat eine Länge von 51.299 inches. Sie ist in Bild 2.1 angegeben.

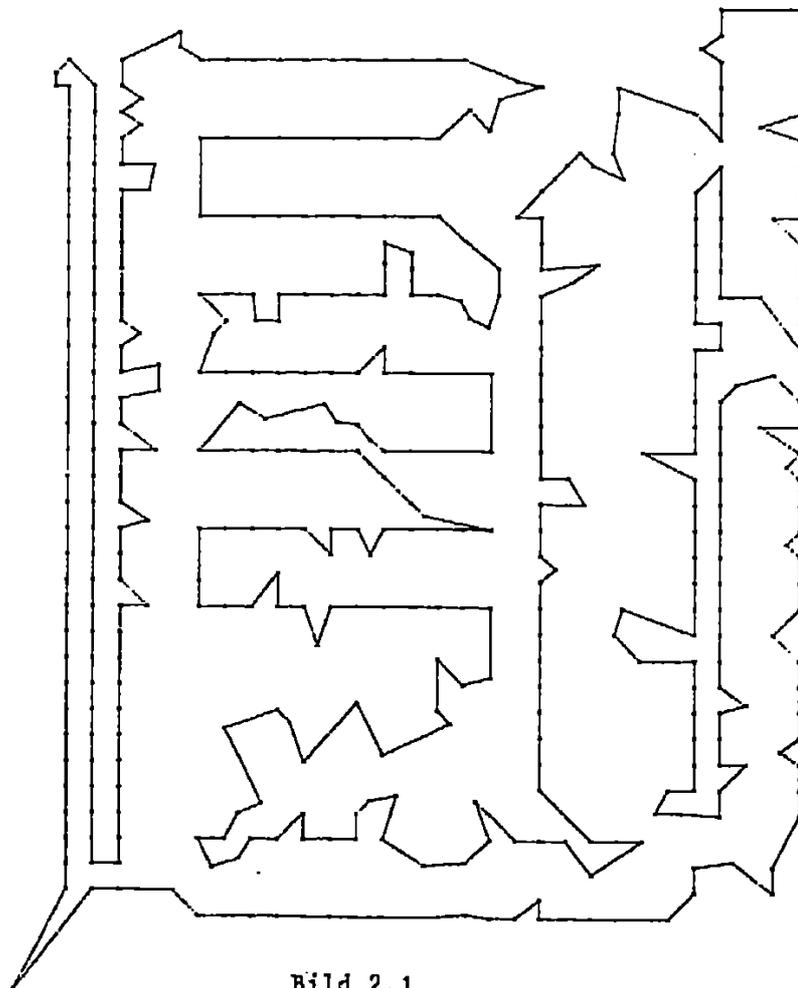


Bild 2.1

Als Travelling-Salesman-Problem lassen sich auch folgende Probleme formulieren:

- a) Bestimmung einer optimalen Durchlaufreihenfolge der Flüssigkeiten (Chargen) in einer Mehrproduktenpipeline,
- b) Bestimmung der optimalen Verarbeitungsfolge von Lacken in einer Großlackiererei,

bei den Problemen a) und b) werden Reinigungszeiten minimiert,

- c) Bestimmung einer Reihenfolge des Walzens von Profilen in einem Walzwerk, so daß die Umrüstzeiten der Walzstraße minimiert werden,
- d) Bestimmung der zeitlichen Reihenfolge von archäologischen Fundstätten (Grablegungsreihenfolge von Gräbern in einem Gräberfeld, Besiedlungsreihenfolge von Orten) aufgrund von Ähnlichkeitsmaßen (Distanzen), die durch die aufgefundenen Fundstücke definiert werden.

## 2.2 Das Max-Cut-Problem

Formal ist dieses Problem wie folgt definiert.

*Gegeben sei ein Graph  $G = (V, E)$  mit Kantengewichten  $c_e \in \mathbb{R}$  für alle  $e \in E$ , gesucht ist eine Zerlegung (Partition) der Knotenmenge  $V$  in Mengen  $V_1, V_2$  mit  $V_1 \cup V_2 = V$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , so daß die Summe der Gewichte der Kanten, die einen Endknoten in  $V_1$  und den anderen in  $V_2$  haben (eine solche Kantenmenge heißt Schnitt oder Cut), maximal ist.*

Ich will hier kurz eine besonders interessante Anwendung dieses Problems in der Physik skizzieren. Es handelt sich um die Bestimmung des Grundzustandes von Spingläsern.

Ein *Spinglas* besteht aus nichtmagnetischem Material, das an einigen Stellen durch magnetische Atome "verunreinigt" ist. Man interessiert sich für die Energie des Systems und die Orientierung der magnetischen Atome (Verunreinigungen) bei  $0^\circ \text{K}$ , also für den sogenannten (gefrorenen) Grundzustand des Spinglases. Dieser Grundzustand ist experimentell nicht herstellbar, und die Physiker haben unterschiedliche, sich z. T. widersprechende Theorien über einige Eigenschaften dieses Grundzustandes. Die im nachfolgenden beschriebenen Ideen können vielleicht dazu beitragen, einige Phänomene des Magnetismus besser zu verstehen.

lysen und Vergleiche unterschiedlicher Länder ermöglicht, sowie Aussagen über die Zirkularität (Grad der internen Sektorverflechtungen) der Volkswirtschaft erlaubt, siehe Grötschel, Jünger & Reinelt (1984b). Anwendungen gibt es z. B. auch im Sport (Auswertung von Turnierergebnissen), in der Psychologie (Hierarchieuntersuchungen in Gruppen), in der Archäologie (Ahnenbestimmung, Datierung), in der Maschinenbelegungsplanung und im Marketing.

Im Marketing tritt das Linear Ordering Problem z. B. bei der Planung von Marketingstrategien oder der Auswahl von Anzeigenserien auf. Ein einfaches Beispiel ist das folgende.

Von W. Gaul (Karlsruhe) wurden 10 verschiedene Anzeigen für französischen Cognac auf ihre Wirkung hin untersucht. Dazu wurden 37 Studenten gebeten, je zwei der 10 Anzeigen paarweise zu vergleichen und eine als die bessere zu bestimmen. (Diese "Methode des paarweisen Vergleichs" wird z. B. auch bei der Bestimmung von möglichst schmackhaftem Hundefutter etc. verwendet). Addiert man die jeweiligen Einzelergebnisse auf, so erhält man Bogengewichte  $c_{ij}$ , die besagen, daß  $c_{ij}$  Personen Anzeige  $i$  besser fanden als Anzeige  $j$ . Das Ergebnis dieses Experiments ist in der folgenden (10,10)-Matrix zusammengefaßt.

0	16	11	15	7	11	17	12	11	8
21	0	14	15	9	14	21	13	10	8
26	23	0	26	12	26	26	24	22	20
22	22	11	0	13	20	21	13	16	12
30	28	25	24	0	27	28	25	24	20
26	23	10	17	10	0	21	15	15	12
20	16	11	16	9	16	0	11	15	11
25	24	13	24	12	22	26	0	20	15
26	27	15	21	13	22	22	17	0	16
29	29	17	25	17	25	26	22	21	0

Die (eindeutig bestimmte) optimale Rangfolge ist

5,3,10,8,9,4,6,2,7,1 .

Daraus kann man schließen, daß man z. B. mit einer Serie bestehend aus den Anzeigen 5,3,10 und 8 insgesamt mehr Leute anspricht, als mit jeder anderen aus vier dieser zehn Anzeigen bestehenden Serie.

Weitere Informationen über das Linear Ordering Problem und seine Anwendungen finden sich in Reinelt (1985).

### 3. Polyedrische Kombinatorik

Viele kombinatorische Optimierungsprobleme können wie folgt beschrieben werden. Gegeben ist eine endliche *Grundmenge*  $E$  (z. B. die Kanten oder Knoten eines Graphen), und jedem Element  $e \in E$  ist ein *Gewicht*  $c_e \in \mathbb{R}$  zugeordnet. Ferner ist eine (endliche) Menge  $I \subseteq 2^E$  von *zulässigen Lösungen* gegeben (z. B. die Menge aller hamiltonschen Kreise oder aller Schnitte in einem Graphen), und gesucht wird eine zulässige Lösung  $I \in I$ , so daß

$$c(I) := \sum_{e \in I} c_e$$

maximal (oder minimal) ist.

