Le stanze del TSP

by Martin Grötschel and Manfred Padberg

La ricerca di un ipotetico ottimo viaggio di Ulisse nasconde studi e metodi che si rifanno largamente all'ottimizzazione combinatoria (vedi l'editoriale di AIROnews VI, 2, Summer 2001, pp 1-7). Le finestre che seguono si propongono di aprire alcuni spiragli sui tentativi ben riusciti di percorrere nuove strade, con il contributo teorico della ricerca e sfruttando l'esperienza delle applicazioni concrete. Si inizia con l'esemplificazione dei problemi di ottimizzazione combinatoria. Si passa alla misura delle dimensioni del problema del TSP. Segue un esempio di applicazione alla produzione di una scheda elettronica (2392 nodi). L'evoluzione di una soluzione "semplice" del problema di Ulisse serve per considerare le implicazioni del TSP per progettare una rete di fibre ottiche della regione atlantica degli US (116 nodi). Infine l'ultima finestra introduce la formulazione più recente del TSP con la ricerca delle faccette del politopo intero. Per un dettaglio degli algoritmi che hanno permesso di trovare nel 1998 il ciclo ottimo per visitare 13509 città degli US si rimanda al lavoro "On the Solution of Traveling Salesman Problems" di David L. Applegate, Robert Bixby, Vašek Chvátal, William Cook pubblicato nel 1998 da Documenta Mathematica Journal. Una nota nel prossimo numero di AIROnews introduce la soluzione di un problema con 15112 città ottenuta nell'aprile del 2001.
Tito A. Ciriani, Ciriani@cibernet.it

Ottimizzazione lineare e intera.

È arduo trovare i giusti tagli per un politopo. E non si sa da dove cominciare!

Un esempio in uno spazio a due dimensioni può chiarire le tecniche di taglio meglio di uno a 120 dimensioni. Una condizione lineare nello spazio a due dimensioni corrisponde ad una retta, che divide il piano tra punti ammissibili e inammissibili. In generale, più condizioni formano un poligono (politopo) che racchiude tutte le soluzioni ammissibili (figura 1).

Lineare è anche la funzione obiettivo, rappresentata nelle figure con una retta tratteggiata. I punti al disopra della retta sono più convenienti. Quindi intuitivamente si osserva che l'ottimo giace su un vertice del poligono. Infatti tale punto è l'unico corrispondente al valore minimo della funzione obiettivo(figura 1a). Un lato del poligono può essere parallelo alla retta dei costi. In tal caso i due punti estremi del lato e tutti i punti intermedi soddisfano alla condizione di minimo, e quindi sono ottimali. Da tali osservazioni deriva che, per la ricerca dell'ottimo, è sufficiente analizzare solo i vertici. Il problema lineare è l'estensione del problema i cui punti ammissibili sono interi (indicati dai punti neri in figura 1a). Se i punti ammissibili assumono soltanto il valore 0 o 1, come nel problema di Ulisse (vedi AIRO News, VI, 2, Summer 2001), si deve cercare l'ottimo nei punti interi interni al poligono. Per trovare l'insieme convesso delimitato dai soli vertici interi ammissibili (figura 1b) sono necessarie ulteriori condizioni. Sfortunatamente tali condizioni sono in numero molto elevato. Ecco la necessità di procedere in modo iterativo alla ricerca di tali condizioni. Il punto y_0 (figura 2c) rappresenta un "cattivo" ottimo giacché non ha coordinate intere. Si deve quindi introdurre una condizione di taglio che non elimini i possibili punti ammissibili interni al poligono. In tal modo s'introducono nuove condizioni che escludono fette di poligono e hanno la "buona" qualità di appoggiarsi a vertici interi. Una soluzione intermedia fornisce il vertice ottimo y_1 ma ancora inammissibile per il problema intero. Continuando si arriva alla soluzione ottima (figura 2e) In essenza questo è l'algoritmo dei piani di taglio (cutting planes). La ricerca dei piani di taglio sembra di facile attuazione. Purtroppo per problemi di grandi dimensioni il procedimento risulta poco efficiente.

