Ökonomische Modelle aus mathematischer Sicht

Skriptum zur Vorlesung im WS 2002/2003

Prof. Dr. Martin Grötschel
Institut für Mathematik
Technische Universität Berlin

Februar 2003

Vorwort

Die Vorlesung „Ökonomische Modelle aus mathematischer Sicht“ ist eine Wahlveranstaltung, die sich insbesondere an Studenten der Wirtschaftsmathematik (etwa im 2. oder 3. Semester), aber auch an mathematisch interessierte Studenten der Wirtschaftswissenschaften wendet. Es werden so gut wie keine mathematischen Grundkenntnisse vorausgesetzt, lediglich eine gewisse Vertrautheit mit der Vektor- und Matrizenrechnung im $\mathbb{R}^n$ wird erwartet.

Das vorliegende Manuskript ist die Ausarbeitung einer zweistündigen Vorlesung, die der Verfasser im Wintersemester 2002/2003 am Fachbereich Mathematik der TU Berlin gehalten hat.

Die Vorlesung hatte mehrere Ziele. Die Studenten sollten mit einigen Basistechniken der ökonomischen Modellbildung vertraut gemacht werden. Sie sollten sehen, dass bereits in sehr simplen (linearen) ökonomischen Modellen relativ einfache ökonomische Fragen zu durchaus nichttrivialen mathematischen Problemen führen können. Einige Problemstellungen dieser Art wurden vollständig diskutiert und (hauptsächlich mit Methoden der linearen Algebra) gelöst.

Darüber hinaus sollte gezeigt werden, dass mathematische Operationen wie Multiplikation oder Inversion von Matrizen, dass Eigenwerte und Eigenvektoren ökonomisch interpretiert werden können und dass hier Mathematik und Ökonomie zusammen zu einem besseren Verständnis der Zustände und Funktionsweisen von Ökonomien beitragen können. Manchmal verhelfen sogar ökonomische Einsichten zur Formulierung und zum Beweis von mathematischen Sätzen.

Die Input-Output-Rechnung, die eine der wirkungsvollsten Methoden zur Analyse von Volkswirtschaften ist, wurde ausführlich diskutiert. Hierbei wurde auch gezeigt, wie wichtig es ist, sich mit so „trivialen“ Fragen wie der Datenbeschaffung zur Aufstellung von Input-Output-Tabellen zu befassen, wie schwierig es ist, Input-Output-Matrizen konsistent zu erstellen, und wie unentbehrlich eine solide Kenntnis der Datenbasis selbst für den Theoretiker ist.

November 2002 M. Grötschel

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einige Beispiele

Das wirtschaftliche Gefüge einer Region, eines Landes oder gar der ganzen Welt ist ein außerordentlich kompliziertes Gebilde, um dessen Verständnis sich die Wirtschaftswissenschaften bemühen. Wir sind heute noch weit von einer hinlänglichen Beschreibung aller Zusammenhänge entfernt. Hinzu kommt, dass die Wirtschaftsbeziehungen immer globaler werden und lokale Aktivitäten weltweite Auswirkungen haben können. Wir können nur selten begründen, warum und wie gewisse Entwicklungen verlaufen. Daher sind wir kaum in der Lage, einigermaßen genaue Prognosen – selbst sehr kurzfristige – über die zukünftige wirtschaftliche Entwicklung abzugeben. Denken Sie nur daran, mit welchen Fehlern selbst so „einfache“ Vorhersagen wie die Schätzung des Steueraufkommens in Deutschland behaftet sind. Die Verläufe von Aktienkursen entziehen sich manchmal jeder rationalen Erklärung.

Obwohl in den letzten Jahren erhebliche Fortschritte erzielt worden sind, scheint es nicht so, dass in Kürze eine allgemein akzeptable Theorie des gesamten wirtschaftlichen Verhaltens aufgestellt werden könnte. Unser gegenwärtiger Kenntnisstand ist einfach noch zu gering. Dagegen haben sich mittlerweile eine Reihe von annehmbaren „Teiltheorien“ gebildet, die versuchen, spezielle Fragestellungen zu klären und für begrenzte Bereiche brauchbare Analyse- und Prognosekonzepte zu entwerfen. Vielleicht wird es möglich sein, diese Teiltheorien zu verbessern, zu verfeinern und zu verallgemeinern, um so ein besseres Verständnis für wirtschaftliche Abläufe zu gewinnen.

Die Vorgehensweise bei der Entwicklung derartiger Spezialtheorien ist die folgende. Zunächst wird ein Fragenkatalog abgegrenzt, der behandelt werden soll. Dies kann nach regionalen, markttechnischen, statistischen oder methodischen Kriterien erfolgen. Dann beginnt man, die Wirklichkeit dadurch zu vereinfachen, dass gewisse Einflussfaktoren als unwichtig für die Fragestellung angesehen und nicht weiter berücksichtigt werden und manche Zusammenhänge als „in bestimmter Form geklärt“ betrachtet werden. Für die übrig bleibende „Teilwelt“ wird dann ein „Modell gebaut“, von dem man hofft, dass es zur Klärung der offenen Fragen beitragen kann.

Waren diese Modelle früher meistens verbaler Natur, so bedient sich heute die ökonomische Theorie in immer stärkerem Maße mathematischer Methoden. Die mathematische Formulierung solcher Modelle hat den Vorzug, dass klar und eindeutig gesagt werden kann, welche ökonomischen

Größen in dem Modell (meistens als Variable) betrachtet werden, welche Beziehungen zwischen diesen Größen in welcher Form postuliert werden und welche Konsequenzen sich aus den Hypothesen ableiten lassen. Viele dieser Modelle sind so konstruiert, dass ihre Parameter mit statistisch erhobenen Daten berechnet werden können. Ist dies geschehen, so hat man ein konkretes mathematisches Abbild einer wirtschaftswissenschaftlichen Problemstellung gewonnen und kann es mit Hilfe von Computern durchrechnen.

Dadurch ergeben sich zwei wünschenswerte Möglichkeiten. Zum einen können aus allgemeinen, zunächst qualitativ postulierten Beziehungen ganz konkrete Teilmodelle entwickelt werden, die auch quantitative Aussagen erlauben und nicht nur Phrasen wie „es wird besser", „positive Anzeichen" etc. Zum anderen kann die Theorie anhand des Modells dadurch überprüft werden, dass Daten der Vergangenheit benutzt werden, um mit Modellrechnungen Entwicklungen für spätere, aber bereits vergangene Jahre (nachträglich) zu „prognostizieren". Ist die Theorie nicht in der Lage, den Verlauf der Vergangenheit zu erklären, so sind natürlich Zweifel an ihrer Qualität angebracht, und man sollte sie tunlichst auch nicht für (wirkliche) Zukunftsprognosen benutzen. Dadurch wird die Theorie im Popper'schen Sinne falsifizierbar und steht wissenschaftstheoretisch (für die, die diese Wissenschaftstheorie befürworten) auf einem anderen Niveau.