Jedem auf diese Weise gegebenen Problem kann ein Polyeder und damit ein lineares Programm zugeordnet werden. Das Studium von derartigen Polyedern und von linearen Programmen, die aus kombinatorischen Optimierungsproblemen abgeleitet sind, ist das Thema der polyedrischen Kombinatorik. Umfangreiche Überblicke über dieses Gebiet findet man in Pulleyblank (1982) und Grötschel (1984).

*Polyeder* sind bekanntlich definiert als die Lösungsmengen von (endlichen) Ungleichungssystemen, d. h. als Durchschnitte von endlich vielen Halbräumen. Ein *Polytop* ist ein beschränktes Polyeder und kann äquivalent definiert werden als die konvexe Hülle endlich vieler Punkte. D. h. für ein Polytop  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  haben wir zwei Darstellungen

$$(3.1) \quad P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\},$$

$$(3.2) \quad P = \text{conv}(S),$$

wobei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  und  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  eine endliche Menge ist.

Lineare Programme (über beschränkten Gebieten) kann man formal wie folgt beschreiben:

$$(3.3) \quad \max c^T x, \quad x \in P.$$

Jedoch wird bei allen Algorithmen der linearen Optimierung (z. B. Simplexverfahren, Ellipsoidmethode) unterstellt, daß  $P$  in der Form (3.1) gegeben

ist. Die in der polyedrischen Kombinatorik betrachteten Polytope  $P$  treten jedoch - wie nachfolgend beschrieben - in der Form (3.2) auf, und eine der wichtigsten und interessantesten Aufgaben ist die Bestimmung von zugehörigen Ungleichungssystemen, die  $P$  in der Form (3.1) beschreiben.

Nehmen wir an, daß ein kombinatorisches Optimierungsproblem gegeben ist durch eine Grundmenge  $E$ , eine Menge von zulässigen Lösungen  $I \subseteq 2^E$  und Gewichte  $c_e \in \mathbb{R} \quad \forall e \in E$ , kurz: das Problem ist durch  $(E, I, c)$  gegeben. Für  $F \subseteq E$  definieren wir den *Inzidenzvektor* (charakteristischen Vektor)  $\chi^F = (\chi_e^F)_{e \in E} \in \mathbb{R}^E$  durch

$$\chi_e^F := \begin{cases} 1 & \text{falls } e \in F, \\ 0 & \text{falls } e \notin F. \end{cases}$$

Der zu  $(E, I, c)$  gehörige Polytop  $P_I$  ist die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren der zulässigen Lösungen d. h.

$$(3.4) \quad P_I := \text{conv}\{\chi^I \in \mathbb{R}^E \mid I \in I\}.$$

Jeder Ecke von  $P_I$  entspricht eine zulässige Lösung aus  $I$  und umgekehrt, d. h. jede optimale Basislösung des linearen Programms

$$(3.5) \quad \max c^T x, \quad x \in P_I$$

entspricht einer optimalen Lösung unseres kombinatorischen Optimierungsproblems und umgekehrt. Das Program (3.5) liegt jedoch in der "falschen" Form vor. Um Methoden der linearen Programmierung anwenden zu können, muß ein System von Ungleichungen gefunden werden, so daß

$$P_I = \{x \in \mathbb{R}^E \mid Ax \leq b\}$$

gilt.

Im nachfolgenden werden wir sehen, daß es - für algorithmische Zwecke - häufig ansreicht, "hinreichend gute" Ungleichungssysteme mit der Eigenschaft  $P_I \subseteq \{x \mid A'x \leq b'\}$  zu bestimmen. Lösungen von linearen Programmen  $\max c^T x, A'x \leq b'$  (mit "guten" Systemen  $A'x \leq b'$ ) liefern vielfach bereits Optimallösungen oder sehr gute Schranken für die betrachteten kombinatorischen Probleme.

Zunächst noch einige Definitionen. Ist  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Polyeder, dann heißt eine Ungleichung  $a^T x \leq \alpha$  *gültig* (bezüglich  $P$ ), falls  $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq \alpha\}$ . Ist  $a^T x \leq \alpha$  gültig, dann ist die Menge  $F := \{x \mid a^T x = \alpha\} \cap P$  eine *Seitenfläche* von  $P$ . Ist  $F \neq \emptyset$  eine Seitenfläche von  $P$  und gilt  $\dim F = \dim P - 1$ , dann heißt  $F$  *Facette* von  $P$ . (Für eine Menge  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  ist  $\dim S$  die maximale Anzahl in  $S$  enthaltener affin unabhängiger Punkte minus eins.)

Die *affine Hülle* von  $P$ , Bezeichnung  $\text{aff}(P)$ , ist der von den Punkten in  $P$  aufgespannte affine Teilraum von  $\mathbb{R}^n$ . Ein Gleichungssystem  $Dx = d$  mit der Eigenschaft

$$\text{aff}(P) = \{x \mid Dx = d\}$$

heißt *minimal* (bezüglich  $P$ ), falls die Zeilen von  $D$  linear unabhängig sind.

Will man ein Polytop  $P$  (gegeben in der Form (3.2)) durch ein System von Gleichungen und Ungleichungen beschreiben, so soll dieses System möglichst nicht redundant sein, d. h. es soll keine Gleichungen oder Ungleichungen enthalten, die weggelassen werden können, ohne die Lösungsmenge zu verändern.

(3.6) Satz. Sei  $\emptyset \neq P \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Polyeder. Ein nicht redundantes System von Gleichungen und Ungleichungen zur Beschreibung von  $P$  erhält man wie folgt.

(a) Man bestimme ein minimales Gleichungssystem  $Dx = d$  für  $P$  (dieses ist leer, falls  $\dim P = n$ ).

(b) Für jede Facette  $F$  von  $P$  bestimme man genau eine gültige Ungleichung  $a^T x \leq \alpha$  mit  $F = \{x \mid a^T x = \alpha\} \cap P$ .

□

Für Polytope  $P_I$ , die zu kombinatorischen Optimierungsproblemen gehören, ist es normalerweise einfach, ein minimales Gleichungssystem zu finden (siehe Abschnitt 4). Erheblich schwieriger ist die vollständige Charakterisierung aller Facetten von  $P_I$  durch Ungleichungen.

Für fast alle Probleme, die in polynomialer Zeit gelöst werden können, ist eine vollständige (und häufig auch nicht redundante) Beschreibung der zugehörigen Polytope bekannt. Beispiele hierfür sind:

- das Matching-Polytop (Edmonds (1965)),

- das kapazitierte  $b$ -Matching-Polytop (Edmonds & Johnson (1970), Cook & Pulleyblank (1984)),
- das Matroid-Polytop (Edmonds (1971)) (ein Spezialfall hiervon ist die konvexe Hülle aller Inzidenzvektoren von Wäldern in Graphen).

Eine lange Liste fast aller bekannten Resultate dieser Art findet sich in Grötschel, Lovász & Schrijver (1986).

Dagegen ist kein  $NP$ -schwieriges kombinatorisches Optimierungsproblem bekannt, so daß für die Klasse der zugehörigen Polytope eine vollständige Beschreibung gefunden worden wäre. Aus Komplexitätstheoretischen Gründen können Resultate dieser Art auch nicht erwartet werden, siehe Papadimitriou (1984).