Ralph E.Gomory, attualmente Presidente della fondazione Alfred P. Sloan e per lungo tempo capo della Ricerca IBM, quando nel 1958 lavorava alla Princeton University ha dimostrato che dopo innumerevoli passi questo metodo porta alla soluzione ottima.

Purtroppo i tempi si allungano notevolmente e risultano estremamente onerosi per problemi di grandi dimensioni. Oggi non si ricercano più i piani di taglio ma piuttosto le faccette estratte dal politopo.

Con l'inserimento delle nuove condizioni, dalla situazione dei sottocicli (figura 13, AIROnews VI, n.2-Summer 2001, p. 3) si ottiene una soluzione ancora inammissibile ma più vicina all'ottimo (figura 3f).

Inserendo altre condizioni necessarie per considerare le faccette (archi tratteggiati di figura 3g) si arriva alla soluzione ottima (figura 3h).

Tutte le strade portano a itaca

Quanti sono i cicli che passano per n città?

Come primo passo si assegna un peso a tutti i possibili cicli.

Supponiamo di conoscere tutti i cicli che passano per *n-1* città.

Troviamo i cicli che passano per *n* città partendo dagli elementi di tale insieme inserendo una città. Ci sono quindi *n-1* nuovi cicli. Il totale dei cicli è allora il prodotto dei cicli di *n-1* città moltiplicato per *n-1*.

Si deve conteggiare una sola volta un ciclo che passa per tutte le città in due diverse direzioni. Con tale premesse, cerchiamo di costruire una formula che indichi il numero totale dei cicli.

Sappiamo che esiste un solo ciclo che passa per tre città. Infatti la procedura

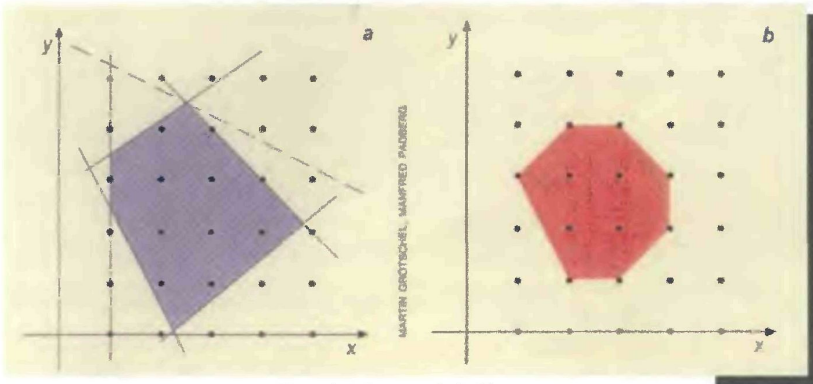


Figura 1. Politopo e soluzioni intere.

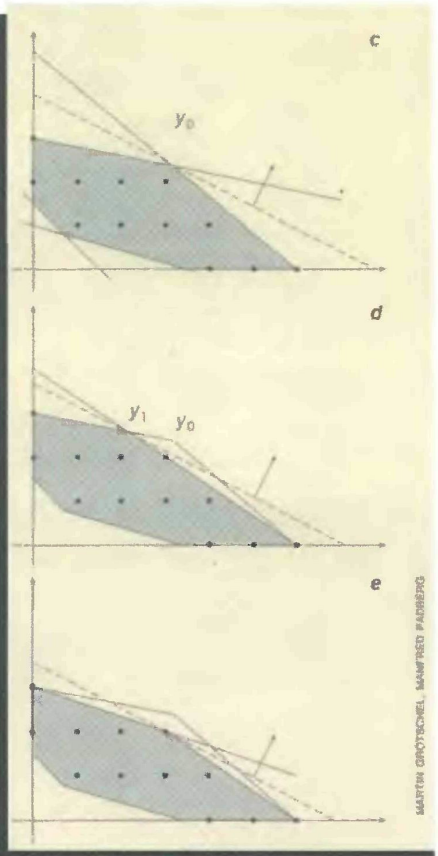
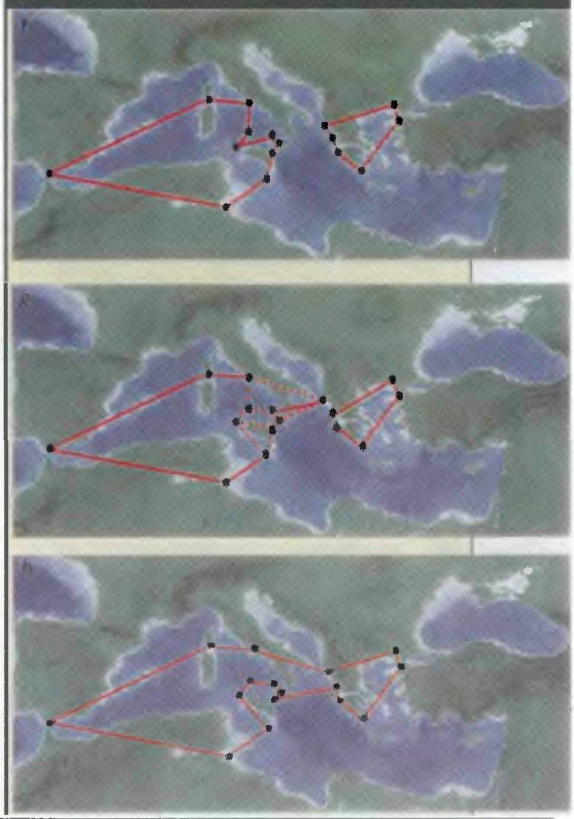