Die Wirtschaftswissenschaften haben sich nicht nur der Mathematik bedient, sondern sie auch in vielen Teilbereichen befruchtet. Angeregt durch wirtschaftswissenschaftliche Fragestellungen sind zum Beispiel Gebiete wie die lineare, nichtlineare und ganzzahlige Optimierung, Wahrscheinlichkeitstheorie und hier insbesondere die Risikomodellierung, Gleichgewichtstheorie, Operations Research oder verschiedene Teilgebiete der Statistik in den Blickpunkt mathematischer Forschung geraten und gehören heute zu den anwendungsreichsten Disziplinen der Mathematik. Manchmal konnten auch für bekannte Methoden der Mathematik ökonomische Interpretationen gefunden werden, die sehr schön Beziehungen zwischen abstrakten Definitionen und Begriffen der realen Welt beleuchten und sowohl für Mathematiker als auch Wirtschaftswissenschaftler hilfreich sind.

In dieser Vorlesung soll keineswegs bis in die oben angedeuteten Tiefen der gegenwärtigen Forschung eingedrungen werden. Es werden sehr simple und in höchstem Maße vereinfachte ökonomische Fragestellungen behandelt. Es soll gezeigt werden, wie diese Fragestellungen mit elementaren Methoden der linearen Algebra behandelt werden können und dabei bereits zu keineswegs trivialen mathematischen Problemen führen. Diese mathematischen Probleme können jedoch in unseren Beispielen vielfach gelöst und für ökonomische Anwendungen in Theorie und Praxis nutzbar gemacht werden.

Gleichzeitig wird auch auf die ökonomische Interpretation mathematischer Sachverhalte Wert gelegt. Speziell werden die Konzepte der Input-Output-Analyse besprochen, die zwar mathematisch relativ trivial, deren ökonomische Interpretationen aber nicht ganz so einfach sind und in der wirtschaftswissenschaftlichen Praxis in den vergangenen Jahren mit Erfolg angewendet wurden.

Wir beginnen mit der Betrachtung einzelner Beispiele aus dem täglichen Leben und wollen dabei einige ökonomische Fragen – jedoch nicht im Detail – beleuchten.

Beispiel 1.1. ***Änderung des Verbraucherverhaltens***
Der Wissenschaftliche Mitarbeiter A hat die Gewohnheit, in den Sommerferien zum Windsurfen an die Ostsee zu fahren. In diesem Jahr hat er sich jedoch entschlossen, stattdessen einen neuen PC zu kaufen. Welche Auswirkungen hat diese Entscheidung auf die Volkswirtschaft?

Zunächst gibt es natürlich einige offensichtliche direkte Auswirkungen. Der Umsatz des Elektrohandels erhöht sich, während der des Touristikgewerbes sinkt. Dadurch werden jedoch einige weitere (indirekte) Reaktionen ausgelöst: z. B. Erhöhung des Umsatzes bei den Computerherstellern, bei der Chemieindustrie (das Gehäuse ist teilweise aus Plastik), bei der Metallindustrie (ein Computer hat Metallteile), bei der Feinmechanik (Drucker etc.), und es wird mehr Personal in Herstellung und Verkauf beschäftigt. Dagegen sinken z. B. die Umsätze der Busunternehmen (A hat immer Busreisen gebucht), im Hotel- und Gaststättengewerbe, in der Sportartikelindustrie, in der Chemie- und Feinmechanikindustrie (Herstellung von Surfboards) und daher auch in der Metallindustrie, und in all diesen Industriezweigen wird weniger Personal beschäftigt.

Diese (sehr beschränkte) qualitative Analyse können wir z. B. wie in Abbildung 1.1 graphisch darstellen. Dabei bedeutet ein Pfeil mit einem „+“ Zeichen eine umsatzerhöhende und ein Pfeil mit einem „-“ Zeichen eine umsatzerniedrigende Auswirkung.

Offensichtlich müssen in Abbildung 1.1 zu einer ganz genauen Beschreibung der Wirkung der Entscheidung von A viel mehr Kreise und Pfeile gezeichnet werden: man müsste die Effekte auch quantitativ wiedergeben, um wichtige von unwichtigen Beziehungen unterscheiden, und insbesondere, um diese berechnen zu können. Es wäre z. B. wichtig zu wissen, ob der Verzicht auf den Urlaub und der Kauf des Rechners das Beschäftigungsniveau erhöht oder erniedrigt haben (es gab sowohl positive wie auch negative Auswirkungen). Gerade eine Frage wie die letzte ist bei der heutigen Arbeitslosenzahl von besonderer Bedeutung und sollte möglichst genau beantwortet werden können. Wir werden später sehen, dass dies recht gut möglich ist.