Noch eine wichtige Bemerkung! Man könnte glauben, daß einfache Probleme (polynomial lösbar) auch eine einfache polyedrische Beschreibung haben. Dies stimmt im Hinblick auf die Anzahl der zur Beschreibung von  $P_I$  notwendigen Ungleichungen nicht. Diese ist i. a. exponentiell in  $|E|$ . Betrachten wir z. B. die konvexe Hülle aller Inzidenzvektoren von Wäldern (das sind Kantenmengen, die keine Kreise enthalten) des vollständigen Graphen  $K_n = (V, E_n)$ , d. h.

$$(3.7) \quad P(K_n) = \{\text{conv } \chi^F \in \mathbb{R}^{E_n} \mid F \subseteq E_n \text{ Wald}\},$$

dann ist durch das folgende System von Ungleichungen eine minimale nicht-redundante Beschreibung von  $P(K_n)$  gegeben

$$(3.8) \quad \begin{aligned} x(E(W)) &\leq |W| - 1 && \text{für alle } W \subseteq V, |W| \geq 2, \\ x_e &\geq 0 && \text{für alle } e \in E_n. \end{aligned}$$

Hierbei ist  $E(W) = \{ij \in E_n \mid i, j \in W\}$ . Die Anzahl der Ungleichungen des obigen Systems (3.8) beträgt  $2^n + \binom{n}{2} - n - 1$ .

Ist allerdings ein kombinatorisches Optimierungsproblem polynomial lösbar, so können auch sehr viele polyedertheoretische Fragen bezüglich der zugehörigen Klasse von Polyedern in polynomialer Zeit gelöst werden, siehe Grötschel, Lovász & Schrijver (1986). Beispiele hierfür sind:

(3.9) Gegeben  $y \in \mathbb{Q}^E$ , entscheide, ob  $y \in P_I$  und falls dies nicht der Fall ist, finde einen Vektor  $c \in \mathbb{Q}^E$  (eine Schnittebene) mit  $c^T y > c^T x \quad \forall x \in P_I$ . (Dies ist das sogenannte *Separierungsproblem*).

(3.10) Gegeben  $y \in P_I$ , bestimme Ecken  $x_1, \dots, x_k$  von  $P_I$ ,  $k \leq n+1$ , so daß  $y$  Konvexkombination dieser Ecken ist.

(3.11) Gegeben  $y \in P_I$ , bestimme die Seitenfläche kleinster Dimension von  $P_I$ , die  $y$  enthält.

(3.12) Gegeben zwei Ecken von  $P_I$ , entscheide, ob diese benachbart sind.

(3.13) Gegeben eine gültige Ungleichung  $c^T x \leq \gamma$  für  $P_I$ . Finde Facetten  $a_1^T x \leq \alpha_1, \dots, a_k^T x \leq \alpha_k$ ,  $k \leq n$  von  $P_I$ , und rationale Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ , so daß

$$c = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i \quad \text{und} \quad \gamma \geq \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i .$$

Mit anderen Worten: Auch optimale Lösungen des zu  $\max c^T x, x \in P_I$  dualen linearen Programms können in polynomialer Zeit gefunden werden.

#### 4. Einige Beispiele kombinatorischer Polyeder

Wir haben bereits gesehen, daß der Polytop  $P(K_n)$  der Wälder (3.7) des vollständigen Graphen  $K_n$  durch das Ungleichungssystem (3.8) beschrieben werden kann. Derartige Resultate sind für die drei in Abschnitt 2 vorgestellten Probleme nicht bekannt. Diese drei Probleme sind NP-vollständig, und es wird wohl niemals möglich sein, Systeme von Gleichungen und Ungleichungen anzugeben, die die zugehörigen Polytope vollständig in der Form (3.1) beschreiben. Dennoch gibt es bezüglich dieser Probleme einige interessante polyedertheoretische Resultate, die im nachfolgenden dargestellt werden und die zur Entwicklung relativ effizienter Algorithmen geführt haben.

##### 4.1 Travelling-Salesman-Polytope

Einen umfangreichen Überblick über derzeit alle zum Travelling-Salesman-Problem bekannten polyedertheoretischen Resultate gibt der Aufsatz Grötschel & Padberg (1985). Wir wollen uns hier auf das symmetrische TSP beschränken und nur einige der interessantesten Resultate zitieren.

Sei  $K_n = (V, E_n)$ ,  $n \geq 3$ , ein vollständiger Graph, dann ist das Travelling Salesman Polytop  $Q_T^n$  die konvexe Hülle aller Inzidenzvektoren von hamiltonschen Kreisen (Touren) in  $K_n$ , d. h.

$$(4.1) \quad Q_T^n = \text{conv}\{\chi^T \in \mathbb{R}^{E_n} \mid T \subseteq E_n \text{ hamiltonscher Kreis}\}.$$

Offensichtlich erfüllen alle Punkte in  $Q_T^n$  die Ungleichungen

$$(4.2) \quad 0 \leq x_e \leq 1 \quad \text{für alle } e \in E_n.$$

Jeder Knoten wird von jeder Rundreise genau einmal durchlaufen, d. h. genau zwei Kanten jeder Tour sind inzident mit jedem Knoten aus  $K_n$ . Algebraisch läßt sich diese Bedingung durch das folgende Gleichungssystem formulieren:

$$(4.3) \quad x(\delta(v)) = 2 \quad \text{für alle } v \in V,$$

wobei  $\delta(v) = \{vi \in E_n \mid i \in V \setminus \{v\}\}$ . Das Gleichungssystem (4.3) ist minimal bezüglich  $Q_T^n$ , d. h. die Lösungsmenge von (4.3) ist gleich  $\text{aff}(Q_T^n)$ , und die  $n$  Gleichungen sind linear unabhängig. Daraus folgt

$$\dim Q_T^n = |E_n| - |V| .$$

Die Ecken des Polytops, das durch (4.2) und (4.3) bestimmt ist, sind entweder Inzidenzvektoren von Touren, Inzidenzvektoren von disjunkten Kreisen, wobei jeder Knoten des  $K_n$  auf genau einem Kreis liegt (solche Kantenmengen heißen *2-Matchings*), oder Vektoren  $x$ , deren Komponenten die Werte  $x_e \in \{0, 1, \frac{1}{2}\}$  annehmen, wobei die Menge der Kanten  $e \in E_n$ , die zu Komponenten  $x_e = \frac{1}{2}$  gehören, aus disjunkten Kreisen ungerader Länge besteht. Bild 4.1 zeigt im Falle  $n = 6$  in (a), (b) und (c) diese drei Möglichkeiten.

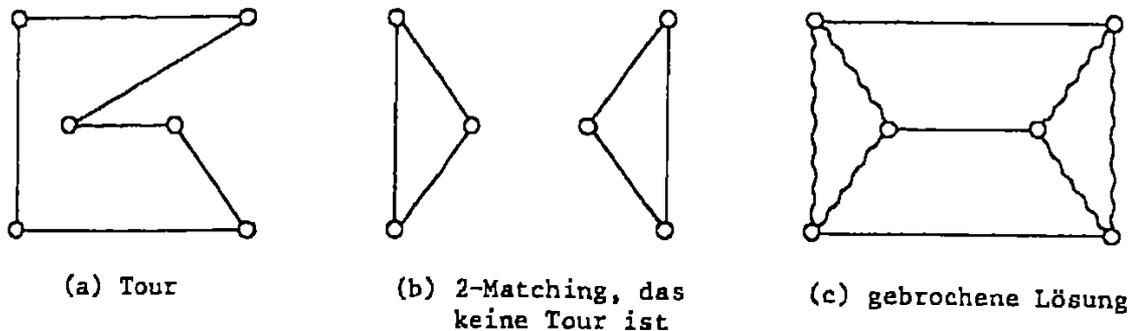


Bild 4.1

Die gewellten Linien in 4.1 (c) entsprechen Kanten  $e \in E_6$ , deren zugehörige Komponenten den Wert  $\frac{1}{2}$  haben, gerade Linien in (a), (b), (c) entsprechen dem Wert 1.

Ist  $T \subseteq E_n$  eine Tour und  $W \subsetneq V$ , so gilt offensichtlich  $|T \cap E(W)| \leq |W| - 1$ , d. h. Touren enthalten keine "kurzen" Kreise. Dies können wir algebraisch durch die sogenannten

#### (4.4) Kurzzyklus-Ungleichungen

$$x(E(W)) \leq |W| - 1 \quad \text{für alle } W \subseteq V, W \neq V$$

ausdrücken. Es ist unmittelbar einsichtig, daß jeder Inzidenzvektor eines 2-Matchings, das keine Tour ist, eine der Ungleichungen (4.4) verletzt.