Figura 2. I piani di taglio.

Figura 3. Ricerca delle faccette per il raggiungimento dell'ottimo del problema di Ulisse.



conteggia una sola volta un ciclo che passa per tutte le città in due diverse direzioni. Quindi possiamo assegnare un unico peso al ciclo (pari alla sua lunghezza). Proseguendo troviamo che 3 sono i cicli che passano per quattro città. Così per cinque città si hanno 12 (=3*4) cicli. In generale per *n* città passano *3*4*...*(n-1)* = *(n-1)!/2* cicli. Per n=16 tale formula fornisce 653837184000 diversi percorsi.

Infine calcoliamo la lunghezza dei cicli trovati. I dieci cicli più brevi hanno la lunghezza pari a: 6859, 6865, 6870, 6875, 6889, 6890, 6895, 6898 e 6900 km. Il ciclo più lungo è di 164-34 km. Il grafico (figura 4) riporta la distribuzione delle lunghezze dei cicli. La lunghezza mediana, che vale 13072 km, separa il numero dei cicli a metà. Più di 229 milioni di cicli hanno una lunghezza pari 13359 km e sono i più numerosi.

Ovviamente tale procedimento esaustivo diventa non proponibile per un numero elevato di città. Si deve trovare un algoritmo di ottimizzazione più efficiente.

Il lungo cammino del trapano

Con la sequenza migliore si dimezzano i tempi.

Supponiamo di dover eseguire 2392 fori in una scheda elettronica utilizzando una punta meccanica o un raggio laser. I fori servono per stabilire i collegamenti in un prossimo passo di produzione. Queste schede sono comunemente utilizzate nelle lavatrici, nelle radio a transistor, negli apparecchi televisivi, nei calcolatori e in molte altre apparecchiature che richiedono controlli elettronici. Poiché il tempo per eseguire un foro è costante, si deve cercare di minimizzare la distanza tra un foro e il successivo. Come fece Ulisse si può adottare una soluzione qualunque che unisca tutti i fori.

In base all' obiettivo (figura 5) supponiamo che un'Azienda adotti la soluzione che sembra la più idonea al movimento orizzontale del trapano (figura 6). Utilizzando una qualunque unità di misura per la distanza tra i fori, la soluzione ottima (figura 7) raggiunge una somma delle distanze pari a 378032 invece del valore 718876 della soluzione adottata: il risparmio è di almeno il 50%! Una workstation impiega meno di un'ora per trovare il ciclo ottimo, con il tempo impiegato dal trapano proporzionale alla distanza tra due fori.

Si possono imporre altre condizioni più vicine alle caratteristiche della lavorazione. Se per esempio il movimento nelle direzioni X e Y del trapano è governato da due macchine indipendenti, il tempo di lavorazione massimo può essere più realisticamente assunto pari alle distanze nelle direzioni X e Y.