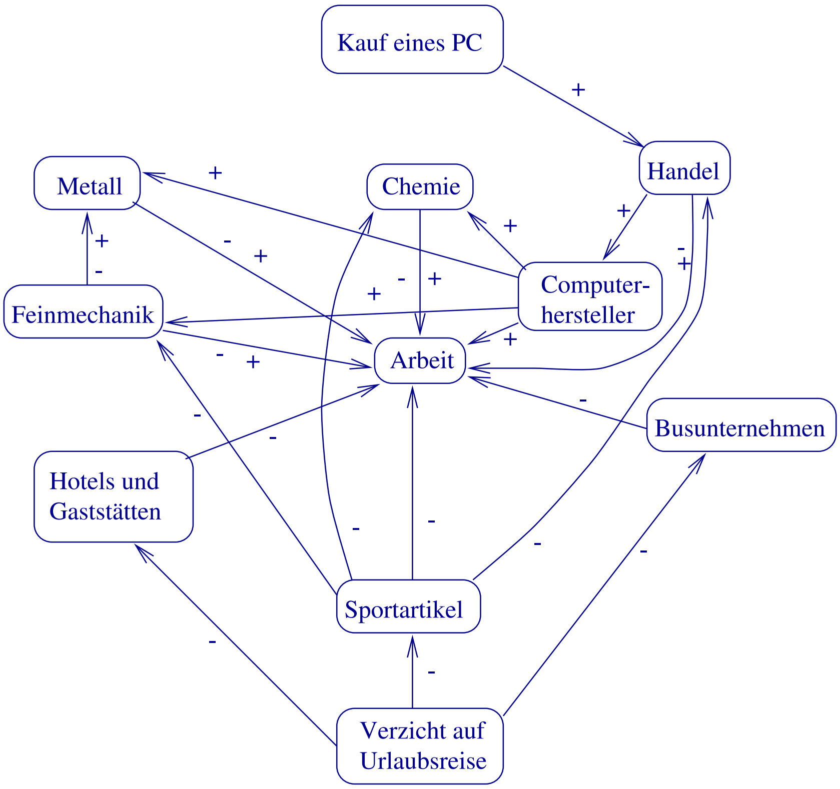

Abbildung 1.1: Das Bild könnte etwas übersichtlicher sein. Dahinter steckt eine gewisse Absicht! Wie könnte man es „schöner“ machen? Eine Möglichkeit besteht darin, die Überkreuzungen von Pfeilen zu verringern. Hausaufgabe: Kann man das Diagramm so zeichnen, dass keine Überkreuzungen von Pfeilen vorkommen? Diese Frage führt in die Graphentheorie (Satz von Kuratowski) und ein Gebiet „Automatic Graph Drawing“, das im Durchschnitt von Mathematik und Informatik liegt und das derzeit sehr aktiv ist. Die interessantesten Anwendungen kommen aus dem VLSI-Design, dem automatischen Zeichnen von Karten, die neben Straßen auch Wasser-, Strom-, Gasleitungen, etc. enthalten und dem automatischen Erstellen von Konstruktionszeichnungen wie sie z. B. bei chemischen Anlagen vorkommen.

Beispiel 1.2. ***Auswirkungen von Lohnerhöhungen***
Arbeitgeber und Gewerkschaften der Stahlindustrie haben sich auf eine Lohnerhöhung von 4 % geeinigt. Das Management glaubt, durch Rationalisierung 2 % Produktivitätsfortschritt erzielen zu können, und will die Preise um 2 % anheben, um keine Verluste zu machen. Um wieviel Prozent muss die Autoindustrie die Preise anheben, um die Stahlpreiserhöhung ohne Gewinneinbußen (gleiche Verkaufszahlen vorausgesetzt) verkraften zu können?

Nehmen wir an, dass 10 % der Produktionskosten eines Autos für Erzeugnisse der Stahlindustrie aufgewendet werden müssen. Daraus folgt, dass die direkten Mehrkosten für Stahl eine Preiserhöhung um 0,2 % nach sich ziehen würden. Jedoch hat die Stahlpreiserhöhung auch Auswirkungen auf die Elektroindustrie, Chemieindustrie etc., die deswegen u. U. auch ihre Preise erhöhen. Diese Preiserhöhungen müssen ebenfalls bei der Kalkulation berücksichtigt werden.

Die Bedeutung des Beispiels 1.2 wurde den Verbrauchern Anfang der 70er Jahre besonders eindrucksvoll von der Ölindustrie vor Augen geführt. Die drastischen Ölpreiserhöhungen durch die OPEC-Länder wurden von fast allen Industriezweigen als Argument zu außerordentlichen und nicht (zumindest nicht durch die Preisverschiebung beim Öl) gerechtfertigten Preiserhöhungen genutzt. Supermärkte gaben z. B. seinerzeit Plastiktüten kostenlos an Käufer ab. Die Ölpreiserhöhung wurde als Argument benutzt, und das wurde auch öffentlich verkündet, diesen Service abzuschaffen und Einkaufstüten nur gegen ein Entgelt abzugeben.

Hier und in anderen Fällen könnten bessere Informationen über Preisüberwälzungseffekte zu wesentlich wirksameren Maßnahmen von Kunden und Verbraucherverbänden gegen falsch etikettierte Preiserhöhungen führen. Andererseits sollte man sich auch immer dessen bewusst sein, dass es keine „richtigen Preise" gibt. Preise sind nur zum Teil durch Kosten bestimmt. Viel stärker sind sie von starker oder mangelnder Konkurrenz (also dem Markt) und staatlichen Eingriffen bestimmt. Keine Firma kann allerdings überleben, wenn ihre Erlöse langfristig unter den Produktionskosten liegen.

Beispiel 1.3. ***Beschäftigungsrate***
Angenommen ein Gerücht würde verbreitet, dass bestimmte Produkte der kosmetischen Industrie krebserzeugende Substanzen enthalten. (Dinge dieser Art passieren immer wieder, und es ist sehr schwer für die Industrie falsche Behauptungen öffentlich zu widerlegen.) Daraufhin werden viele Personen unsicher und kaufen diese Artikel nicht mehr. Der Verkauf der Kosmetikindustrie sinkt um 25 %. Wie wirkt sich dies auf die allgemeine Beschäftigungslage aus?

Auch hier haben wir zunächst eine direkte Auswirkung auf den Kosmetikhandel und die Pharmaindustrie. Der Produktionsrückgang wirkt jedoch indirekt auf das Transportgewerbe, die Maschinenbauindustrie, die Elektrizitätswirtschaft etc. Wir werden später sehen, wie diese direkten und indirekten Wirkungen eines solchen Gerüchts auf die Arbeitslosenzahl erfasst werden können.

Bei einer solchen Analyse gibt es wiederum zwei Möglichkeiten. Man kann unterstellen, dass das durch Konsumverzicht ersparte Geld nicht für andere Dinge ausgegeben wird. Diesen Fall werden wir später hauptsächlich untersuchen. Schwieriger wird es, wenn man annimmt, dass eine Konsumverlagerung stattfindet. Hier muss man sich überlegen (und weiss i. a. nicht, wie man das anstellen soll), welche Produkte statt der Kosmetikartikel konsumiert werden. Meistens behilft man sich in diesem Fall mit der Durchrechnung (Simulation) mehrerer Alternativen.

Ein in seinen Auswirkungen besonders krasses Beispiel der obigen Art haben wir in den letzten Jahren in Europa erlebt. Publikationen über mögliche Folgen des Verzehrs von Fleisch von BSE-kranken Rindern haben zu erheblichen Veränderungen des Verbraucherverhaltens geführt. Wissenschaftler in England hielten die von der EU geforderten Rinderschlachtungsmaßnahmen für völlig überzogen, andere warnten nachdrücklich vor verheerenden Gesundheitsschäden durch die Verarbeitung von BSE-Rindern. Wer hatte recht? Obwohl sie zunächst mit dem BSE-Problem in England nichts zu tun hatten, erlitten die Rinderzüchter auf dem europäischen Festland große finanzielle Einbußen. Wir alle wurden durch Ausgleichszahlungen der EU zur Kasse gebeten.

Was waren (bzw. sind noch immer) die gesamtwirtschaftlichen Auswirkungen des BSE-Skandals in Deutschland, England bzw. Gesamt-Europa?