Daraus folgt:

$$(4.5) \quad Q_T^n = \text{conv}\{x \in \mathbb{R}^{E_n} \mid x \text{ erfüllt (4.2), (4.3), (4.4) und } x \text{ ist ganzzahlig}\} .$$

Wir können somit das Travelling-Salesman-Problem als ganzzahliges lineares Programm formulieren

$$(4.6) \quad \min c^T x$$

$x$  erfüllt (4.2), (4.3), (4.4),  
 $x$  ganzzahlig .

Jede Lösung von (4.6) ist der Inzidenzvektor einer Tour und umgekehrt.

Das durch (4.2), (4.3) und (4.4) definierte Polytop hat jedoch noch gebrochene Ecken. Z. B. ist der zu Bild 4.1 (c) gehörige Vektor eine solche gebrochene Ecke. Edmonds (1965) hat eine Klasse von Ungleichungen angegeben, die alle gebrochenen Ecken dieser Art eliminiert.

(4.7) *2-Matching Ungleichungen*

$$x(E(H)) + \sum_{j=1}^s x(E(T_j)) \leq |H| + \frac{s-1}{2} \quad \text{für alle } W, T_1, \dots, T_s \subseteq V$$

so daß  $|H \cap T_j| = 1, |T_j \setminus H| = 1, j = 1, \dots, s$

und  $s$  ungerade .

Edmonds konnte zeigen:

(4.8) Satz. *Die Ecken des durch (4.2), (4.3) und (4.7) definierten Polyeders sind ganzzahlig, und zwar sind sie genau die Inzidenzvektoren der 2-Matchings des  $K_n$ .* □

Fügt man jedoch die Ungleichungen (4.4) zu (4.2), (4.3), (4.7) hinzu, so werden neue gebrochene Ecken erzeugt. Um diese abzuschneiden wurden neue Klassen von Ungleichungen durch Verallgemeinerung der Ungleichungen (4.7) abgeleitet. Chvátal (1973) betrachtete zunächst sogenannte Kamm-Ungleichungen, diese wurden von Grötschel & Padberg (1979) weiterentwickelt und schließlich durch Grötschel & Pulleyblank (1981) in eine - in einem präzisierbaren Sinne - allgemeinste Form gebracht. Wir erinnern daran, daß eine Clique in einem Graphen eine maximale Knotenmenge  $W$  ist, so daß je zwei Knoten aus  $W$  benachbart sind.

(4.9) Definition. *Ein Cliquenbaum ist ein zusammenhängender Untergraph  $C$  des  $K_n$ , der aus Cliquen besteht, die die folgenden Eigenschaften haben.*

- (1) Die Cliques bestehen aus zwei Mengen, den Griffen  $H_1, \dots, H_r$  und den Zinken  $T_1, \dots, T_s$ .
- (2)  $T_i \cap T_j = \emptyset$ ,  $1 \leq i < j \leq s$ .
- (3)  $H_i \cap H_j = \emptyset$ ,  $1 \leq i < j \leq r$ .
- (4)  $2 \leq |T_j| \leq n-2$  und  $|T_j \setminus \bigcup_{i=1}^r H_i| \geq 1$   $j = 1, \dots, s$ .
- (5) Jeder Griff hat einen nichtleeren Durchschnitt mit einer ungeraden Anzahl von mindestens drei Zinken.
- (6) Falls  $T_j \cap H_i \neq \emptyset$ , dann ist  $C(T_j \cap H_i)$  unausammenhängend. □

Bild 4.2 zeigt einen Cliquenbaum mit vier Griffen und elf Zinken.

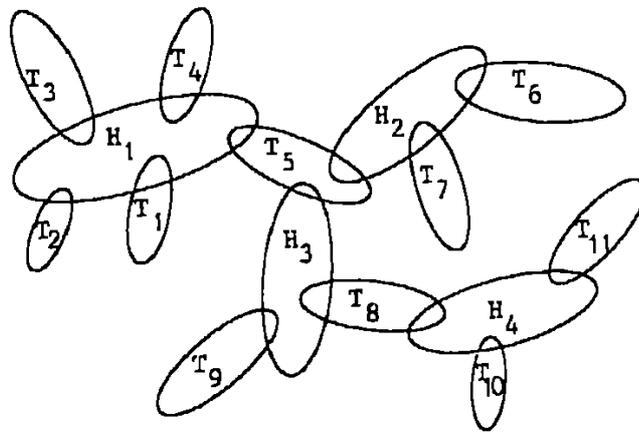


Bild 4.2

(4.10) Satz. Für jeden Cliquenbaum  $C$  des  $K_n$  gegeben durch die Griffen  $H_1, \dots, H_r$  und die Zinken  $T_1, \dots, T_s$  definiert die Cliquenbaum-Ungleichung

$$(4.11) \quad \sum_{i=1}^r x(E(H_i)) + \sum_{j=1}^s x(E(T_j)) \leq \sum_{i=1}^r |H_i| + \sum_{j=1}^s (|T_j| - t_j) - \frac{s+1}{2}$$

eine Facette von  $Q_T^n$ . (Hierbei ist  $t_j$  die Anzahl der Griffen, die mit der Zinke  $T_j$  einen nichtleeren Durchschnitt haben.) □

Gilt für zwei Knoten  $u, v$  eines Cliquenbaums  $\{u, v\} \subseteq T_j \cap H_i$ , so ist der Koeffizient der Variablen  $x_{uv}$  auf der linken Seite von (4.11) zwei. Die Koeffizienten von Cliquenbaumungleichungen haben also Werte in  $\{0, 1, 2\}$ .

Es ist nicht schwierig zu sehen, daß die Ungleichungen (4.7) und (4.4) Spezialfälle von (4.11) sind. Es sind noch einige andere Klassen von Ungleichungen bekannt, die Facetten von  $Q_T^n$  definieren. Aus Platzgründen können wir hier jedoch darauf nicht eingehen.

#### 4.2 Das Polytop der Schnitte eines Graphen

Ist  $G = (V, E)$  ein Graph, so bezeichnen wir den durch  $W \subseteq V$  gegebenen Schnitt mit  $\delta(W)$ , d. h.

$$\delta(W) = \{ij \in E \mid i \in W, j \in V \setminus W\}.$$

Der Schnittpolytop  $CUT(G)$  ist somit definiert durch

$$CUT(G) := \text{conv}\{\chi^{\delta(W)} \in \mathbb{R}^E \mid W \subseteq V\},$$

d. h. ein Max-Cut-Problem auf  $G$  kann man über das lineare Programm  $\max c^T x, x \in CUT(G)$  lösen.

Studien zum Schnittpolytop und dem damit eng verwandten Polytop der bipartiten Teilgraphen von  $G$  sind in Barahona & Mahjoub (1983) und Barahona, Grötschel & Mahjoub (1985) durchgeführt worden. Unter anderem konnte folgendes gezeigt werden.

(4.12) Satz. (Barahona & Mahjoub (1983)). Sei  $G = (V, E)$  ein Graph.

