MARTIN GRÖTSCHEL

Einblicke in die diskrete Mathematik

„Diskrete Mathematik, was ist das?“, ist eine typische Frage von Lehrern mit traditioneller Mathematikausbildung, denn dort kam und kommt diskrete Mathematik kaum vor. Die etwas Aufgeschlosseneren fragen: „Wenn (schon wieder) etwas Neues unterrichtet werden soll, was soll denn dann im Lehrplan gestrichen werden?“ Auf die zweite Frage wird hier nicht eingegangen. Das Ziel dieses Aufsatzes ist es, in diskrete Mathematik einzuführen, Interesse an diesem Fachgebiet zu wecken und dazu anzuregen, dieses auch im Schulunterricht (ein wenig) zu berücksichtigen. Die Schüler und Schülerinnen werden dafür dankbar sein – eine Erfahrung, die in vielen Unterrichtsreihen gemacht wurde.

Bevor ich mit Betrachtungen von diskreter Mathematik „von höherer Warte aus“ beginne, sollen drei konkrete Beispiele in das Gebiet einführen.

1 Drei Beispiele diskreter Problemstellungen

1.1 Einsatzplanung der Gelben Engel des ADAC

Wenn ein Fahrzeug eine Panne hat, wird meistens ein Notruf an einen Hilfsdienst abgegeben. Besonders gefragt sind die Gelben Engel des ADAC. Der ADAC betreibt fünf Hilfezentralen, die den Einsatz von rund 1700 Pannenhelfern (und zusätzlichen Straßendienstpartnern) steuern. Mehr als 4 Millionen Pannen wurden dem ADAC im Jahr 2010 gemeldet. Die Aufgabe der Disponenten besteht darin, bei einem Anruf schnell zu entscheiden, welches Hilfsfahrzeug zu dem Havaristen fährt, und dem Anrufer mitzuteilen, wann ungefähr mit Hilfe zu rechnen ist. Bei der Planung, die seit einigen Jahren mit mathematischen Algorithmen unterstützt wird, ist auf guten Service, aber auch möglichst kostengünstigen Einsatz der Fahrzeuge zu achten, wobei gleichzeitig viele Nebenbedingungen wie Arbeits- und Pausenzeiten der Fahrer zu berücksichtigen sind. Dies ist ein Problem der kombinatorischen Optimierung. Hier sind „diskrete Entscheidungen“ (Welches Fahrzeug bedient wann welchen Hilfesuchenden, und welche Strecke soll es fahren?) möglichst optimal zu treffen.

1.2 CD-Spieler

Es gibt heute kaum noch ein technisches Gerät, das ohne Mathematik funktioniert. Der CD-Player liefert ein schönes Beispiel für den Übergang vom Kontinuierlichen zum Diskreten und zurück. Bei einer Tonaufnahme wird das kontinuierliche Signal 44.100 Mal pro Sekunde gemessen und dabei in eine Folge von Nullen und Einsen verwandelt, die dann auf eine CD in Rillen (Pits) und Nicht-Rillen (Lands) „gepresst“ wird. (Die Übergänge von Pit zu Land und Land zu Pit werden als 1 interpretiert. Lands und Pits werden als Folgen von Nullen interpretiert.) Beim mechanischen Pressen und Laser gesteuerten Abspielen sind Fehler (z. B. durch Staubkörner) unvermeidbar. Die Verwandlung des kontinuierlichen Signals in eine Folge von Nullen und Einsen sollte daher so erfolgen, dass möglichst viele Fehler erkannt und beim späteren Umwandeln in Schall korrigiert werden können. Die Fehlerbehebung muss natürlich so schnell geschehen, dass sie vom Hörer nicht bemerkt wird. Lösungen für dieses „CD-Problem“ und viele ähnlich gelagerte Fragestellungen liefert die Codierungstheorie. Hierzu ist es erforderlich, zunächst die Fehlerarten zu erfassen, ihre Wahrscheinlichkeiten zu prognostizieren und Codes zu entwerfen, die (die meisten dieser) Fehler erkennen und algorithmisch sehr schnell korrigieren. Die primären Messdaten von 75 Minuten Musik benötigen ungefähr 800 MB Speicherplatz, die derzeit verwendete Codierung von Audiodaten bläht das Datenvolumen auf 2,4 GB auf. Dies ist der Preis, den man für einen fehlerfreien Hörgenuss zahlen muss.

1.3 Das „Geburtstagsparadoxon“

Das nächste Beispiel stammt aus der kombinatorischen Wahrscheinlichkeitstheorie und ruft immer wieder Verblüffung bei mathematisch Unkundigen hervor, da das Ergebnis nicht intuitiv verständlich ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von n Personen zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben? (Das Geburtsjahr wird nicht berücksichtigt.) Die Wahrscheinlichkeit berechnet man als Anzahl der günstigen Fälle geteilt durch Anzahl der möglichen Fälle (multipliziert mit 100, falls man sie in Prozent ausdrücken will). Die Anzahl der möglichen Fälle ist einfach zu bestimmen. Jede Person kann an jedem Tag des Jahres Geburtstag haben, also gibt es 365 Möglichkeiten. Daraus folgt, dass die Anzahl der möglichen „Geburtstagsmuster“ (Verteilung der n Geburtstage auf die Tage des Jahres) 365^n ist. Statt der günstigen Fälle berechnen wir die ungünstigen. Ein Geburtstagsmuster ist ungünstig, wenn an keinem Tag des Jahres zwei der n Personen Geburtstag haben. Wir ordnen zur Analyse die n Personen in einer beliebigen Reihenfolge an. Die erste Person kann natürlich an allen 365 Tagen Geburtstag haben, die zweite darf nicht am selben Tag wie die erste Geburtstag haben, also verbleiben nur noch 364 erlaubte Tage. Die dritte Person hat nur noch 363 Möglichkeiten, Geburtstag zu haben, ohne dass an einem Tag zwei Personen gleichzeitig Geburtstag haben. Aus der Fortführung dieser einfachen Überlegung folgt, dass die Anzahl der Möglichkeiten, die Geburtstage von n Personen so auf 365 Tage zu verteilen, dass kein Doppelgeburtstag vorkommt, durch das Produkt $365\,(365-1)\,(365-2)\ldots(365-n+1)$ bestimmt werden kann. Berechnet man nun den Wert (1 minus Wahrscheinlichkeit der ungünstigen Fälle)

$$1 - 365\,(365-1)(365-2)\ldots(365-n+1)\,/\,365^n,$$

so ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Numerische Auswertung zeigt, dass dieser Wert für $n = 23$ über 0,5 liegt. Will man also wetten, dass in einer Gruppe von n Personen zwei am selben Tag Geburtstag haben, so hat man gute Erfolgsaussichten, sobald die Gruppe 23 oder mehr Personen umfasst. Bei 50 Personen liegt die Wahrscheinlichkeit eines Doppelgeburtstags bei 97 %, eine sehr sichere Bank für eine Wette!