Kapitel 2

Lineare Tauschmodelle und damit zusammenhängende mathematische Probleme

Wir beginnen mit zwei sehr einfachen und recht unrealistischen Modellen einer Volkswirtschaft. Die Betrachtung solcher Modelle trägt nicht unbedingt zur Erklärung realer Phänomene bei. Anhand solcher Modelle kann man jedoch sehr gut mit dem Studium ökonomischer Sachverhalte beginnen. Man kann all die (sinnvollen) Fragen stellen, die man gern in der Realität beantwortet wüsste, und versuchen, sie im Rahmen des einfachen Modells zu untersuchen. Es ist hier häufig nicht schwierig, die ökonomischen Implikationen starker Annahmen zu entdecken und allgemeine Existenzfragen (z. B. von Gleichgewichtspreisen etc.) zu beantworten.

Beispiel 2.1. ***Ein einfaches Tauschmodell*** *Wir nehmen an, dass eine Volkswirtschaft auf folgende Weise beschrieben werden kann.*

(a) *Es gibt n verschiedene Produzenten (Unternehmer) $P_1, \ldots, P_n$.*

(b) *Es gibt n verschiedene Güter $G_1, \ldots, G_n$.*

(c) *Das Gut G_i wird nur vom Produzenten $P_i, i = 1, \ldots, n$ hergestellt.*

(d) *Wir betrachten eine festgelegte Zeitperiode, etwa ein Kalenderjahr.*

(e) *Wir wählen (durch geeignete Skalierung) die Einheiten der Güter so, dass jeder Produzent P_i genau eine Einheit des Gutes G_i pro Jahr produziert.*

(f) *Zur Produktion des Gutes G_i benötigt der Produzent P_i gewisse Mengen anderer Güter. Wir bezeichnen die Menge des Gutes G_j, das zur Herstellung des Gutes G_i pro Jahr benötigt wird, mit a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, und nehmen an, dass gilt*

$$a_{ij} \geq 0, \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

(g) *Wir nehmen an, dass unser Modell* **abgeschlossen** *ist, das heißt, dass es keinen Güteraustausch mit der Welt außerhalb des Modells gibt (z. B. keinen Import und Export).*

(h) *Wir nehmen außerdem an, dass alle während eines Jahres produzierten Güter auch verbraucht werden.*

Wir diskutieren kurz einige der Annahmen.

Die letzte Annahme 2.1 (h) ist technisch dadurch einfach zu erfüllen, dass wir den nicht an andere Produzenten verkauften Anteil des Gutes G_i dem Eigenverbrauch a_{ii} zuschlagen, wobei P_i überlassen bleibt, was er damit macht, z. B. lagern oder verschrotten.

Die Annahme in 2.1 (g), dass das Modell abgeschlossen ist, erscheint zunächst ein wenig unnatürlich, denn erstens hat jedes Land einen gewissen Außenhandel, d. h. Importe und Exporte müssen irgendwie berücksichtigt werden, und zweitens scheint es so, dass Privatpersonen (Haushalte), für die ja die gesamte Produktion erstellt wird, nicht im Modell behandelt werden, da sie ja keine Produzenten sind. Die Haushalte sind jedoch die Produzenten von Arbeit und verkaufen diese an andere Produzenten, so dass der private Sektor sehr wohl in einem abgeschlossenen Modell berücksichtigt werden kann.

Modelle, bei denen (im Modell nicht erklärte) Kontakte zur Außenwelt bestehen, nennt man *offen*. Mit einem einfachen „Trick“ kann man solche Modelle „abschließen“. Man führt einen „künstlichen Produzenten“ namens „restliche Welt“ ein, dessen Gut die „Importe“ sind und der von den übrigen Produzenten deren „Exporte“ kauft. Auf diese Weise kann man also auch in einem abgeschlossenen Modell Importe und Exporte behandeln.

Die Annahme in 2.1 (h), dass für jedes Gut j Verbrauch (das ist der Eigenverbrauch a_{jj} plus die Summe der Lieferungen a_{ij} an die übrigen Produzenten i) und Produktion (diese ist nach Annahme 2.1 (e) eine Einheit) gleich sind, impliziert natürlich, dass folgende Gleichungen gelten:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Fassen wir die in 2.1 (f) definierten Verbrauchskoeffizienten a_{ij} in Form einer Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ zusammen, so besitzt A zwei sehr interessante Eigenschaften: *Alle Elemente sind nichtnegativ und die Spaltensummen sind 1.* Für Matrizen mit solchen Eigenschaften wollen wir eine Bezeichnung einführen.

Definition 2.2. *Eine (n, n)-Matrix $A = (a_{ij})$ mit den Eigenschaften*

$$a_{ij} \geq 0 \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \qquad j = 1, \ldots, n$$

heißt **Tauschmatrix**.

(Tauschmatrizen tauchen auch in verschiedenen anderen Teilgebieten der Mathematik auf, zum Beispiel in der Wahrscheinlichkeitstheorie. Dort heißen sie *stochastische Matrizen.* Wir verwenden hier allerdings den Namen Tauschmatrix, weil er für unsere Anwendungen suggestiver ist.)

Die nachfolgende $(3,3)$-Matrix ist ein Beispiel für eine Tauschmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Wie man an diesem Beispiel sieht, sind die Zeilensummen nicht notwendig auch gleich 1. (Matrizen, bei denen alle Spalten- und Zeilensummen 1 sind, heißen *doppelt-stochastisch.)*

Bisher haben wir uns nur mit „Mengen“ von Gütern befaßt. Zwar kauft und tauscht man im realen Leben auch Gütermengen, jedoch werden diese normalerweise mit Preisen bewertet, und man verhandelt i. a. über den Preis eines Gutes. Wir werden uns also auch mit Fragen befassen müssen wie

- *Was ist der Wert (Preis) eines Gutes?*
- *Gibt es Preise für die produzierten Güter, so dass die Volkswirtschaft „stabil“ ist?*

In der Ökonomie ist die „Wertfrage“ eindeutig und klar gelöst. Es gibt keinen psychologischen oder emotionalen Wert eines Gutes. Der Wert wird durch den Preis ausgedrückt. „Stabilität“ ist ein schwierigeres Konzept. Hierauf werden wir noch genauer eingehen.

Wir machen für unser Modell aus Beispiel 2.1 eine zusätzliche Annahme.

(i) *Der Preis der Einheit des Gutes G_i (im betrachteten Kalenderjahr) ist π_i (Geldeinheiten, die wir jedoch im weiteren nicht erwähnen werden), $i = 1, ..., n$.*

Wir können nunmehr Einnahme- und Ausgaberechnungen durchführen. Da jeder Produzent genau eine Einheit des Gutes G_i produziert, erzielt er *Einnahmen* in Höhe von π_i. Ebenso einfach sind seine *Ausgaben* zu berechnen. Da er a_{ij} Einheiten des Gutes j bezieht, belaufen sich seine Ausgaben auf

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\pi_j.$$

Nachdem wir nun einige ökonomische Grundbegriffe innerhalb unseres Modells erklärt haben, können wir damit beginnen, allgemein interessierende ökonomische Fragen bezüglich unseres Modells zu stellen und im Rahmen unseres Modells zu beantworten. (Die Bedeutung derartiger Antworten für die reale Welt muss natürlich kritisch hinterfragt werden!)