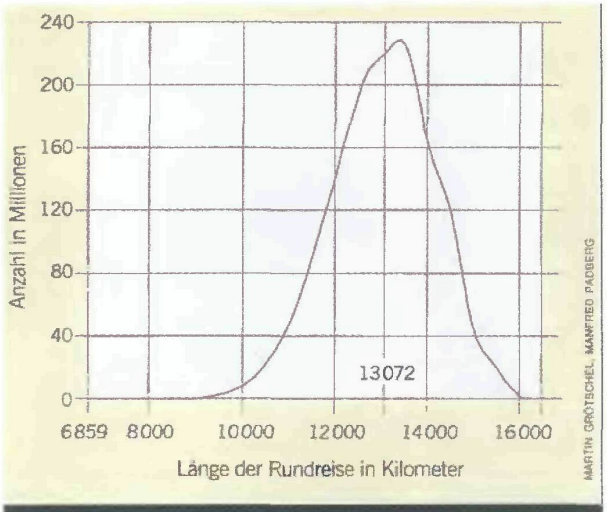


Figura. 4
Distribuzione-dei-percorsi: Le ordinate rappresentano il numero di cicli in milioni. Le ascisse rappresentano la lunghezza dei cicli in km.

Figura 5. L'obiettivo ...

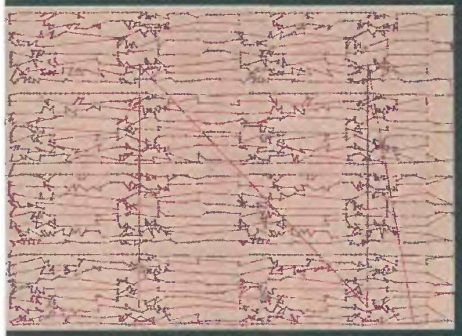


Figura 6. ... una soluzione generica ...

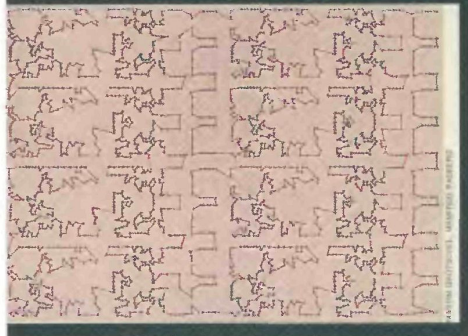


Figura 7. ... la soluzione ottima.

Reti a prova di taglio

Condizioni per la sicurezza dei collegamenti in rete.

Supponiamo di dover costruire una rete di comunicazione tra le 16 città appartenenti al viaggio di Ulisse nel Mediterraneo (vedi AIRO News, VI, 2, Summer 2001) e di volerle mantenere collegate anche se un tratto viene meno. Per ragioni storiche scegliamo Itaca (1), Troia (2), Gerba (6), Circeo (10) e Messina (13) come le città più importanti che debbono mantenersi collegate anche se cade un ramo della rete. A tali città assegniamo peso 1 e alle rimanenti peso 0.

Per tener conto dell'importanza di alcune città, si aggiungono delle condizioni per far sì che le città importanti rimangano connesse anche se un qualsiasi arco della rete viene a mancare. Assumendo che i costi siano proporzionali alle connessioni dirette, l'albero ottimale risulta avere una lunghezza di 5842 km (figura 8). Eccettuate le città 9, 11, e 12, tutte le altre risultano appartenenti al sotto-ciclo di sicurezza (ciclo chiuso) voluto per le 5 città più importanti. L'equilibrio tra i costi e i sotto-cicli di sicurezza dipende dal valore che si attribuisce alle città importanti. Se ricerchiamo una sicurezza "distribuita", assegnando per esempio il valore 3 a tutte le città, si trova che la rete ottimale ha una lunghezza di 16112 km (figura 9). Tale rete ottimale mantiene la connessione anche se 3 connessioni dirette sono interrotte. Inoltre anche se viene a mancare un punto di connessione, tutti gli altri nodi rimangono connessi attraverso un canale di comunicazione.

Solo nel caso in cui cadano simultaneamente i nodi 8 (Zacinto) e 16 (Corfù) la rete viene interrotta.