(a) Die folgenden Ungleichungen sind gültig bezüglich  $CUT(G)$ :

$$(4.13) \quad 0 \leq x_e \leq 1 \quad \text{für alle } e \in E,$$

$$(4.14) \quad x(F) - x(C \setminus F) \leq |F| - 1 \quad \text{für alle Kreise } C \subseteq E \text{ und alle } F \subseteq C, |F| \text{ ungerade},$$

$$(4.15) \quad x(E(W)) \leq \lceil \frac{1}{2}|W| \rceil \lfloor \frac{1}{2}|W| \rfloor \quad \text{für alle } W \subseteq V, |W| \geq 3,$$

$$(4.16) \quad x(F) \leq 2p \quad \text{für alle Fahrrad-}p\text{-Räder } F \subseteq E, p \geq 3 \text{ und ungerade}.$$

(b) *Ferner gilt:*

(4.13') *Die beiden Ungleichungen  $0 \leq x_e \leq 1$  aus (4.13) definieren Facetten von  $CUT(G)$  genau dann, wenn  $e$  in keinem Kreis der Länge drei enthalten ist.*

(4.14') *Eine Ungleichung (4.14) definiert eine Facette von  $CUT(G)$  genau dann, wenn der Kreis  $C$  keine Diagonale enthält.*

(4.15') *Eine Ungleichung (4.15) definiert eine Facette von  $CUT(G)$  genau dann, wenn  $|W|$  ungerade ist.*

(4.16') *Alle Ungleichungen (4.16) definieren Facetten von  $CUT(G)$ .*

□

Ein Fahrrad-p-Rad (bicycle p-wheel)  $F \subseteq E$  ist dabei eine Kantenmenge, die aus einem Kreis der Länge  $p$  besteht, aus den Kanten, die von zwei weiteren Knoten  $u, v$  zu allen Knoten des Kreises führen, und aus der Kante  $uv$ . In Bild 4.3 ist ein Fahrrad-5-Rad gezeichnet.

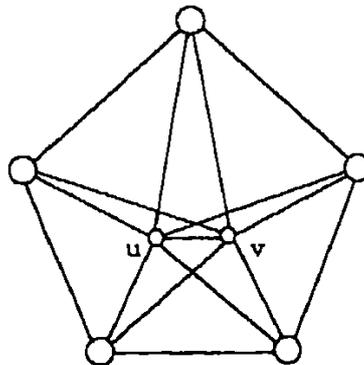


Bild 4.3

Ferner sind mehrere relativ allgemeine Verfahren bekannt, mit denen man weitere Facetten aus den in Satz (4.12) angegebenen konstruieren kann. Eine besonders interessante Beobachtung ist die folgende

(4.17) Satz. *Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Dann gilt*

$$CUT(G) = \{x \in \mathbb{R}^E \mid x \text{ erfüllt (4.13) und (4.14)}\}$$

genau dann, wenn  $G$  nicht zum vollständigen Graphen  $K_5$  kontrahierbar ist.  $\square$

Jedem Polytop  $P$  kann man einen Graphen  $G(P)$ , das *Skelett* von  $P$ , wie folgt zuordnen. Die Ecken des Polytops  $P$  sind die Knoten von  $G(P)$ , und zwei Knoten von  $G(P)$  sind adjazent, falls sie auf  $P$  durch eine Kante verbunden sind. Der Abstand  $\text{dist}(u,v)$  zweier Knoten  $u,v$  eines zusammenhängenden Graphen ist die Länge des kürzesten Weges von  $u$  nach  $v$ . Der *Diameter* eines Graphen ist das Maximum aller Abstände  $\text{dist}(u,v)$ , und der *Diameter eines Polytopes* ist der Diameter seines Skeletts.

Für den Diameter von  $\text{CUT}(G)$  sind scharfe obere und untere Schranken bekannt. Verblüffend ist das folgende Resultat

(4.18) Satz. Der Diameter von  $\text{CUT}(K_n)$  ist eins.  $\square$

Dies bedeutet, daß jede Ecke von  $\text{CUT}(K_n)$  mit jeder anderen Ecke benachbart ist. Insbesondere folgt daraus, daß man bei der Lösung eines linearen Programms  $\max c^T x, x \in \text{CUT}(K_n)$  von jeder Startecke im Prinzip in einem Schritt des Simplexalgorithmus zur Optimalecke gelangen kann. Man weiß allerdings nicht wie!

#### 4.3 Das zum Linear-Ordering-Problem gehörige Polytop

Ein *Turnier* in einem vollständigen Digraphen  $D_n = (V, A_n)$  ist eine Bogenmenge  $T \subseteq A_n$ , so daß je zwei Knoten  $i, j \in V$  durch genau einen Bogen verbunden sind. Ein Turnier heißt *azyklisch*, falls es keinen gerichteten Kreis enthält. Mit diesen Bezeichnungen kann man das Linear-Ordering-Problem folgendermaßen formulieren:

Finde in  $D_n$  ein azyklisches Turnier maximalen Gewichts.

Das zum Linear-Ordering-Problem gehörende Polytop  $P_{LO}^n$  kann somit wie folgt definiert werden:

$$P_{LO}^n := \text{conv}\{x^T \in \mathbb{R}^{A_n} \mid T \subseteq A_n \text{ azyklisches Turnier}\}.$$

Linear-Ordering-Probleme können also mit Hilfe des linearen Programms

$$\max c^T x, \quad x \in P_{LO}^n$$

gelöst werden.

In Grötschel, Jünger & Reinelt (1982) wurde u. a. folgendes gezeigt.

(4.19) Satz. Sei  $D_n = (V, A_n)$  ein vollständiger Digraph,  $n \geq 2$ . Dann gilt:

(a) Das Gleichungssystem

$$(4.20) \quad x_{ij} + x_{ji} = 1 \quad \text{für alle } i, j \in V, i \neq j$$

ist ein minimales Gleichungssystem bezüglich  $F_{LO}^n$ . (Daraus folgt  $\dim P_{LO}^n = \binom{n}{2}$ .)

(b) Die Ungleichungen

$$(4.21) \quad 0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad (i, j) \in A_n$$

definieren Facetten von  $P_{LO}^n$ . Dabei definieren jedoch die beiden Ungleichungen  $x_{ij} \leq 1$  und  $x_{ji} \geq 0$  jeweils ein und dieselbe Facette.

(c) Für jeden gerichteten Kreis  $C \subseteq A_n$  ist die Ungleichung

$$(4.22) \quad x(C) \leq |C| - 1$$

gültig bezüglich  $P_{LO}^n$ . Jedoch definieren lediglich die zu Kreisen der Länge drei gehörigen Ungleichungen Facetten von  $P_{LO}^n$ .

(d) Es seien  $k \geq 3$  und  $n \geq 2k$ ,  $U = \{u_1, \dots, u_k\}$ ,  $W = \{w_1, \dots, w_k\}$   $U \cap W = \emptyset$ . Die Bogenmenge

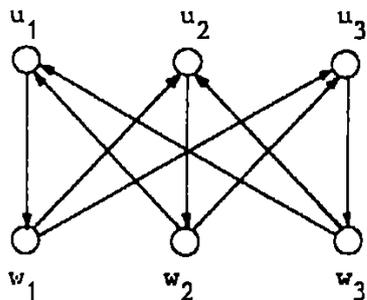
$$F = \{(u_i, w_i) \mid i = 1, \dots, k\} \cup \{(w_i, u_j) \mid i \neq j, i, j = 1, \dots, k\}$$

heißt k-Zaun (siehe Bild 4.4 (a)). Für alle k-Zäune  $F \subseteq A_n$  definiert die Ungleichung

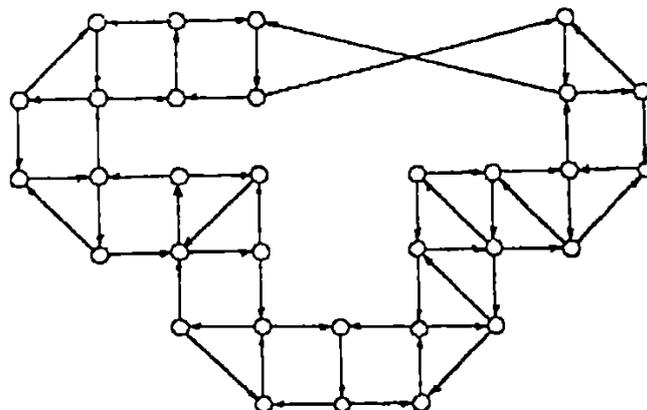
$$(4.23) \quad x(F) \leq k^2 - k + 1$$

eine Facette von  $P_{LO}^n$ . □

Es sind noch weitere Facetten von  $P_{LO}^n$  bekannt, etwa solche die von Möbiusleitern (siehe Bild 4.4 (b)), k-Rädern und anderen Digraphen abgeleitet sind. Die Definitionen der zugehörigen Ungleichungen sind jedoch reichlich kompliziert. Wir verweisen hierzu auf Reinelt (1985).