2 Diskrete Mathematik – eine unvollständige Begriffsbestimmung

Es gibt keine umfassende Definition von diskreter Mathematik, die dieses Fachgebiet klar von anderen abgrenzt. Deshalb beginne ich erst einmal mit einer Aufzählung von Beispielen. Zur diskreten Mathematik gehören ganz eindeutig Graphentheorie und Kombinatorik, aber auch weniger bekannte Gebiete wie die Matroidtheorie. Viele Teile der theoretischen Informatik werden zur diskreten Mathematik gezählt: Kryptographie, Codierungstheorie und Informationstheorie zum Beispiel. Ganzzahlige und kombinatorische Optimierung gehören zur diskreten Mathematik; bei der linearen Optimierung kann man, wie ich erläutern werde, unterschiedlicher Auffassung sein, ebenso bei der Spieltheorie und der Entscheidungstheorie. Manche betrachten Zahlentheorie, Algebra, Verbandstheorie, diskrete Geometrie und Topologie (oder zumindest Teilgebiete davon) auch als diskrete Mathematik, selbst wenn diese Gebiete viel älter sind und eine große mathematische Tradition haben. Berührungen gibt es zur Mengenlehre, mathematischen Logik und Statistik / Wahrscheinlichkeitstheorie.

Vielleicht ist es einfacher, diskrete Mathematik im Spannungsfeld zur kontinuierlichen Mathematik zu erklären. Diskrete Mathematik befasst sich (in der Regel) mit diskreten, meistens sogar nur mit endlichen Mengen. Zwischenwerte (wie $\frac{1}{2}$ zwischen 0 und 1) sind nicht erlaubt, und Grenzprozesse, die Hauptmethodik der Analysis, gibt es (in der Regel) nicht. Die Antworten in der diskreten Mathematik lauten ja oder nein, 0 oder 1 oder sind ganze Zahlen. Stetigkeit und Differenzierbarkeit spielen (selten) eine Rolle, dafür Abzählen und konkrete endliche Konstruktionen.

Die diskrete Mathematik der heutigen Zeit hatte natürlich viele Vorläufer, ihr enormer Aufschwung kam mit der Einführung von Computern. Bits, Bytes und Speicherplätze sind diskrete Objekte, Algorithmen operieren auf diesen, und der Entwurf und die Analyse von Algorithmen, das Abschätzen der Anzahl von elementaren Rechenschritten, spielen in der diskreten Mathematik eine große Rolle. Die Komplexitätstheorie, die sich mit der Abschätzung des Rechenaufwands zur Lösung von Problemklassen auf Computern beschäftigt, ist geradezu ein Paradebeispiel für die Verschmelzung von theoretischer Informatik und diskreter Mathematik.

3 Diskrete Mathematik: Erklärung anhand einer Beispielfolge

Zu einem Artikel wie diesem gehört ein „theoretischer Überbau" wie im vorhergehenden Abschnitt, auch wenn so etwas der Leserschaft, die sich mit dem behandelten Thema nicht auskennt, nicht viel bringt. Deshalb soll hier anhand einer Folge ineinander übergehender einfacher Beispiele nochmals begonnen werden. Ich möchte in die diskrete Denkweise einführen und den Unterschied zu kontinuierlichen Fragestellungen verdeutlichen.

3.1 Gleichungen

Wir stellen uns vor, dass n reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gegeben sind, wobei nicht alle a_i null sein dürfen, und dass eine weitere reelle Zahl b gegeben ist. Wir betrachten die Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

die jeder schon einmal gesehen hat, der sich mit Mathematik beschäftigt. Ist $n = 2$, so ist die Lösungsmenge dieser Gleichung eine Gerade in der Ebene, für $n = 3$ ist die Lösungsmenge eine Ebene im dreidimensionalen Raum. Im allgemeinen Fall bezeichnen wir die Lösungsmenge der Gleichung als Hyperebene im n-dimensionalen reellen Vektorraum.

Ist nicht nur eine Gleichung dieser Form, sondern sind n Gleichungen gegeben, und ist die Koeffizientenmatrix $A = (a_{ij})$ nichtsingulär, so wissen wir aus der linearen Algebra, dass die Lösungsmenge ein eindeutig bestimmter Punkt im n-dimensionalen Raum ist. Diesen können wir mit sehr vielen verschiedenen Methoden berechnen. Cramers Regel gibt eine hübsche (aber unpraktische) Formel zur Berechnung an, am populärsten ist vermutlich der Gauss'sche-Eliminationsalgorithmus.

Programmieren wir den Gauss- oder irgendeinen anderen Algorithmus zur Lösung eines linearen Gleichungssystems, so bemerken wir sofort, dass wir die Illusion, mit beliebigen reellen Zahlen arbeiten zu können, aufgeben müssen. Computer können nur mit rationalen Zahlen rechnen, und das heißt, dass wir als Eingabe für jeden Berechnungsalgorithmus nur rationale Zahlen erlauben können. (O. k., es gibt auch Computeralgebra-Systeme, die mit einigen irrationalen Zahlen symbolisch rechnen können, aber das ist in diesem Zusammenhang irrelevant.)

Wir wissen, dass Gleichungen skaliert werden können, d. h., wenn wir eine lineare Gleichung in der obigen Form mit einer beliebigen von 0 verschiedenen Zahl durchmultiplizieren (linke und rechte Seite gleichzeitig), so ändert sich die Lösungsmenge nicht. Sind also die Eingabematrix A und der Vektor b rational, so können wir für jede Zeile des Gleichungssystems den Hauptnenner der Koeffizienten bestimmen und mit diesem die jeweilige Zeile durchmultiplizieren. Auf diese Weise transformieren wir unser ursprüngliches Gleichungssystem in ein neues Gleichungssystem (mit gleicher Lösungsmenge), das nur ganzzahlige Koeffizienten besitzt.

Die Beschäftigung mit Computern hat uns hier bereits zu einem Schritt in das Diskrete geführt. Wir haben den Rechenbereich der reellen Zahlen verlassen (weil wir mit reellen Zahlen in der Realität nicht rechnen können) und können uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit sogar auf ganzzahlige Daten zurückziehen.

Das Lösen von Gleichungssystemen ist ein uraltes Problem der Mathematik. Schon die Chinesen kannten vor über 1000 Jahren den GAUSS-Algorithmus, und in vielen Kulturen der Welt, die Mathematik entwickelt haben, sind Rechenverfahren zur Lösung von linearen Gleichungen gefunden worden.