La soluzione di minimo costo per una sotto-rete di sicurezza trova attuazione nel progetto per la rete regionale tra 116 città della regione atlantica degli US (figura 10). I cerchi indicano i nodi di importanza 0 mentre i quadrati sono quelli di importanza 1. I costi di connessione tra i 116 nodi della rete non sono proporzionali alla distanza, bensì tengono conto dell'orografia del territorio. Cioè la presenza di monti e fiumi aumenta notevolmente il peso della connessione.

Le reti ottimali negli esempi delle figure sono stati sono state trovate da un programma sviluppato da Martin Grötschel e Clyde Monma dalla ricerca della Bell Communications in Morristown (New Jersey) e da Mechthild Stoer della ricerca della compagnia dei telefoni norvegese in Kjeller.

Il ciclo minimo come problema lineare di ottimizzazione

Come semplificare il compito ingrandendolo.

Partiamo da un compito semplice: trovare il ciclo minimo tra quattro città numerate da 1 a 4. Il grafo completo contiene sei archi. Sugli archi sono compaiono tra parentesi i numeri delle città che uniscono (figura 11).

Si forma un ciclo utilizzando alcuni di questi archi come variabili e assegnando all'arco il valore 1 se appartiene al ciclo scelto altrimenti 0 (figura 12).

Quindi ogni ciclo viene rappresentato da un vettore a sei dimensioni con esattamente 4 archi, quelli che hanno sulla corrispondente riga il valore 1.

I cicli che potrebbe fare Ulisse visitando 16 città sono rappresentati da un vettore in uno spazio a 120 dimensioni. Ogni possibile ciclo ha e-

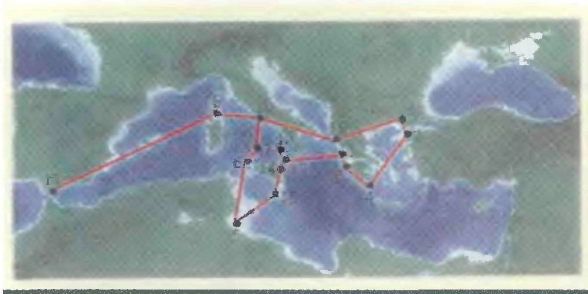


Figura 8. Le città più importanti (1, 2, 5, 10 e 13) hanno peso 1.

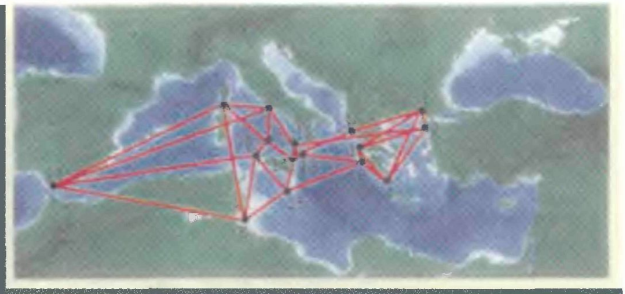
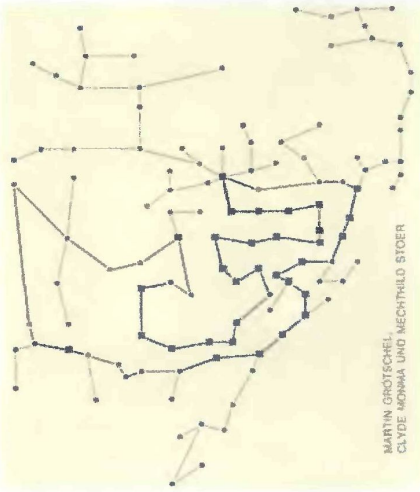


Figura 9. Tulle le città hanno una importanza di peso 3.