(a) 3-Zaun



(b) Möbiusleiter

Bild 4.4

Auch  $P_{LO}^n$  hat einen überraschend kleinen Diameter. Young (1978) konnte zeigen.

(4.24) Satz. Der Diameter von  $P_{LO}^n$  ist zwei für  $n \geq 2$ .

### 5. Schnittebenenverfahren

Gegeben sei ein System von Ungleichungen in  $n$  Variablen

$$(5.1) \quad a_i^T x \leq \alpha_i \quad i = 1, \dots, m$$

mit  $a_i \in \mathbb{Q}^n$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ . Mit  $\ell_i$  wollen wir die Inputlänge der  $i$ -ten Ungleichung bezeichnen, d. h. die Anzahl der Speicherplätze, die notwendig sind, um den Vektor  $a_i$  und die Zahl  $\alpha_i$  binär darzustellen. Es sei  $L := \max\{\ell_i \mid i = 1, \dots, m\}$ . Mit Hilfe der Ellipsoidmethode kann man zeigen, daß lineare Programme  $\max c^T x$ ,  $x$  erfüllt (5.1), genau dann in einer Anzahl von Rechenschritten gelöst werden können, die polynomial in  $L$  und der Inputlänge von  $c$  ist, falls das

(5.2) Separierungsproblem. *Gegeben  $y \in \mathbb{Q}^n$ , entscheide, ob  $y$  (5.1) erfüllt und falls nicht, finde eine Ungleichung, die  $y$  verletzt.*

in einer Zeit gelöst werden kann, die polynomial in  $L$  und der Inputlänge von  $y$  ist, siehe Grötschel, Lovász & Schrijver (1981). Man beachte hierbei, daß  $L$  unabhängig von der Anzahl der Ungleichungen ist! In der Tat können - bei geeigneter Modifikation der Problemstellung - sogar unendlich viele Nebenbedingungen zugelassen werden.

Wie wir gesehen bzw. angedeutet haben, entstehen bei der polyedrischen Formulierung von kombinatorischen Optimierungsproblemen  $(E, I, c)$  fast immer lineare Programme mit einer Anzahl von Nebenbedingungen, die exponentiell in der Variablenzahl  $|E|$  ist. Das oben zitierte Resultat zeigt jedoch, daß die Anzahl der Ungleichung nicht wichtig ist, wenn man nur in der Lage ist, alle Ungleichungen in polynomialer Zeit (in  $L$ ) zu überprüfen.

Ist  $(E, I, c)$  in polynomialer Zeit lösbar, so folgt aus dem obigen Resultat insbesondere, daß das Separierungsproblem bezüglich des zugehörigen Polyeders  $P_I$  in polynomialer Zeit gelöst werden kann. Für  $NP$ -vollständige kombinatorische Optimierungsprobleme ist das natürlich nicht zu erwarten (andernfalls hätte man  $P = NP$  gezeigt). Von außerordentlicher praktischer Bedeutung ist jedoch die Tatsache, daß es häufig auch bei Polytopen, die zu  $NP$ -vollständigen Problemen gehören, Klassen von facetten-definierenden Ungleichungen gibt, für die das Separierungsproblem in polynomialer Zeit gelöst werden kann. Diese Ungleichungen kann man dann in Schnittebenenverfahren verwenden.

Prinzipiell geht man hierbei wie folgt vor.

Zunächst wird die Ellipsoidmethode durch das Simplexverfahren ersetzt. Die Ellipsoidmethode garantiert zwar theoretisch eine polynomiale Laufzeit, ist aber praktisch (derzeit noch) sehr ineffizient und numerisch instabil. Der Simplexalgorithmus hat dagegen ein empirisch hervorragendes Laufzeitverhalten.

Ist nun ein kombinatorisches Optimierungsproblem  $(E, I, c)$  gegeben, und ist  $P_I = \text{conv}\{x^I \in \mathbb{R}^E \mid I \in I\}$ , so betrachtet man das lineare Programm

$$(5.3) \quad \max c^T x, \quad x \in P_I.$$

Man versucht  $P_I$  in der Form (3.1) darzustellen. Nehmen wir an, es werden Ungleichungssysteme  $U_1, \dots, U_k$  gefunden, so daß gilt

$$(5.4) \quad P_I \subseteq \{x \in \mathbb{R}^E \mid x \text{ erfüllt } U_1, \dots, U_k\} \quad \text{und}$$

$$(5.5) \quad P_I = \text{conv}\{x \in \mathbb{R}^E \mid x \text{ erfüllt } U_1 \text{ und } x \text{ ganzzahlig}\}.$$

Man beginnt mit dem linearen Programm

$$(5.6) \quad \max c^T x, \quad x \text{ erfüllt } U_1.$$

(Ist  $U_1$  zu groß, um alle Ungleichungen aus  $U_1$  explizit aufzuschreiben, wählt man natürlich zunächst ein Teilsystem  $U'_1 \subseteq U_1$  aus.) Der Simplexalgorithmus liefert eine optimale Lösung  $x^*$  von (5.6). Ist  $x^*$  ganzzahlig, so hat man wegen (5.5) eine optimale Lösung von (5.3) gefunden, also das kombinatorische Optimierungsproblem gelöst.

Ist  $x^*$  gebrochen, so ruft man die Separierungsverfahren bezüglich der Ungleichungssysteme  $U_2, \dots, U_k$  auf. Wird eine (oder mehrere) verletzte Ungleichung gefunden, so fügt man sie als neue Restriktion zum gegenwärtigen LP hinzu, löst das neue LP und führt auf diese Weise weiter fort.

Allgemeine Strategieregeln zur Auswahl der Ungleichungssysteme, die überprüft werden, und die Anzahl der Ungleichungen, die in jedem Schritt hinzugefügt werden sollen, lassen sich nicht angeben. Es scheint so, daß man bei jedem Problem spezielle empirische Erfahrungen hierüber sammeln und

auswerten muß. Außerdem hat es sich gezeigt, daß die Anwendung von Heuristiken zur Schnittebenenenerkennung (statt - falls vorhanden - exakter Separationsverfahren, die z. T. recht hohe - jedoch polynomiale - Laufzeiten haben) sinnvoll ist und zu erheblichen praktischen Laufzeitverbesserungen führt.

Das oben beschriebene Verfahren endet entweder mit einer optimalen Lösung von (5.3) oder mit einer gebrochenen optimalen Lösung des gegenwärtigen linearen Programms, für die in den Ungleichungssystemen  $U_1, \dots, U_k$  keine Schnittebene gefunden werden kann. In diesem Falle gibt man entweder mit einer (i. a. sehr guten) oberen Schranke für den Wert von (5.3) auf oder beginnt eine Branch & Bound-Phase. Wie dies zu machen ist, ist offensichtlich, allerdings i. a. recht mühsam und nur mit viel Arbeitsaufwand und empirischen Rechenvergleichen zu implementieren.

Ist das System von Ungleichungen  $U_1, \dots, U_k$  vollständig bezüglich  $P_I$ , so endet dieses Schnittebenenverfahren immer mit einer ganzzahligen Lösung. So könnten wir mit diesem Verfahren z. B. einen maximalen Wald in einem vollständigen Graphen (wähle Ungleichungssystem (3.8)), ein maximales 2-Matching (wähle (4.2), (4.3) und (4.7), siehe (4.8)) und einen maximalen Schnitt in einem Graphen, der nicht zu  $K_5$  kontrahierbar ist, (wähle (4.13), (4.14), siehe (4.17)) bestimmen, ohne in die Branch & Bound-Phase eintreten zu müssen. Empirisch hat es sich gezeigt, daß bei manchen NP-vollständigen Problemen am Ende der Schnittebenenphase sehr häufig ganzzahlige Lösungen (und damit Optimallösungen für (5.3)) auftreten, siehe z. B. Grötschel, Jünger & Reinelt (1984a), Barahona & Maccioni (1982). Beim Travelling-Salesman-Problem hingegen tritt eine solche Situation wesentlich seltener ein, siehe Crowder & Padberg (1980).