3.2 Ungleichungen

Wir machen nun einen harmlosen, aber wichtigen kleinen Schritt. Wir ersetzen das Gleichheitszeichen durch ein Ungleichheitszeichen und betrachten die Menge der Lösungen dieses Ungleichungssystems. Setzen wir

$$P := \{x \mid Ax \leq b\},$$

so ist die Menge P nichts anderes als ein Polyeder im n-dimensionalen Raum. Da wir uns bereits von reellen Zahlen verabschiedet haben, betrachten wir P nunmehr als Lösungsmenge im n-dimensionalen rationalen Vektorraum Q^n. Polyeder P, die beschränkt sind, d. h. $\mathrm{P} \subseteq \{x \in Q_n \mid \| x \| \leq B\}$ nennt man Polytope. Polytope haben in der Antike bereits eine wichtige Rolle gespielt. In unzähligen Abhandlungen sind Polytope wie Tetraeder, Würfel, Ikosaeder etc. dargestellt. Die Klassifikation von regulären und quasi-regulären Polytopen ist in der Geometrie weit vorangetrieben worden. Die analytische Behandlung von Polyedern ist jedoch erst im vergangenen Jahrhundert richtig in Gang gekommen, auch wenn es natürlich schon einige Vorläufer gab.

3.3 Lineare Optimierung

Polyeder sind interessante „Zwischenobjekte“ an der Schnittstelle zwischen diskreter und kontinuierlicher Mathematik. Die lineare Optimierung (auch lineare Programmierung genannt) ist das mathematische Teilgebiet, das sich mit der Lösung von Optimierungsaufgaben der folgenden Form

$$\max c^T x$$

$$Ax \leq b$$

beschäftigt. Es gibt kaum eine Ware oder Dienstleistung in unserem modernen Leben, an deren Bereitstellung die lineare Programmierung nicht beteiligt ist. Sie wird bei der Herstellung von Produkten zur Kostenminimierung benutzt, genauso wie bei der Einsatzplanung von Fahrzeugen und Fahrern in der Logistik und im Verkehr etc. Der Einsatz von linearer Optimierung spart weltweit jährlich Billionen Euro und hilft insbesondere ressourcenschonend zu planen.

Die Methoden zur Lösung linearer Programme stammen sowohl aus der kontinuierlichen als auch aus der diskreten Mathematik. Die weiterhin bedeutendste Methode zur Lösung linearer Programme ist der Simplex-Algorithmus. Dieser bestimmt in einem ersten Schritt eine Ecke eines Polyeders und geht dann von der gerade vorliegenden Ecke zu einer besseren Ecke so lange weiter, bis es von der gegenwärtigen Ecke aus gesehen keine bessere Nachbarecke mehr gibt. Dann ist das Optimum des linearen Programms beweisbar erreicht. Dies ist ein typisches diskretes Vorgehen (Wandern von Ecke zu Ecke, was man sich anschaulich sehr gut vorstellen kann), die tatsächliche Durchführung der Rechnungen auf einem Computer basiert auf der wiederholten Lösung linearer Gleichungssysteme.

Eine in den letzten 25 Jahren populär und erfolgreich gewordene Lösungsmethodik beruht auf sogenannten Innere-Punkte-Verfahren. Diese stammen aus der nichtlinearen Optimierung und sind (komplizierte) Fortentwicklungen des Newton-Verfahrens, worauf ich hier nicht im Detail eingehen kann. Es gibt enge Beziehungen zur Riemannschen Geometrie und ganz allgemein zur Differentialgeometrie. Hier also verschmelzen kontinuierliche und diskrete Mathematik (was natürlich in keiner Hinsicht ein Fehler ist, denn es ist immer gut, mehrere verschiedene Werkzeuge zur Lösung eines Problems zu haben).

3.4 Polytope und Graphen

Richten wir nun einen anderen Blick auf Polytope. Jedes Polytop kann als die konvexe Hülle seiner Ecken dargestellt werden. So ist etwa die konvexe Hülle der 2^n-Vektoren, deren Komponenten nur die Werte 0 oder 1 annehmen dürfen, nichts anderes als der „Hyperwürfel“. Im zweidimensionalen Fall ist die konvexe Hülle der Vektoren (0,0), (1,0), (0,1), (1,1) das Einheitsquadrat im zweidimensionalen Raum, im dreidimensionalen Raum erhalten wir den Einheitswürfel, siehe **Abb. 1 (a)**. Beim Anschauen eines Polytops erkennen wir die Ecken und sehen, dass benachbarte Ecken durch Kanten miteinander verbunden sind. Projizieren wir z. B. die Ecken und Kanten des dreidimensionalen Würfels, siehe Abbildung 1 (a), in die Ebene, so erhalten wir das in **Abb. 1 (b)** gezeigte Gebilde, wobei die Ecken, die wir jetzt Knoten nennen wollen, nachträglich besonders hervorgehoben wurden. Eine solche Projektion ist physisch einfach zu veranschaulichen. Man entfernt das Innere und die Flächen des Würfels, so dass nur noch der in **Abb. 1 (a)** gezeigte „Rahmen“ verbleibt, und nähert sich von oben mit einer Lampe der oberen Seitenfläche. Wenn man nah genug herangekommen ist, ergibt sich das „Schattenbild“ **Abb. 1 (b)**, wobei die Kanten der oberen Seitenfläche das äußere Quadrat bilden. Den so aus Knoten und Kanten entstehenden „Graphen“ kann man auf viele andere Arten zeichnen. Ent-

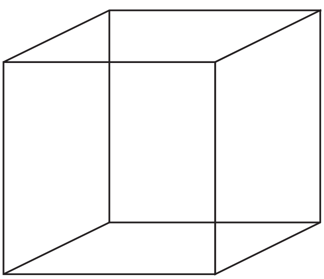

Abb. 1 (a)

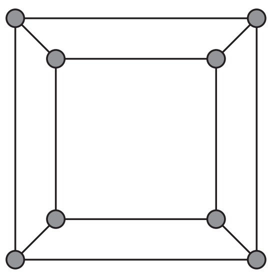

Abb. 1 (b)

scheidend sind nur noch die Beziehungen zwischen Knoten und Kanten.

Durch dieses „Vergessen" der Raumgeometrie entsteht der Übergang zur Graphentheorie. Wir können natürlich auch das „Geflecht" der Ecken und Verbindungskanten eines Polytops im n-dimensionalen Raum (dies wird häufig 1-Skelett genannt) als Graph auffassen, Graphen- und Polyedertheorie hat diese Verbindung gegenseitig befruchtet. Das in die Ebene projizierte 1-Skelett des Dodekaeders ist in **Abb. 2**. zu sehen.

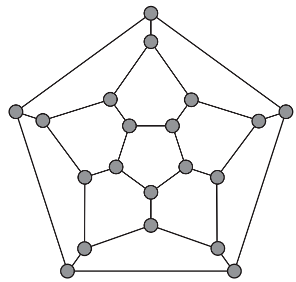

Abb. 2

Dies ist nun eine diskrete Sichtweise auf Polytope. Dabei geht durch die Vereinfachung die Raumgeometrie verloren, aber man gewinnt dadurch u. a. neue Erkenntnisse über das methodische Vorgehen des Simplexalgorithmus. Man kann so z. B. den Weg, den der Simplex-Algorithmus bei der Lösung eines linearen Programms auf einem n-dimensionalen Polytop abläuft, als Weg in einem Graphen interpretieren.