Wir wollen uns zunächst mit „Stabiliät“ befassen. Wir erinnern ausdrücklich daran, dass unser Tauschmodell *statisch* ist. Das heißt, wir betrachten eine Zeitperiode einer Volkswirtschaft und nichts anderes. Wir untersuchen (zunächst) nicht die Entwicklung der Volkswirtschaft aus der Vergangenheit in die Zukunft, sondern machen nur eine Momentaufnahme. Was kann man in einem solchen System als „stabil“ bezeichnen? Offenbar ist es sinnvoll, eine derartige Volkswirtschaft stabil zu nennen, wenn in dem betrachteten Zeitraum keiner der Produzenten seinen Bankrott erklären muss. In anderen Worten, wir sehen eine solche Volkswirtschaft dann als stabil an, wenn kein Produzent mehr ausgibt als er einnimmt. Diese Stabilitätsdefinition stellt also eine Bedingung an die Budgets der Produzenten. Offensichtlich ist eine Volkswirtschaft des im Modell (2.1) betrachteten Typs nicht automatisch stabil. Um diese Stabilität zu erreichen, müssen Preise gefunden werden, die die Ökonomie „ins Gleichgewicht bringen“.

Definition 2.3. *(Stabilitätsbedingung)*
Ein Preissystem $p = (\pi_1, \ldots, \pi_n)^T \in I\!R^n$ *heißt* **Gleichgewichtssystem**, *falls für alle* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *gilt*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\pi_j \leq \pi_i.$$

In der realen Welt ist die Preisgestaltung eine wichtige Aufgabe. Wie oft hören wir Aussagen wie „die Ölpreise sind zu hoch“, „die Lebensmittelpreise sind zu niedrig“ verbunden mit der Klage, dass dadurch einige (oder gar alle) Wirtschaftszweige in den Ruin geführt werden. Implizit enthalten diese Aussagen die Behauptung, dass es „gute“ oder „richtige“ oder gar „gerechte“ Preise für alle Güter gäbe. Ob es solche Preise in der realen Ökonomie tatsächlich gibt, sei als offene Frage dahingestellt. Im Rahmen eines Modells können wir die Wahrheit dieser Behauptungen allerdings untersuchen.

Problem 2.4. *Gegeben sei eine Tauschmatrix A, gibt es ein zugehöriges Gleichgewichtspreissystem* $p^T = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$*?*

Der Vektor $p = 0$ ist offenbar eine mathematische Lösung dieses Problems. An solch einer trivialen Lösung sind Ökonomen (und nicht nur diese) natürlich nicht interessiert. Unsere (ökonomische) Frage 2.4 können wir aufgrund der oben gemachten Annahmen bezüglich unseres Tauschmodells 2.1 umformulieren in ein Problem der linearen Algebra.

Problem 2.5. *Gegeben sei eine* (n,n)*-Matrix A mit*

(a) $a_{ij} \geq 0 \quad i,j = 1, \ldots, n \qquad$ *(kurz* $\quad A \geq 0$*),*

(b) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad j = 1, \ldots, n \qquad$ *(kurz* $\quad \mathbf{1}^T A = \mathbf{1}^T$ *mit* $\mathbf{1}^T = (1, \ldots, 1)$*).*

Gibt es einen nichtnegativen Vektor $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft $Ap \leq p$?

(Einen Vektor $p \in \mathbb{R}^n$ mit $p \geq 0$ und $p \neq 0$ nennen wir *semipositiv.*)

Zunächst kann man sich sehr einfach überlegen, dass jedes Gleichgewichtspreissystem nicht nur die Ungleichung aus Definition 2.3 erfüllen, sondern folgende Eigenschaft haben muss:

Lemma 2.6. *Ist A eine Tauschmatrix und $p \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $p \geq 0$ dann gilt*

$$Ap \leq p \Leftrightarrow Ap = p.$$

Beweis. Wir brauchen nur die Implikation von links nach rechts zu beweisen. Es gilt $\mathbf{1}^T = \mathbf{1}^T A$, und daraus folgt $\mathbf{1}^T p = \mathbf{1}^T Ap$. Aus $A \geq 0$, $p \geq 0$ und $Ap \leq p$ folgt $0 \leq Ap \leq p$. Also ist $\mathbf{1}^T(Ap)$ eine Summe von nicht-negativen Summanden $A_{i,p}$, die jeweils nicht größer sind als die entsprechenden (nicht-negativen) Summanden p_i von $\mathbf{1}^T p$. Da $\mathbf{1}^T p = \mathbf{1}^T Ap$ müssen bereits die einzelnen Summanden übereinstimmen. □

Ökonomische Interpretation von 2.6. *Bei einem gegebenen Preissystem p erzielt ein Produzent genau dann Gewinne (im Rahmen von Modell 2.1), wenn mindestens ein anderer Produzent Verluste macht.*

Lemma 2.6 hat nun die ökonomische Frage nach einem Gleichgewichtspreissystem zu einer klassischen Aufgabe der linearen Algebra reduziert, wobei dieses Problem auf (mindestens) drei Arten formuliert werden kann.

Problem 2.7. *Gegeben eine Tauschmatrix A, finde einen semipositiven Fixpunkt von A, d. h. einen Vektor $p \neq 0$ mit $p \geq 0$ und $Ap = p$.*

Problem 2.8. *Gegeben eine Tauschmatrix A, finde einen semipositiven Vektor im Kern von $(I - A)$, d. h. einen Vektor $p \geq 0, p \neq 0$ mit $(I - A)p = 0$.*

Problem 2.9. *Gegeben eine Tauschmatrix A, zeige, dass 1 ein Eigenwert von A ist, und finde einen semipositiven Eigenvektor von A zum Eigenwert 1.*

Es ist eine Frage des Geschmacks oder der eigenen Vorbildung, welche der drei Problemformulierungen als adäquat angesehen wird und welche man mathematisch untersuchen möchte, um die dahinter stehende ökonomische Frage zu lösen. Es ist selten a priori klar, welcher Ansatz zum Erfolg führt. Hier müssen die Mathematiker „probieren“, sie laufen dabei gelegentlich in Sackgassen. Wir werden in unserem Fall Problem 2.7 in voller Allgemeinheit im nächsten Kapitel studieren. Es zeigt sich aber bereits hier, dass so simple Modelle wie das Tauschmodell 2.1 zu nichttrivialen mathematischen Problemstellungen führen können.