Für die in Abschnitt 4 besprochenen Probleme liegen die folgenden Erfahrungen in Bezug auf Schnittebenenverfahren vor.

#### 5.1 Das Travelling-Salesman-Problem

Bezüglich dieses Problems wurden die ersten sehr erfolgreichen Schnittebenenverfahren der oben beschriebenen Art entwickelt, siehe hierzu Grötschel (1980), Hong & Padberg (1980) und Crowder & Padberg (1980). Einen Überblick über Schnittebenenverfahren für das TSP und die dabei auftretenden Probleme gibt Padberg & Grötschel (1985).

Man beginnt mit den Ungleichungen (4.2) und dem Gleichungssystem (4.3). Die Kurzzyklusungleichungen (4.4) und die 2-Matching-Ungleichungen (4.7) sind in polynomialer Zeit überprüfbar mit Netzwerkflußmethoden. Die drei oben genannten Studien benutzen hierzu jedoch Heuristiken. Dennoch konnten Travelling Salesman Probleme mit bis zu 318 Städten in vernünftigen Rechenzeiten gelöst werden. Bild 5.1 zeigt dieses bisher größte gelöste Travelling-Salesman-Problem. Es handelt sich wiederum um ein Bohrproblem, siehe Abschnitt 2.1

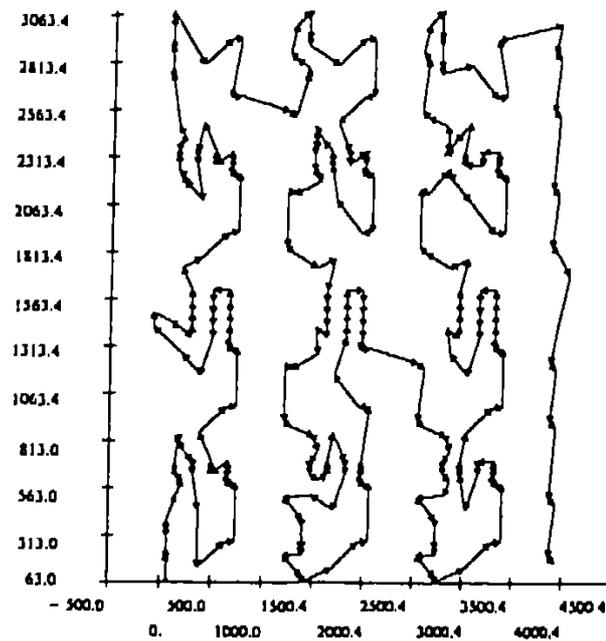


Bild 5.1

Gegenwärtig wird von G. Holland und dem Autor ein Schnittebenenverfahren entwickelt, das die Erfüllung aller Ungleichungen (4.4) und (4.7) garantiert

Wir zeigen kurz, wie man die Kurzzyklusbedingungen (4.4) in polynomialer Zeit überprüfen kann. Sei  $x^*$  die optimale Lösung des letzten LP. Wir definieren den Graphen  $G = (V, E^*)$  mit  $E^* := \{ij \in E_n \mid x_{ij}^* > 0\}$ . Die Kanten  $ij \in E^*$  erhalten die Kapazität  $x_{ij}^*$ . Mit dem Maximalfluß-Algorithmus von Ford und Fulkerson (oder einer Variante dieses Algorithmus) bestimmt man einen Schnitt  $\delta(W^*)$  in  $G$  minimaler Kapazität  $x^*(\delta(W^*))$ . Gilt  $x^*(\delta(W^*)) \geq 2$ , so sind alle Kurzzyklusbedingungen erfüllt, andernfalls - wie man leicht ausrechnet - ist die Ungleichung  $x(E(W^*)) \leq |W^*| - 1$  durch  $x^*$  verletzt und kann als Schnittebene hinzugefügt werden. Ob es einen polynomialen Separierungsalgorithmus für die Klasse der Cliquesbaum-Ungleichungen (4.11) gibt, ist derzeit unbekannt. Selbst der Spezialfall der Kammungleichungen

(Cliquesbäume mit genau einem Griff) ist ungelöst. Ein schneller Separierungsalgorithmus für (4.11) würde sicherlich die vorhandenen Schnittebenenverfahren für das TSP erheblich beschleunigen.

Bemerkenswert ist, daß beim TSP in der Schnittebenenerkennungsphase i. a. nur recht wenige Schnitte gefunden werden. Hier hat man also nicht das Problem eine "geeignete" Menge von Schnittebenen auswählen zu müssen. Man fügt ganz einfach alle gefundenen Ungleichungen zum gegenwärtigen LP hinzu.

### 5.2 Das Max-Cut-Problem

Die Schnittebenenstudien hierzu sind noch nicht allzu umfangreich. Eine erste Implementation basierend auf Schnittebenenerkennungsheuristiken wurde in Barahona & Maccioni (1982) vorgenommen. Hier konnten Max-Cut Probleme auf Graphen mit 150 Knoten und 600 Kanten gelöst werden. Gegenwärtig wird in Augsburg ein Verfahren konzipiert, das einen exakten Separierungsalgorithmus für die Ungleichungen (4.14) enthält.

Zur Lösung eines Problems

$$\max c^T x, \quad x \in \text{CUT}(G)$$

startet man mit den trivialen Ungleichungen (4.13). Die (exponentiell vielen) Kreisungleichungen (4.14) können dadurch in polynomialer Zeit überprüft werden, daß das Separierungsproblem für (4.14) in ein kombinatorisches Optimierungsproblem umformuliert werden kann, das durch Anwendung eines Algorithmus zur Bestimmung kürzester Wege gelöst werden kann. (Verwendet man diesen Separierungsalgorithmus zusammen mit der Ellipsoidmethode, so folgt aus Satz (4.17), daß Max-Cut Probleme auf Graphen, die nicht zu  $K_5$  kontrahierbar sind, in polynomialer Zeit gelöst werden können, siehe Barahona (1983).) Auch das Separierungsproblem für die Fahrrad-p-Räder Ungleichungen kann mit Hilfe von Kürzeste-Wege-Methoden in polynomialer Zeit gelöst werden, siehe Gerards (1985). Ob die Cliquesungleichungen (4.15) in polynomialer Zeit überprüft werden können, ist derzeit nicht bekannt. Weitere offene Fragen in dieser Hinsicht sind in Barahona, Grötschel & Mahjoub (1985) zu finden.

### 5.3 Das Linear-Ordering-Problem

Für dieses Problem wurde in Grötschel, Jünger & Reinelt (1984a) ein Schnittebenenalgorithmus entwickelt, der speziell zur Lösung von Triangulations-

problemen in der Input-Output-Analyse gedacht war. Die meisten empirisch erhobenen Input-Output-Tabellen haben Zeilen- und Spaltenzahlen  $n$ , die zwischen 40 und 60 liegen. Da das Triangulationsproblem von erheblicher praktischer Bedeutung ist, wurden in der Vergangenheit eine Vielzahl von Verfahren zur Lösung von Problemen dieser Größenordnung vorgeschlagen. Jedoch ist es erstmals mit einem Schnittebenenverfahren gelungen, in diese Dimensionen vorzustößen, und zwar wurden in Grötschel, Jünger & Reinelt (1984b) alle den Autoren zugänglichen Input-Output-Matrizen innerhalb akzeptabler Rechenzeiten trianguliert.