3.5 Seitenflächenverband

Ein weiterer Schritt von Polyedern in die diskrete Mathematik ist die Betrachtung nicht nur von Ecken und Kanten, sondern die Untersuchung allgemeiner Seitenflächen von Polyedern und der Beziehungen zwischen diesen. Man kann die Seitenflächen der Dimension k abzählen und Relationen zwischen den Anzahlen entdecken (Euler-Poincaré-Formel, Dehn-Sommerville-Gleichungen), man kann Inklusionsdiagramme betrachten und kommt dabei zu außerordentlich interessanten Fragen der Kombinatorik und Verbandstheorie (Wie viele Seitenflächen der Dimension k kann ein n-dimensionales Polytop haben?), auf die hier nicht weiter eingegangen werden kann.

3.6 Das Rucksackproblem und ganzzahlige Optimierung

Wir machen nun wieder einen Schritt zurück und betrachten statt einer linearen Gleichung eine einzige lineare Ungleichung der folgenden Form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b$$

mit ganzzahligen Koeffizienten. Im Bereich der linearen Optimierung, die sich insbesondere mit Produktionsprozessen beschäftigt, müssen die Variablen (so gut wie) immer nichtnegative Werte annehmen (negative Wareneinsätze, Energieverbräuche etc. sind unsinnig).

Nehmen wir in diesem Fall also zusätzlich an, dass die Koeffizienten a_i nicht negativ sind, so erhalten wir ein System der folgenden Form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b,\ x_1 \geq 0 \ldots x_n \geq 0,$$

bei dem alle Koeffizienten a_i nichtnegative ganzzahlige Werte besitzen. Insbesondere bei der Produktionsplanung kommt es häufig vor, dass die Variablen x_i nicht beliebige kontinuierliche Werte annehmen dürfen. Bei der Produktion eines Autos benötigt man pro Auto vier (oder mit Reserverad fünf) Reifen, aber es kommen nicht dreieinhalb zum Einsatz. Bei der Auswahl von Reisegepäck nehmen wir zwei oder drei Paar Schuhe mit, aber nicht 2,4 Paar. Wir entscheiden uns für den Kauf eines Fernsehgeräts oder nicht. Ganzzahligkeitsbedingungen kommen also auf natürliche Weise vor, und damit begeben wir uns wieder in das Feld der diskreten Mathematik.

Fügt man zu dem obigen Ungleichungssystem noch eine Zielfunktion $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ hinzu, so erhalten wir ein Optimierungsproblem, dessen Maximum zu bestimmen ist. Verlangen wir, dass die Lösungen dieses Optimierungsproblems ganzzahlig sein müssen, so hat es sich eingebürgert, dieses Problem „Rucksackproblem" zu nennen. Die Interpretation dafür ist wie folgt: Man betrachtet die Zahl b auf der rechten Seite der Ungleichung als Gewichts- oder Volumenbeschränkung und die Werte a_i als Gewicht oder Volumen eines Objektes i. Man möchte nun die Objekte 1, 2, …, n in den Rucksack so hineinpacken, dass das Gewicht oder Volumen b nicht überschritten wird, und die Auswahl so treffen, dass der Gesamtwert des Rucksacks so groß wie möglich ist. Werden also x_i Exemplare des Objektes i ausgewählt, so ist $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ der Wert der eingepackten Gegenstände, und den möchten wir so groß wie möglich machen. In manchen Fällen ist es verboten, von jedem Objekt mehr als ein Exemplar auszuwählen. Dann kommt für jede Variable noch zusätzlich die Beschränkung $x_i \leq 1$ hinzu. Ein solches Problem nennen wir dann 0/1-Rucksackproblem.

Durch natürliche Anforderungen sind wir also zu einem diskreten Problem gelangt, bei dem wir Einzelobjekte so auswählen sollen, dass eine gewisse Größe maximiert und eine gewisse Beschränkung eingehalten wird.

Lineare Programme mit einer Ungleichungsnebenbedingung und Nichtnegativitätsbedingungen (und möglicherweise zusätzlichen oberen Schranken für die Variablen wie $x_i \leq 1$) zu lösen, ist heute einfach. Man kann dies mit guten LP-Codes in praktisch jeder beliebigen Größenordnung tun.

Überraschung: Die Lösung von Rucksackproblemen in ganzzahliger oder in 0/1-Form ist schwer. Dies kann man mit Hilfe von komplexitätstheoretischen Methoden nachweisen. Der korrekte Terminus, den man hier erwähnen muss, lautet: Das Rucksackproblem in seiner ganzzahligen und seiner 0/1-Form ist *NP*-schwer. Dies ist ein Begriff der Komplexitätstheorie, den ich hier nicht weiter erläutern möchte. Festzuhalten ist aber, dass in diesem Bereich der Übergang vom Kontinuierlichen zum Ganzzahligen zu einer bedeutenden Erhöhung der Problemschwierigkeit führt.

An dieser Stelle sollen nun zwei weitere Aspekte erläutert werden, die bei der Lösung von Rucksack- und anderen Problemen eine wichtige Rolle spielen.

3.7 Ganzzahlige/kombinatorische Polytope

Die Menge der Lösungen eines 0/1-Rucksackproblems ist natürlich endlich. Wir können daher die Menge aller 0/1-Vektoren betrachten, die die gegebene Rucksackungleichung erfüllen und (zumindest theoretisch) die Menge aller Punkte definieren, die sich als konvexe Hülle dieser Rucksack-Lösungsvektoren darstellen lassen. Dieses Objekt nennt man Rucksackpolytop. Wenn man (in kleinen Dimensionen) damit ein wenig „herumspielt", so wird es in der Regel gelingen, eine Beschreibung eines solchen Polytops durch lineare Ungleichungen zu bestimmen. Man wird jedoch bei Erhöhung der Variablenzahl schnell feststellen, dass dies kein einfaches Unterfangen ist. Niemand weiß heute, wie man allgemeine Rucksackpolytope durch lineare Ungleichungen vollständig beschreibt. Dies ist ein intensiv beforschtes Spezialgebiet der kombinatorischen Optimierung (konkret heißt dies: polyedrische Kombinatorik), in dem wichtige Fortschritte gemacht wurden, aber keine endgültigen Lösungen in Sicht sind. Die bereits erzielten Erkenntnisse dieser Theorie werden heute in kommerziellen Codes eingesetzt, um allgemeine ganzzahlige Programme zu lösen, die in der Industrie in unzähliger Vielfalt auftreten.

3.8 Approximationsalgorithmen

Eine zweite Überlegung, die die diskrete Mathematik nun anstellt, ist die folgende. Wenn man (leider) im Allgemeinen nicht in der Lage ist, das exakte Optimum eines Rucksackproblems zu bestimmen, kann man dann nicht vielleicht eine gute Annäherung berechnen?