sattamente 16 archi con il valore 1 e i rimanenti 0. Un vettore composto di valori 0 e 1 è chiamato *vettore di incidenza*. Non tutti i vettori di incidenza con 16 valori unitari corrispondono ad un ciclo. La principale condizione è che una città appartenga a soltanto a due archi. Questo è la formulazione di base del problema di Ulisse, rappresentata con le condizioni in forma di equazioni lineari. Nel caso di quattro città, la somma degli 1 dei vettori di incidenza è 2. Non è detto che un vettore di incidenza che soddisfa a tale condizione appartenga ad un ciclo. Potrebbe accadere che i vettori selezionati appartengano a cicli più brevi (sotto-cicli) e non ad un ciclo completo (figura 13). Quindi si debbono imporre ulteriori condizioni per scartare i vettori di incidenza "buoni" da quelli "cattivi". Nella soluzione di di figura 13 un sotto-ciclo collega tra loro solo sette città invece di tutte e 16. Nel corrispondente vettore di incidenza del sottociclo con sette città risulta che sette degli archi hanno valore 1: uno di troppo. Solo aprendolo si può inserirne la catena nel ciclo completo che abbraccia tutte e 16 le città. Questa caratteristica porta ad una regola generale: il ciclo di *k* città può al massimo contenere un sotto insieme di *k-1* archi che li collegano. Ma questa condizione è lineare: la somma di tutti componenti del vettore di incidenza, i cui archi appartengono al ciclo che collega le *k* città, deve essere minore uguale a *k-1*. Ciascuno dei tre sotto insiemi contribuisce a questa condizione utilizzata per escludere i sottocicli. Per *n* città tali condizioni sono dell'ordine di grandezza di 2n-1 (non 2n, poiché la condizione che esclude i sotto-cicli non deve comprendere il ciclo che si sta cercando). Purtroppo tale numero è troppo elevato per permettere una formulazione esplicita delle condizioni§.



Figuira 10 - Progetto di rete per 116 città della regione atlantica degli US.

Martin Grötschel
groetschel@zib.de

Manfred W. Padberg
manfred@padberg.com

§Per risolvere il TSP di grandi dimensioni sono necessarie metodologie alternative come quelle illustrate nell'articolo *On the Solution of Traveling Salesman Problems* di David L. Applegate, Robert Bixby, Vašek Chvátal, William Cook pubblicato nel 1998 da Documenta Mathematica Journal. [*nota del traduttore*].

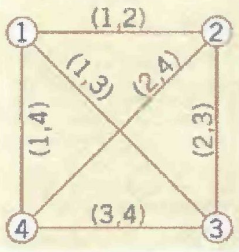


Figura 11 –
Grafo completo con quattro città.

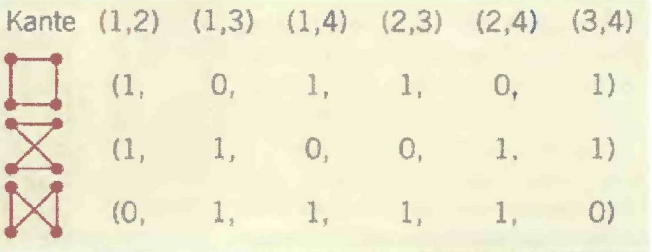


Figura 12 –
Cicli del grafo con quattro città e i corrispondenti vettori di incidenza (archi).

Tradotto da: Spektrum der Wissenschaft 4/1999 (pag. 76-85)
La redazione di AIROnews ringrazia il Dr. Christoph Pöppe per l'autorizzazione alla traduzione dal tedesco e Ms. Alice Krüllmann per i contatti e la documentazione necessari alla versione italiana.

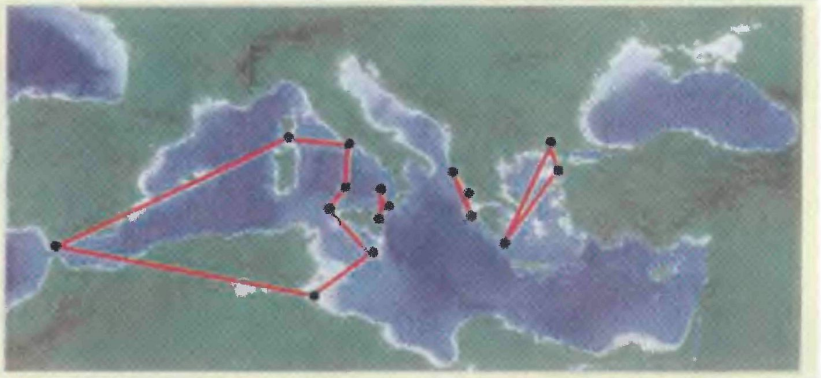


Figura 13 –
Sottocicli del grafo con le 16 città del viaggio di Ulisse.