Beispiel 2.10. ***Ein einfaches lineares Modell des internationalen Handels***

(a) *Wir betrachten n Länder $L_1, \ldots, L_n$, die miteinander Handel treiben.*

(b) *Wir nehmen an, dass die Länder eine gemeinsame internationale Währung haben, sagen wir EURO.*

(c) *Alle Güterpreise seien fest vorgegeben und seien während der betrachteten Zeitperiode konstant. (Wir wollen hier also keine Gleichgewichtspreise berechnen.)*

(d) *Wir nehmen an, dass in jedem Land L_j das Staatseinkommen y_j allein durch den Verkauf der im eigenen Land produzierten Güter (im Lande selber oder im Ausland) erzielt wird.*

(e) *Linearitätsannahme: Die Käufe eines Landes L_j in einem anderen Land $L_i, i = 1, \ldots, n$ betragen einen fest vorgegebenen Anteil a_{ij} des jeweiligen Staatseinkommens y_j und hängen nicht von der Höhe des Staatseinkommens ab, d. h. das Land L_j gibt $a_{ij}y_j$ EURO im Land L_i zum Kauf von Gütern aus.*

Die Linearitäsannahme 2.10 (e) ist natürlich sehr restriktiv und unrealistisch. Betrachten wir eine Person die a_L EURO für Lebensmittel, a_K EURO für Kleidung, a_M EURO für Miete und a_U EURO für Unterhaltung verwendet, so wird sie bei einer Einkommensreduzierung nicht alle Ausgaben gleichmäßig senken, sondern sicherlich zunächst die Ausgaben für Kino-, Kneipenbesuche etc. verringern. Insbesondere die Ausgaben für Miete sind sehr schwer zu verändern. Das heißt, die Proportionen zwischen den Ausgabeblöcken verschieben sich bei Einkommensschwankungen normalerweise. Andererseits ist die Annahme 2.10 (e) nicht ganz so unrealistisch, wenn wir sehr kleine Änderungen bei sehr großen Aggregaten wie Ländern betrachten.

Nach Definition sind die Zahlen a_{ij} Anteile des Staatseinkommens, das heißt, wir wissen, dass

$$a_{ij} \geq 0 \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad j = 1, \ldots, n$$

gilt. Also ist A eine Tauschmatrix. Wir wollen folgende Aufgabe studieren:

Problem 2.11. *Wie groß ist das Staatseinkommen der Länder $L_1, \ldots, L_n$?*

Nach unserer Definition ist das Staatseinkommen des Landes L_i der Wert der Verkäufe von L_i an sich und alle anderen Länder. Der Wert der Verkäufe von L_i an L_j ist nach 2.10 (e) $a_{ij}y_j$. Daraus folgt, dass das Staatseinkommen y_i von L_i die folgende Gleichung erfüllt

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \quad i = 1, \ldots, n,$$

oder vektoriell geschrieben:

$$Ay = y,$$

wobei A die durch 2.10 (e) gegebene Tauschmatrix ist. Aus ökonomischen Gründen ist es natürlich sinnlos, sich mit dem Einkommensvektor $y = 0$ zu beschäftigen. Außerdem macht es in diesem Modell keinen Sinn, negative Staatseinkünfte in Betracht zu ziehen. Das heißt, Problem 2.11 läßt sich wie folgt formulieren: Gegeben sei eine Tauschmatrix A, gesucht ist ein semipositiver Vektor y mit $Ay = y$.

Diese Aufgabe ist genau dieselbe wie die, die wir aus der Betrachtung des Gleichgewichtspreisproblems beim einfachen Tauschmodell 2.1 erhalten haben. Daraus folgt, dass das Einkommensproblem 2.11 ebenfalls durch Untersuchung der Probleme 2.7, 2.8 oder 2.9 gelöst werden kann.

Auf den ersten Blick unterschiedlich erscheinende ökonomische Probleme haben in diesem Fall also zum gleichen mathematischen Modell geführt.

Kapitel 3

Gleichgewichtspreise, Alternativsätze und Eigenvektoren

Ziel dieses Kapitels ist eine vollständige Lösung des Problems 2.8 (und damit natürlich auch von 2.7, 2.9, 2.4 und 2.11). Wir werden zeigen, dass es zu jeder Tauschmatrix A einen semipositiven Vektor p gibt mit $Ap = p$. Dazu benötigen wir einige Alternativsätze für lineare Gleichungs- und Ungleichungssysteme. Speziell wollen wir die Lösung auf das sogenannte *Farkas-Lemma* zurückführen.

Zunächst beschreiben wir eine Methode, das so genannte *Fourier-Motzkin-Eliminationsverfahren*, das die Lösbarkeit eines Ungleichungssystems $Ax \leq b$ auf die Lösbarkeit eines Ungleichungssystems $\overline{D}\overline{x} \leq d$ reduziert, welches eine Variable weniger besitzt.

Seien also eine (m,n)-Matrix A und $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Wir wollen wissen, ob $Ax \leq b$ eine Lösung hat. Wir betrachten die erste Spalte $A._1$ von A und ordnen die Zeilen des Systems $Ax \leq b$ so um, daß die ersten m' Elemente der ersten Spalte positiv sind, die nächsten $m'' - m'$ Elemente negativ und die restlichen $m - m' - m''$ Null sind. Dann multiplizieren wir die ersten m'' Zeilen des umgeordneten Systems jeweils mit dem Wert $1/|a_{ij}|, i = 1, \ldots, m''$. Das sich daraus ergebende System nennen wir $A'x \leq b'$. Es hat die Form

$$\begin{aligned}
x_1 + \sum_{j=2}^{n} a'_{ij}x_j &\leq b'_i \quad i = 1, \ldots, m' \\
-x_1 + \sum_{j=2}^{n} a'_{ij}x_j &\leq b'_i \quad i = m'+1, \ldots, m'' \\
\sum_{j=2}^{n} a'_{ij}x_j &\leq b'_i \quad i = m''+1, \ldots, m
\end{aligned}$$

Die beiden ersten Ungleichungssysteme können wir in der Form

$$\begin{array}{rcll} & x_1 \leq & b'_i - \sum\limits_{j=2}^{n} a'_{ij} x_j & i = 1, \ldots, m' \\ \sum\limits_{j=2}^{n} a'_{ij} x_j - b'_i \leq & x_1 & & i = m'+1, \ldots, m'' \end{array}$$

schreiben. Daraus sieht man sofort, dass diese beiden Ungleichungssysteme genau dann eine Lösung haben, wenn gilt:

$$\max_{m'+1 \leq s \leq m''} \left(\sum_{j=2}^{n} a'_{sj} x_j - b'_s \right) \leq x_1 \leq \min_{1 \leq t \leq m'} \left(b'_t - \sum_{j=2}^{n} a'_{tj} x_j \right). \tag{3.1.1}$$