Dies führt uns in das Gebiet der Approximationsalgorithmen. Hier wird versucht, mit schnellen Algorithmen (technischer Begriff: Algorithmen mit polynomialer Laufzeit) auf heuristische Weise Lösungen zu produzieren, deren Zielfunktionswert nur in einem bestimmten Maß vom wahren Optimum abweicht.

Wir wollen dies anhand des 0/1-Rucksackproblems darstellen.

Der *Greedy*-Algorithmus ist eine Heuristik, die in der kombinatorischen Optimierung vielfach verwendet wird. Für das Rucksackproblem kann man sich (mindestens) zwei Varianten überlegen. Wir sortieren in einem ersten Schritt die Objekte 1, 2, …, n und arbeiten sie dann in dieser Reihenfolge ab. In der ersten Version sortieren wir die Objekte so, dass nach Sortierung $c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq c_n$ gilt. Das ist der Zielfunktionsgreedy-Algorithmus (kurz ZGA). In der zweiten Version sortieren wir die Objekte so, dass $c_1/a_1 \geq c_2/a_2 \geq \ldots \geq c_n/a_n$ nach Sortierung gilt, und nennen diese Gewichtsdichtengreedy-Algorithmus (GGA). Der zweite Schritt des Greedy-Algorithmus ist bei beiden Versionen identisch. Wir wählen zunächst das erste Objekt. Falls es in den Rucksack passt ($a_1 \leq b$), dann nehmen wir es. Wir verringern die rechte Seite ($b := b - a_1$) und schauen uns nun das zweite Objekt an. Falls $a_2 \leq b$, wählen wir auch das zweite Objekt aus, falls nicht, gehen wir zum dritten Objekt über und fahren so fort, bis wir alle Objekte der Reihe nach angeschaut haben. Wir haben jeweils ein Objekt in der vorher festgelegten Reihenfolge genommen, falls es noch gewichtsmäßig in den Rucksack hineinpasste, ansonsten haben wir es verworfen. Sei x^Z die so von ZGA gefundene Lösung, x^G die von GGA gefundene Lösung des Rucksackproblems, und sei x^O eine Optimallösung.

Was kann man über die Zielfunktionswerte c^Tx^Z und c^Tx^G im Vergleich zum Optimalwert c^Tx^O sagen? In der Tat kann man Folgen von 0/1-Rucksackproblemen konstruieren, bei denen die Quotienten c^Tx^Z/c^Tx^O bzw. c^Tx^G/c^Tx^O gegen Null streben. Beide Algorithmen können also beliebig schlechte Werte liefern. (Die Konstruktion der Beispiele ist nicht schwer, probieren Sie es einmal!). Erstaunlich aber ist folgender Sachverhalt. Wenn man beide *Greedy*-Algorithmen ausführt, dann gilt: $\max\{c^Tx^Z, c^Tx^G\}$ ist mindestens halb so groß wie c^Tx^O! Mit anderen Worten, der Fehler, den man macht, wenn man statt des (unbekannten) Optimums die beste der beiden Greedy-Lösungen wählt, ist maximal 50 %. Man kann in der Tat Approximationsalgorithmen für das Rucksackproblem konstruieren, die beliebig nahe an den Optimalwert herankommen, aber das ist eine komplizierte Geschichte.

Dies war eine Tour d‘Horizon über die Verbindungen zwischen diskreter und kontinuierlicher Mathematik, über diskrete und kontinuierliche Sichtweisen von geometrischen Objekten, über Algorithmenanalyse etc. Wie immer, wenn es spannend wird, treffen viele verschiedene Gebiete der Mathematik zusammen, und je nach Betrachtungsweise oder Untersuchungsziel tritt der eine oder andere Aspekt in den Vordergrund. In der diskreten Mathematik sind Ganzzahligkeit, Diskretheit, Kombinatorik von besonderer Bedeutung, während die kontinuierliche Sichtweise nur eine Hilfsmethodik ist. Ein herausragender Aspekt der diskreten Mathematik ist die große und vielfältige Fülle praktischer Anwendungen, speziell solcher, die sich jedermann einfach erschließen.

4 Weitere Beispiele

4.1 Die Eulersche Polyederformel

Wir hatten schon gezeigt, wie man durch Projektion eines 3-dimensionalen Polytops auf die 2-dimensionale Ebene einen Graphen (das 1-Skelett des Polytops) erzeugen kann. Die so entstehenden Graphen sind planar, weil sie so in die Ebene gezeichnet werden können, dass zwei Kanten sich nicht überschneiden (benachbarte Kanten dürfen sich in ihren Endknoten treffen). Euler hat für Polytope die berühmte Formel $V - E + F = 2$ bewiesen (ein Spezialfall der bereits genannten Euler-Poincaré-Formel). Hierbei bezeichnet V die Anzahl der Ecken, F die Anzahl der Seitenflächen und E die Anzahl der Kanten des Polytops.

Abb. 3 (Foto: privat)

Abb. 3 zeigt die Formel vor der Euler-Büste im Garten des Euler-Instituts in St. Petersburg. Bei der Projektion eines Polytops auf die Ebene gehen per Definition Ecken in Knoten und Polyederkanten in Graphenkanten über. Ganz offensichtlich kann man die Projektionen der Seitenflächen des Polytops ebenfalls in der Ebene wiederfinden. Man muss nur beachten, dass eine Seitenfläche des Polytops zur unendlichen Fläche wird, die den planaren Graphen umrandet. Ernst Steinitz hat bewiesen, dass die 1-Skelette von 3-dimensionalen Polytopen genau die 3-fach knotenzusammenhängenden planaren Graphen sind. Gilt Eulers Formel auch für planare Graphen ganz allgemein? In der Tat ist das so für alle zusammenhängenden planaren Graphen, und der Beweis hierfür ist viel einfacher als der polyedrische Beweis. Verallgemeinerung hilft (manchmal) bei der Beweistechnik!

Hier kommt die kurze Skizze. Wir machen einen Induktionsbeweis. Wir starten mit dem aus einem Knoten bestehenden Graphen. Für diesen gilt $V = 1$, $F = 1$ (die gesamte Ebene), $E = 0$, also stimmt die Formel. Wir nehmen nun an, dass die Formel für alle zusammenhängenden planaren Graphen mit $m \geq 0$ Kanten richtig ist. Wir fügen zu einem Graphen G mit m Kanten eine weitere Kante hinzu. Um den Zusammenhang zu erhalten, muss die Kante mindestens einen bereits vorhandenen Knoten als Endknoten besitzen. Sind beide Endknoten der neuen Kante bereits im Graphen G vorhanden (die neue Kante darf keine andere Kante überschneiden, um die Planarität zu erhalten), so wird dadurch eine Fläche von G in zwei Flächen zerteilt. Somit erhöhen sich E und F um jeweils 1, V bleibt gleich, und die Formel stimmt. Ist nur ein Endknoten der neuen Kante in G, so erhöhen sich V und E um jeweils 1, F bleibt gleich. Die Formel stimmt weiterhin. Jeder zusammenhängende planare Graph kann offensichtlich durch diese Konstruktion erzeugt werden kann, und so ist der Beweis erledigt.