Bei diesem Problem kann man aufgrund der Gleichungen (4.20) die Variablenzahl halbieren und beginnt die LP-Phase mit den trivialen Ungleichungen (4.21). Da alle Kreisungleichungen (4.22) redundant sind außer den Dreierkreisungleichungen, werden nur die Kreise der Länge drei durch Enumeration überprüft. Dies geschieht in  $O(n^3)$  Schritten. Bei den Rechenexperimenten in Grötschel, Jünger & Reinelt (1984a), Reinelt (1985) wurde empirisch beobachtet, daß bei den ersten zwei bis drei Schnittebenenenerkennungsphasen (Enumeration der Dreiecksungleichungen) bereits im Bereich  $40 \leq n \leq 60$  einige Tausend verletzte Ungleichungen entdeckt werden können. Die Hinzufügung aller verletzten Ungleichungen würde sehr bald zu nicht mehr handhabbaren linearen Programmen führen. In Reinelt (1985) sind mehrere Strategien zur Reduzierung der LP-Größe in einem solchen Fall beschrieben worden.

Für die  $k$ -Zaun-Ungleichungen (4.23), Möbiusleiter-Ungleichungen etc. sind keine polynomialen Separationsalgorithmen bekannt. Hierfür wurden Heuristiken entwickelt, die in Reinelt (1985) diskutiert werden.

Erstaunlich ist bei diesem Problem, daß die optimale LP-Lösung in den untersuchten rund 100 realen Problemen fast immer ganzzahlig war, also so gut wie nie die Branch & Bound-Phase aufgerufen werden mußte.

#### 5.4 Matching-Probleme

Den Schnittebenenansatz kann man natürlich auch auf kombinatorische Optimierungsprobleme anwenden, für die gute kombinatorische Optimierungsalgorithmen existieren. A priori erscheint es natürlich unsinnig, derartige Probleme mit Verfahren anzugehen, die potentiell eine exponentielle Laufzeit haben können.

In Grötschel & Holland (1985) wurde dies für das Matching Problem (finde in einem gerichteten Graphen  $G$  ein perfektes Matching minimalen Gewichts) versucht. Das erstaunliche Resultat dieser Rechenstudie ist, daß das in diesem Paper entworfene Schnittebenenverfahren etwa genau so schnell ist wie das derzeitig beste kombinatorische Verfahren zur Lösung von Matching Problemen.

Hier zeigt sich also, daß dieser Ansatz auch bei "gutartigen" Problemen erfolgreich sein kann. Dies ist insofern von Bedeutung als viele kombinatorische Probleme (wie z. B. das Matching Problem) selten in ihrer "reinen" Form in der Praxis auftreten. Häufig treten Nebenbedingungen auf, die bei einem LP-Ansatz (mit anschließender Branch & Bound-Phase) berücksichtigt werden können, die aber im Rahmen eines kombinatorischen Algorithmus nicht behandelt werden können.

Referenzen

- F. Barahona (1983), "The max-cut problem on graphs not contractible to  $K_5$ ", Operations Research Letters 2 (1983) 107 - 111.
- F. Barahona, M. Grötschel & A. R. Mahjoub (1985), "Facets of the bipartite subgraph polytope", Mathematics of Operations Research 10 (1985) 340 - 358.
- F. Barahona & E. Maccioni (1982), "On the exact ground states of three-dimensional Ising spin glasses", Journal of Physics A: Math. Gen. 15 (1982) L611 - L615.
- F. Barahona & A. R. Mahjoub (1983), "On the cut polytope", Report No. 83271-OR, Institut für Ökonometrie und Operations Research, Universität Bonn, Bonn, 1983.
- F. Barahona, R. Mahjoub, R. Rammal & J. P. Uhry (1982), "Morphology of ground states of two-dimensional frustration model", Journal of Physics A: Math. Gen. 15 (1982) 673 - 699.
- V. Chvátal (1973), "Edmonds polytopes and weakly hamiltonian graphs", Mathematical Programming 5 (1973) 29 - 40.
- B. Cook & W. R. Pulleyblank (1984), "Linear systems for constrained matching problems", Report No. 84323-OR, Institut für Ökonometrie und Operations Research, Universität Bonn, Bonn, 1984.
- H. Crowder & M. W. Padberg (1980), "Solving large-scale travelling salesman problems to optimality", Management Science 26 (1980) 495 - 509.
- J. Edmonds (1965), "Maximum matchings and a polyhedron with 0-1 vertices", J. Res. Nat. Bur. Standards Sect B 69 (1965) 125 - 130.
- J. Edmonds (1971), "Matroids and the greedy algorithm", Mathematical Programming 1 (1971) 127 - 136.
- J. Edmonds & E. L. Johnson (1970), "Matching: a well-solved class of integer linear programs", in: R. K. Guy et al. (eds.), "Combinatorial Structures and their Applications", Gordon and Brach, New York, 1970, 89 - 92.
- M. R. Garey & D. S. Johnson (1979), "Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness", Freeman, San Francisco, 1979.
- B. Gerards (1985), "Testing the odd bicycle wheel inequalities for the bipartite subgraph polytope", Mathematics of Operations Research 10 (1985) 359 - 360.
- M. Grötschel (1980), "On the symmetric travelling salesman problem: solution of a 120-city problem", Mathematical Programming Study 12 (1980) 61 - 77.
- M. Grötschel (1984), "Developments in combinatorial optimization", in: W. Jäger, J. Moser & R. Remmert (eds.), "Perspectives in Mathematics" (Anniversary of Oberwolfach 1984), Birkhäuser, Basel, 1984, 249 - 294.

- M. Grötschel & O. Holland (1985), "Solving matching problems with linear programming", Mathematical Programming 1985, to appear.
- M. Grötschel, M. Jünger & G. Reinelt (1985), "Facets of the linear ordering polytope", Mathematical Programming 33 (1985) 43 - 60.
- M. Grötschel, M. Jünger & G. Reinelt (1984a), "A cutting plane algorithm for the linear ordering problem", Operations Research 32 (1984) 1195 - 1220.
- M. Grötschel, M. Jünger & G. Reinelt (1984b), "Optimal triangulation of large real world input-output matrices", Statistische Hefte 25 (1984) 261-295.
- M. Grötschel, L. Lovász & A. Schrijver (1981), "The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization", Combinatorica 1 (1981) 169 - 197.
- M. Grötschel, L. Lovász & A. Schrijver (1986), "The Ellipsoid Method and Combinatorial Optimization", Springer, Berlin, 1986, to appear.
- M. Grötschel & M. W. Padberg (1979), "On the symmetric travelling salesman problem I: inequalities", "On the symmetric travelling salesman problem II: lifting theorems and facets", Mathematical Programming 16 (1979) 265 - 280, 281 - 302.
- M. Grötschel & M. W. Padberg (1985), "Polyhedral Theory", in: E. Lawler, J.-K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan, D. B. Shmoys (eds.), "The Travelling Salesman Problem", Wiley, New York, 1985, 251 - 305.
- M. Grötschel & W. Pulleyblank (1981), "Clique tree inequalities and the symmetric travelling salesman problem", Report No. 81196-OR, Institut für Ökonometrie und Operations Research, Universität Bonn, Bonn, 1981.
- M. W. Padberg & M. Grötschel (1985), "Polyhedral Computations", in: E. Lawler, J.-K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan, D. B. Shmoys (eds.), "The Travelling Salesman Problem", Wiley, New York, 1985, 307 - 360.
- M. W. Padberg & S. Hong (1980), "On the symmetric travelling salesman problem: a computational study", Mathematical Programming Study 12 (1980) 78 - 107.
- Ch. Papadimitriou (1984), "Polytopes and complexity", in: W. R. Pulleyblank (ed.), "Progress in Combinatorial Optimization", Academic Press, Toronto, 1984, 295 - 305.
- W. R. Pulleyblank (1983), "Polyhedral combinatorics", in: A. Bachem, M. Grötschel & B. Korte (eds.), "Mathematical Programming: The State of the Art, Bonn 1982", Springer, Berlin, 1983, 312 - 345.
- G. Reinelt (1985), "The Linear Ordering Problem: Algorithms and Applications", Heldermann Verlag, Berlin, 1985.
- H. P. Young (1978), "On permutations and permutation polytopes", Mathematical Programming Study 8 (1978) 128 - 140.