Damit haben wir die Variable x_1 durch die übrigen Variablen abgeschätzt, und wir können sie eliminieren. Wir ersetzen max und min in (3.1.1) einfach dadurch, dass wir alle Kombinationen von Ungleichungen betrachten. Daraus ergibt sich unmittelbar, dass die Lösbarkeit des Systems

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{n} (a'_{sj} + a'_{tj}) x_j &\leq b'_t + b'_s, \quad t = 1, \ldots, m' \text{ und } s = m'+1, \ldots, m'', \\ \sum_{j=2}^{n} a'_{ij} x_j &\leq b'_i, \quad i = m''+1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

welches wir kurz mit $\overline{D}\overline{x} \leq d$ bezeichnen wollen, äquivalent zur Lösbarkeit von $Ax \leq b$ ist. Das System $\overline{D}\overline{x} \leq d$ hat, da die Variable x_1 eliminiert wurde, nur noch $n-1$ Variablen und besteht aus $m'(m''-m') + m - m''$ Zeilen. Jede Lösung y von $Ax \leq b$ liefert, da wir ja nur umgeordnet, skaliert und Zeilen addiert haben, auch eine Lösung von $\overline{D}\overline{x} \leq d$, wenn wir die erste Komponente weglassen. Ist $\overline{y}$ eine Lösung von $\overline{D}\overline{x} \leq d$, so wählen wir eine reelle Zahl y_1, die (3.1.1) erfüllt, und erweitern $\overline{y}$ durch Hinzufügung der ersten Komponente y_1 zu einem Vektor $y \in \mathbb{R}^n$. Dieser ist dann nach Konstruktion eine Lösung von $Ax \leq b$. Bezeichnen wir mit D die Matrix, die aus $\overline{D}$ durch Hinzufügen einer ersten Spalte, die nur Nullen enthält, entsteht, so gilt aufgrund der Verfahrensvorschriften $D = UA, d = Ub$, wobei U eine nichtnegative Matrix ist, durch die das Umordnen, Skalieren und Addieren von Zeilen beschrieben wird, das zu dem System (3.1.2) führt.

Mit Hilfe der *Fourier-Motzkin-Elimination*, die für verschiedene Probleme der Polyedertheorie einen brauchbaren Algorithmus liefert, können wir auf elementare Weise folgenden Satz beweisen:

Satz 3.1. *(Farkas-Lemma) Seien A eine (m,n)-Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$, dann gilt genau eine der beiden folgenden Aussagen:*

(i) $\exists x \in \mathbb{R}^n$ *mit* $Ax \leq b$.

(ii) $\exists u \in \mathbb{R}^m$ *mit* $u \geq 0, \quad u^T A = 0^T$ *und* $u^T b < 0$.

Bevor wir mit dem Beweis beginnen, sei angemerkt, dass wir noch eine Reihe von Sätzen ähnlichen Typs beweisen werden. In diesen Sätzen gilt jeweils eine von zwei (oder mehr) Alternativen. Deshalb werden derartige Resultate häufig *Alternativsätze* genannt. Das Farkas-Lemma ist ein Prototyp dieser Art und ist ein *Alternativsatz für die Lösbarkeit von Ungleichungssystemen.* Typischerweise ist bei solchen Sätzen offensichtlich, dass nicht beide Alternativen gleichzeitig wahr sein können. Das folgt i. a. durch simple Rechnung.

Nehmen wir im Falle von Satz 3.1 also an, dass beide Alternativen gleichzeitig möglich sind, dann gibt es ein x mit $Ax \leq b$ und ein $u \geq 0$ mit $u^T A = 0^T$ und $u^T b < 0$. Daraus ergibt sich der Widerspruch: $0 = 0^T x = (u^T A)x = u^T(Ax) \leq u^T b < 0$.

Beweis. Wir zeigen nun noch, dass (*ii*) gilt, wenn (*i*) nicht gilt. Wir führen den Beweis durch Induktion.

Ist $n = 1$, so besteht die Matrix D des zu $Ax \leq b$ äquivalenten Systems $Dx \leq d$ aus einer Spalte mit lauter Nullen. Das System $0x_1 \leq d_i, i = 1, \ldots, m'(m'' - m') + m - m''$ ist genau dann lösbar, wenn $d_i \geq 0$ für alle i gilt. Ist es unlösbar, dann gibt es ein k mit $d_k < 0$, und wegen $D = UA$ gilt $u^T A = 0$ und $u^T b = d_k < 0$ für die k-te Zeile $u^T := U_k$ von U. Also gilt das Farkas-Lemma für $n = 1$.

Nehmen wir daher an, dass $Ax \leq b$ ein System mit $n \geq 2$ Variablen ist, das keine Lösung hat. Wir wissen, dass dann das durch (3.1.2) gegebene äquivalente System $\overline{D}\overline{x} \leq d$ in $n - 1$ Variablen auch keine Lösung hat. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es dann einen Vektor $v \geq 0$ mit $v^T \overline{D} = 0$, $v^T d < 0$. Ist D die Matrix, die durch Hinzufügen einer ersten Nullspalte zu $\overline{D}$ entsteht und U die nichtnegative Matrix mit $D = UA$, $d = Ub$, so gilt natürlich $v^T D = v^T(UA) = 0$ und $v^T d = v^T(Ub) < 0$. Folglich ist $u^T := v^T U$ ein nichtnegativer Vektor, der (ii) erfüllt. $\square$

Wir möchten an dieser Stelle auf eine wichtige Eigenschaft des Farkas-Lemmas (und anderer Alternativsätze) aufmerksam machen, die z. B. in der Komplexitätstheorie von Bedeutung ist.

Stellen Sie sich vor, Sie seien ein Mathematiker in der Industrie, der seinen Chef davon überzeugen will, dass ein gegebenes System $Ax \leq b$ eine Lösung hat, beziehungsweise dass es keine Lösung hat. Hat es eine Lösung, dann könnte es sein, dass Sie eine solche, sagen wir y, durch geschicktes Probieren oder „Eingebung“ finden (wir werden später auch sehen, dass man eine Lösung relativ schnell berechnen kann). Dann können Sie den Vektor y ihrem Chef präsentieren, und er kann sich durch Einsetzen von y in das Ungleichungssystem davon überzeugen, dass Sie ihn nicht belogen haben. Hat $Ax \leq b$ jedoch keine Lösung, dann können Sie bis zu Ihrem Lebensende herumprobieren und Ihrem Chef lediglich berichten, dass Sie trotz aller Bemühungen keine Lösung gefunden haben. Sie können ihn aber damit kaum von der Inkonsistenz des Ungleichungssystems überzeugen. Mit dem Farkas-Lemma als Hilfsmittel dürfte Ihnen das jedoch gelingen. Sie suchen einfach nach einer Lösung von $u \geq 0, u^T A = 0^T$, $u^T b < 0$ und präsentieren diese.