4.2 Euler und die Erfindung der Graphentheorie

In keinem Artikel über die diskrete Mathematik darf Leonhard Euler fehlen. Er hat 1736 mit der Analyse des Königsberger Brückenproblems die Graphentheorie erfunden. Jedes Graphentheoriebuch enthält eine Karte von Königsberg und Eulers Abstraktion dieser Landkarte zu einem Graphen. (Googeln Sie einfach einmal „Königsberger Brückenproblem".) Erstaunlicherweise hat es bis zu den 1960er-Jahren gedauert, bis eine Optimierungsversion des Brückenproblems (von dem chinesischen Mathematiker Mei Ko Kwan, der Briefträgertouren optimieren wollte) betrachtet wurde: Gegeben sei ein Graph mit Kantenlängen, man suche eine Rundreise durch den Graphen, bei der jede Kante mindestens einmal durchlaufen wird und deren Gesamtlänge minimal ist. In der Literatur wird dieses Problem heute Chinesisches Postbotenproblem genannt.

4.3 Tourenplanung

Das Chinesische Postbotenproblem ist eines aus einer unüberschaubaren Menge von Tourenplanungsproblemen. Es ist (in seiner ungerichteten und gerichteten Variante) schnell lösbar, aber sobald man bei dieser Fragestellung gerichtete und ungerichtete Kanten gleichzeitig erlaubt, wird es schwierig. Das bekannteste Tourenplanungsproblem (und ein wirkliches Prototyp-Problem) ist das Travelling-Salesman-Problem, bei dem n Knoten (man denke sich Städte) gegeben sind und zwischen je zwei Knoten eine Entfernung vorliegt. Gesucht ist eine Rundreise kürzester Länge. Beim bereits erläuterten ADAC-Problem fährt jeder Gelbe Engel an jedem Tag eine Rundreise (von zu Hause und wieder zurück), jedoch sind am Anfang des Tages die zu besuchenden Ziele nicht bekannt. Das Problem entwickelt sich erst dynamisch, und die Disponenten müssen schnell auf sich verändernde Anforderungen reagieren. Solche Probleme gehören zur kombinatorischen Online-Optimierung. Die Vielzahl der Tourenplanungsprobleme ergibt sich durch anwendungsspezifische Randbedingungen. Müssen ganze Straßenzüge besucht werden (wie beim Zustellen von Briefen oder bei der Müllabfuhr), oder sollen nur bestimmte Punkte angefahren werden (wie bei der Paketzustellung oder bei Reparaturdiensten), gibt es zu beachtende Zeitfenster (z.B. zeitliche Belieferungsbeschränkungen in Fußgängerzonen), gibt es Restriktionen bzgl. der Tourlänge (Gas- oder Elektrofahrzeuge haben eine geringe Reichweite) oder ist die Ladekapazität der Fahrzeuge beschränkt, ist die Fahrzeugflotte homogen und kann man mit manchen Fahrzeugen nicht überall hinfahren (Doppeldecker oder Gelenkbusse können nicht überall fahren) etc.? Diese Kombinationen von Anforderungen machen Tourenplanungsprobleme schwierig und reizvoll. Tausende von Verkehrs-, Transport- und Logistikfirmen müssen sich täglich damit herumschlagen. Gute diskrete Mathematik kann hier enorme Einsparungen erzielen und die Dienstleistungsqualität deutlich verbessern.

4.4 Kürzeste Wege

Ein bei jeder Tourenplanung zu lösendes Teilproblem ist die Suche nach einem kürzesten Weg (bzgl. Zeit oder Entfernung) zwischen zwei Punkten. Die Lösungsalgorithmen hierfür sind einfach und können mühelos in der Schule behandelt werden. Spezielle, hocheffiziente Varianten der Standardalgorithmen (z.B. der Dijkstra- oder der A*-Algorithmus) benutzen wir täglich. Jedes Mal, wenn wir mit einem Auto-Navigationssystem einen Weg zu einem Zielort suchen, wird ein solcher Algorithmus verwendet, aber auch wenn wir bei einem öffentlichen Nahverkehrssystem oder der Deutschen Bahn eine Verbindung heraussuchen. Die Datenpakete (z.B. bei der Versendung einer E-Mail) im Internet werden entlang kürzester Wege im Datennetz versendet. Viele Videospiele, die sich in ihrem „Zustandsraum“ abhängig vom Benutzerverhalten dynamisch entwickeln, verwenden Kürzeste-Wege-Algorithmen, die mit sehr wenig Speicherplatz in Milli- oder gar Mikrosekunden Wege suchen müssen.

4.5 Telekommunikation

Beim Aufbau und bei der Erweiterung von Telekommunikationsnetzen wird mit ganzzahliger Optimierung geplant. Wo sollen Glasfaser- oder Kupferkabel verlegt, wo Router und andere technische Geräte stationiert werden? Wie muss das Netz gestaltet werden, um gegen den Ausfall von Komponenten gesichert zu sein? Im Mobilfunk geht es u. a. um die Zuweisung von Frequenzen zu Antennen, um mit möglichst geringen Kosten eine hohe Gebietsabdeckung zu erreichen. Und unsere Handys sind voller Mathematik, über die man ganze Bücher schreiben könnte.

4.6 Datenkompression, Codierungstheorie, Kryptographie

Ein derzeit ganz heißes Thema, bei dem diskrete Mathematik und Numerik zusammenspielen, ist die Datenkompression, bei der es darum geht, den Speicherumfang eines Ausgangsdatensatzes (z. B. ein digitales Foto oder eine Audiodatei) durch geeignete Codierung der Daten sehr stark zu reduzieren. Die Reduktion muss jedoch so erfolgen, dass die Ausgangsdatei nahezu (abhängig von einer vorgegebenen Toleranzschwelle) korrekt rekonstruiert werden kann.

Codierungstheorie war bereits bei der Beschreibung von CD-Spielern angesprochen worden. In der Telekommunikation ist dies natürlich auch von größter Bedeutung. Moderne auf Funk basierende Kommunikationssysteme (Mobilfunk, WLAN, Satellitenkommunikation) benutzen eine große Vielfalt von Codierungstechniken. Bei vielen wird die Verbindungsqualität in sehr kurzen Zeitabständen gemessen und davon abhängig die Signalcodierung gewählt. Das Design und die Implementierung dieser Systeme sind mit großem technischem und mathematischem Aufwand verbunden.

Hinzu kommt, dass die meisten Funkverbindungen gegen Abhörung gesichert werden müssen, was uns zur Kryptographie führt, mit der sich Menschen seit Jahrhunderten beschäftigt haben. So gut wie alle Fragen der Verschlüsselungs- und Codierungstechnik führen auf Problemstellungen der diskreten Mathematik. Der Entwurf optimaler fehlerkorrigierender Codes z. B. kann als Aufgabe aufgefasst werden, in einem Graphen eine möglichst große stabile Menge (eine Knotenmenge S heißt stabil, wenn je zwei Knoten in S nicht benachbart sind) zu finden. Das Problem der Zuweisung von Frequenzen zu Antennen ist eine Verallgemeinerung des bekannten Graphenfärbungsproblems. (Färbe die Knoten eines Graphen mit möglichst wenigen Farben so, dass je zwei benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.)

4.7 Knobeleien, Denksportaufgaben

Die diskrete Mathematik ist jedoch nicht allein aufgrund ihres hohen und vielfältigen Anwendungsbezugs von Bedeutung. Sie ist Quelle enorm vieler Knobel / Puzzle-Probleme, die unzählige Menschen zu mathematischer Beschäftigung anregen (häufig ohne zu merken, dass sie Mathematik machen). Ein typisches und derzeit sehr populäres Problem dieser Art ist Sudoku, von dem in vielen Zeitungen behauptet wurde, dass man es ohne Mathematik lösen könne. Tatsächlich kann man es ganz einfach als ganzzahliges Optimierungsproblem modellieren, und in der Tat sind die im Internet zu findenden Lösungsstrategien nichts anderes als Anweisungen zu einer geschickten Durchführung der Gauss-Elimination, verbunden mit einigen logischen Schlussfolgerungen.

Magische Quadrate haben die Menschen seit Jahrhunderten fasziniert. Goethes Hexeneinmaleins aus Faust I ist z. B. ein verbal verschlüsseltes Magisches Quadrat mit Zeilen- und Spaltensumme 15. Am 28.12.2011 ist Robin Wersig von den ZDF-Zuschauern zu Deutschlands Superhirn gewählt worden. Er kann (semi-)magische 8x8-Quadrate durch Rösselsprünge bei vorgegebenem Startfeld und vorgegebener Zeilen- und Spaltensumme im Kopf konstruieren, was offenbar viele Zuschauer beeindruckt hat.

4.8 Spieltheorie

Auch viele Aspekte der Spieltheorie sind diskreter Natur. Ein berühmter Satz der Spieltheorie lautet: Jedes endliche *n*-Personen-Spiel mit vollständiger Information besitzt eine Gleichgewichtsstrategie. Dies bedeutet für ein Zweipersonenspiel, dass genau einer der beiden Spieler so spielen kann, dass er (wenn er keinen Fehler macht) immer gewinnt, oder dass beide Spieler so spielen können, dass das Spiel unentschieden ausgeht. Ich will nicht genau definieren, was diese Begriffe bedeuten, aber zu den Spielen mit vollständiger Information gehören Schach, Mühle, Dame, Go, Tic Tac Toe und viele Streichholzspiele. Bei einer Version der letzteren legt man anfangs in mehrere Reihen jeweils einige Streichhölzer. Ein Zug besteht darin, dass ein Spieler aus genau einer Reihe eine beliebige positive Anzahl von Streichhölzern wegnehmen kann. Wer das letzte Streichholz nehmen muss, hat verloren. Spielt man mit einem Streichholz, verliert der Anfänger, bei zwei Streichhölzern der zweite Spieler. Es sind (zahlentheoretische) Anfangsbedingungen bekannt, aus denen man schließen kann, welcher Spieler, falls er richtig spielt, gewinnt. Bei fehlerlosem Spiel geht Tic Tac Toe (davon kann man sich sehr schnell überzeugen) immer unentschieden aus. Mit enormem Aufwand ist bewiesen worden, dass dies ebenso für Mühle und Dame gilt. Bei Schach und Go weiß man derzeit noch nicht, ob Weiß oder Schwarz eine Gewinnstrategie hat oder ob immer ein Unentschieden erzwungen werden kann.

4.9 Zahlentheorie und Geometrie

Zum Schluss möchte ich noch auf eine überraschende Verbindung zwischen Zahlentheorie und Geometrie hinweisen. Es geht um den Flächeninhalt von Gitterpolygonen in der Ebene.

Wir betrachten das Gitter der ganzzahligen Punkte in der Ebene, starten mit einem beliebigen dieser Punkte und ziehen von diesem zu einem beliebigen anderen Gitterpunkt eine gerade Linie. Wir machen das sukzessive weiter, müssen aber dabei beachten, dass wir keine bereits gezogene Linie kreuzen und keinen Gitterpunkt ein zweites Mal berühren. Es gibt eine Ausnahme. Wir hören nach endlich vielen Schritten dadurch auf, dass wir zum Anfangspunkt zurückkehren. Auf diese Weise haben wir ein Gittervieleck konstruiert, das durch eine geschlossene Linie begrenzt wird. Wie groß ist der Flächeninhalt dieses Gitterpolygons? Die verblüffende Antwort darauf gibt der Satz von Pick. Ist F der Flächeninhalt (gemessen in Flächeninhalten des Einheitsquadrats) des Gitterpolygons, I die Anzahl der Gitterpunkte, die im Inneren des Polygons liegen, und R die Anzahl der Gitterpunkte, die am Rande liegen, so gilt

$$F = I + R/2 - 1.$$

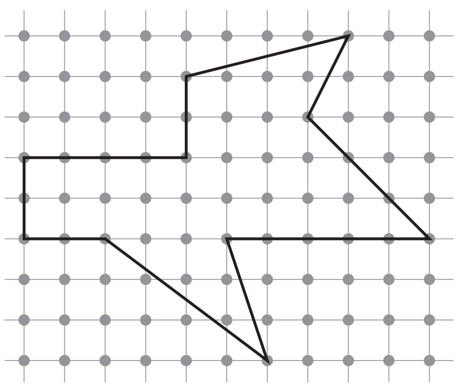

Abb. 4

Das Gitterpolygon in **Abb. 4** hat 22 Randpunkte und 21 innere Punkte und somit die Fläche 31. Eine hübsche Folgerung aus dem Satz von Pick ergibt, dass jedes Gitterdreieck, das keinen weiteren ganzzahligen Punkt enthält, immer die Fläche $\frac{1}{2}$ hat. Für höhere Dimensionen ist keine ähnlich einfache Formel bekannt.

5 Schlussbemerkung

Damit ist meine Wanderung durch die diskrete Mathematik beendet. Ich habe mich vorwiegend auf die Beschreibung moderner Anwendungen konzentriert. Dabei ist vielleicht ein wenig verlorengegangen, dass die diskrete Mathematik wunderbare Einstiege in mathematische Theoriebildung bietet. Die Erfindung der Graphentheorie ist so ein Anfang. Aus einer konkreten Fragestellung entwickelt sich eine eigenständige neue Theorie, die den mathematischen Horizont erweitert. So entstehen neue Bezüge zu anderen mathematischen Fachgebieten, es werden neue Sichtweisen auf bekannte Resultate und weitgehende Verallgemeinerungen ermöglicht, und die mathematischen Techniken, die zur Lösung der Ausgangsfrage entwickelt wurden, werden in ganz anderen Anwendungsfeldern fruchtbar. Das besonders Schöne an der diskreten Mathematik ist, dass der Einstieg relativ leicht und gut motivierbar ist und dass man hier auf überzeugende Weise die verschiedenen Facetten der Mathematik (Stichworte: Formulieren / Modellieren von Problemen, sauberes Argumentieren, Beweistechniken, Verallgemeinerungen, aktives Forschungsgebiet, Mathematik als Sprache, Werkzeugkasten zum Problemlösen, wichtiger Teil unserer Kultur, Schlüsseltechnologie) verdeutlichen kann.

Literatur

Es ist unmöglich, zu den hier angerissenen, sehr breiten Themenfeldern eine kurze Liste von Referenzen anzugeben. Deshalb folgt nur eine knappe und sehr subjektive Auswahl von Büchern, von denen die meisten deutschsprachig sind und allgemeine Aspekte der diskreten Mathematik behandeln.

Übersichtsbücher zur diskreten Mathematik, die sich an ein allgemeines Publikum wenden, sind Aigner (2006) und Lovász, Pelikán, Vesztergombi (2005). Ein vertiefter „Rundumschlag“, auch heute noch aktuell, ist das Handbuch Graham, Grötschel, Lovász (1995) mit 44 umfangreichen Kapiteln. Mathematisch tiefgehend sind gleichfalls die beiden Standardwerke zur Polyedertheorie Grünbaum (2003) und Ziegler (1995). Gute deutschsprachige Bücher über Optimierung sowie über Graphen, Netzwerke und Algorithmen sind Jungnickel (2008) und Jungnickel (1994/2008). An Nicht-Fachleute richtet sich das Graphentheoriebuch Nitzsche (2009). Hussmann, Lutz-Westphal (2007) ist ein Sammelband zur kombinatorischen Optimierung, der sich an Schüler und Lehrer richtet. Dort findet sich u. a. ein Artikel zur Komplexitätstheorie. Behrends (2008) enthält 100 kurze allgemeinverständliche Einführungen in interessante mathematische Probleme, viele davon aus dem Bereich der diskreten Mathematik. Ausführlicher sind die Beiträge in Aigner, Behrends (2008), wo u. a. Artikel zum CD-Spieler, zur Bestimmung kürzester Wege und zur Kryptographie zu finden sind. Biermann, Grötschel, Lutz-Westphal (2010) ist eine Sammlung von Aufgaben aus dem mathematischen Adventskalender, in der mathematische Probleme aus der Praxis für das Niveau von Schülern aufbereitet wurden. Mehrere dieser Aufgaben sind diskreter Natur, darunter auch Aufgaben über die Gelben Engel des ADAC und die Kapazitätsplanung von Mobilfunknetzen. An Operations Research-Studenten ist das Buch Domschke, Scholl (2010) zur Tourenplanung gerichtet. Eine sehr schöne allgemeinverständliche Einführung in das Travelling-Salesman-Problem ist Cook (2011). Eine ganz neue Übersicht über Anwendungen der Mathematik in der Industrie, darunter viele diskrete

Themen, ist Lery et al. (2012). Albrecht Beutelspacher hat eine Reihe lesenswerter Bücher für allgemeines Publikum geschrieben, die meisten befassen sich mit Themen der diskreten Mathematik, siehe http://www.mm-gi.de/htdocs/beutelspacher/index.php?id=396 und http://www.mm-gi.de/htdocs/beutelspacher/index.php?id=392, darunter sind viele Knobelaufgaben.

Literatur

Martin Aigner: *Diskrete Mathematik*. 6. revidierte Auflage, Vieweg (2006).

Martin Aigner: *Primzahlen, geheime Codes und die Grenzen der Berechenbarkeit*, in: Martin Aigner und Ehrhard Behrends (2008), S. 267–276.

Martin Aigner und Ehrhard Behrends (Hrsg.): *Alles Mathematik: Von Pythagoras zum CD-Player*, Vieweg+Teubner, 3. Auflage (2008).

Ehrhard Behrends: *Fünf Minuten Mathematik*, Vieweg+Teubner, 2. aktualisierte Auflage 2008.

Ralf Borndörfer, Martin Grötschel und Andreas Löbel: *Der schnellste Weg zum Ziel*, in: Martin Aigner und Ehrhard Behrends (2008), S. 43–72.

Katja Biermann, Martin Grötschel und Brigitte Lutz-Westphal (Hrsg.): *Besser als Mathe! Moderne angewandte Mathematik aus dem MATHEON zum Mitmachen*, Vieweg+Teubner, 2010.

William J. Cook, *In Pursuit of the Traveling Salesman: Mathematics at the Limits of Computation*, Princeton University Press, 2011.

Wolfgang Domschke und Armin Scholl: *Logistik: Rundreisen und Touren*. 5. Auflage, Oldenbourg, 2010.

Branko Grünbaum: *Convex Polytopes*, 2nd edition, prepared by: Volker Kaibel, Victor Klee, and Günter M. Ziegler, Springer, 2003.

Ronald L. Graham, Martin Grötschel und Lászlo Lovász (ed.): *Handbook of Combinatorics*, Volumes I and II, Elsevier (North-Holland); The MIT Press, 1995.

Martin Grötschel: *Das Problem mit der Komplexität: P = NP?*, in: Stephan Hußmann und Brigitte Lutz-Westphal (2007), S. 265–274.

Stephan Hußmann und Brigitte Lutz-Westphal (Hrsg.): *Kombinatorische Optimierung erleben. In Studium und Unterricht*, Vieweg +Teubner, 2007.

Dieter Jungnickel: *Optimierungsmethoden. Eine Einführung*, Springer, 2008.

Dieter Jungnickel: *Graphen, Netzwerke und Algorithmen* (3. Auflage) BI Wissenschaftsverlag, 1994 (englische Version in 3. überarbeiteter und erweiterter Auflage, Springer, 2008).

László Lovász; József Pelikán und Katalin Vesztergombi: *Diskrete Mathematik,* Springer, 2005.

Thibaut Lery et al. (eds.): *European Success Stories in Industrial Mathematics*, Springer, 2012.

Jack H. van Lint: *Die Mathematik der Compact Disc*, in: Martin Aigner und Ehrhard Behrends (2008), S. 7–16.

Manfred Nitzsche: *Graphen für Einsteiger*, Vieweg+Teubner, 2009.

Jörg Rambau: *Der gelbe Engel von Noehtam,* in: Katja Biermann, Martin Grötschel und Brigitte Lutz-Westphal (2010), S. 59–76.

Günter M. Ziegler: *Lectures on Polytopes*, Springer, 1995.