Wir werden nun durch formale Manipulationen einige Folgerungen aus dem Farkas-Lemma ziehen.

Satz 3.2. *(Alternativsatz für nichtnegative Lösbarkeit von Gleichungssystemen)*

Seien A eine (m,n)-Matrix und $b \in I\!R^m$. Dann gilt genau eine der beiden folgenden Alternativen

(i) $\exists x \in I\!R^n$ *mit* $Ax = b,\ x \geq 0.$

(ii) $\exists y \in I\!R^m$ *mit* $y^T A \geq 0^T,\ y^T b < 0.$

Beweis. $Ax = b,\ x \geq 0$ können wir schreiben als $\begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$. Nach Satz 3.1 hat entweder dieses System eine Lösung oder

$$(u^T, v^T, w^T) \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \end{pmatrix} = 0^T, u^T b - v^T b < 0,\ u, v, w \geq 0\ .$$

Setzen wir $y := u - v$, so ist die Existenz einer Lösung hiervon äquivalent zur Existenz einer Lösung von

$$y^T A \geq 0^T, y^T b < 0,$$

womit der Beweis erledigt ist. $\square$

Nun nehmen wir wieder Verbindung zu Kapitel 2 auf und charakterisieren die semipositive Lösbarkeit homogener Gleichungssysteme, vergleiche Problem 2.8.

Satz 3.3. *(Alternativsatz für semipositive Lösbarkeit homogener Gleichungssysteme)*

Sei A eine (m,n)-Matrix. Dann gilt genau eine der beiden folgenden Alternativen:

(i) $\exists x \in I\!R^n,$ *mit* $Ax = 0,\ x \geq 0, x \neq 0.$

(ii) $\exists y \in I\!R^m,$ *mit* $y^T A > 0^T.$

Beweis. Die beiden Alternativen sind inkompatibel, denn andernfalls folgt aus $0 = y^T 0 = y^T(Ax) = (y^T A)x > 0$ ein Widerspruch.

Angenommen das homogene System $Ax = 0$ hat keine semipositive Lösung, dann hat das inhomogene Gleichungssystem $Ax = 0,\ \mathbf{1}^T x = 1$ keine nichtnegative Lösung. Folglich gibt es nach Satz 3.2 einen Vektor $y \in \mathbb{R}^m$ und eine reelle Zahl y_{m+1} mit $y^T A + y_{m+1}\mathbf{1}^T \geq 0^T, y^T 0 + y_{m+1} < 0$. Daraus folgt, dass $y_{m+1} < 0$ und somit $y^T A > 0^T$ gilt. Also gilt Alternative (ii). $\square$

Wir können nun unser Gleichgewichtspreisproblem in Form von Problem 2.8 lösen.

Satz 3.4. *Sei A eine (n,n)-Tauschmatrix, dann gibt es einen semipositiven Vektor $p \in \mathbb{R}^n$ mit $(I-A)p = 0$.*

Beweis. Angenommen es gibt einen Vektor $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y^T(I-A) \geq 0^T$, d. h.

$$y^T > y^T A.$$

O. B. d. A. können wir annehmen, dass $y_1 = \min\{y_i | i = 1, \ldots, n\}$. Da $\sum_{i=1}^{n} a_{i1} = 1$, folgt aus $y_1 > \sum_{i=1}^{n} y_i a_{i1}$:

$$(1-a_{11})y_1 > \sum_{i=2}^{n} y_i a_{i1} \geq y_1 \sum_{i=2}^{n} a_{i1} = (1-a_{11})y_1$$

und damit ein Widerspruch. Das aber bedeutet, dass kein Vektor $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y^T(I-A) > 0^T$ existiert, und somit muss es nach Satz 3.3 einen semipositiven Vektor $p \in \mathbb{R}^n$ geben mit $(I-A)p = 0$. □

Folgerung 3.5. Sei A eine (n,n)-Tauschmatrix, dann gilt:

(a) *A hat den Eigenwert 1, und es gibt einen semipositiven Eigenvektor zum Eigenwert 1.*

(b) *A hat einen semipositiven Fixpunkt.*

(c) *Es gibt ein Gleichgewichtspreissystem zur Tauschmatrix A, vergleicheProblem 2.4.*

(d) *Es gibt eine semipositive Lösung des Staatseinkommenproblems,siehe Problem 2.11.*

Damit haben wir mit durchaus nicht trivialen mathematischen Überlegungen eine Lösung unserer Fragen nach der Existenz von Gleichgewichtspreisen im Tauschmodell 2.1 oder nach den Staatseinkommen im Handelsmodell 2.10 finden können.

Das Farkas-Lemma (Farkas (1894)) gilt heute als einer der fundamentalen Sätze der linearen Optimierung und der Polyedertheorie und hat bedeutende praxisrelevante Konsequenzen. Der Alternativsatz 3.3 geht auf Gordan (1873) zurück. Die Tauschmodelle 2.1 und 2.10 wurden dagegen erst im zwanzigsten Jahrhundert betrachtet. Man kann also mit einigem Recht behaupten, dass die Probleme 2.4 und 2.11 bereits mathematisch gelöst waren, bevor sie ökonomisch formuliert wurden. Das wäre allerdings eine etwas verkürzte Sicht der Dinge und würde die Arbeit ignorieren, die notwendig ist, um ökonomische Begriffe zu prägen, Modelle zu formulieren und Bezüge zur Mathematik herzustellen.

Kapitel 4

Eindeutigkeit und Positivität von Gleichgewichtspreisen, Irreduzibilität von Matrizen

Wir haben in Kapitel 3, siehe Satz 3.4, gezeigt, dass es immer eine Lösung des Gleichgewichtspreisproblems 2.4 gibt, und auch, dass es immer ein Handelsgleichgewicht gibt. Ist A eine Tauschmatrix, so wollen wir einen semipositiven Vektor y mit $Ay = y$ *Gleichgewichtsvektor* nennen.

Wir wollen nun zwei Fragen behandeln, die bei der Beschäftigung mit Gleichgewichten kanonisch auftreten.

Problem 4.1. *Gibt es zu einer gegebenen Tauschmatrix einen positiven Gleichgewichtsvektor?*

Ökonomisch anders formuliert stellen wir hier – bezogen auf Modell 2.1 – die Frage nach der Existenz freier Güter. Ein Gut wird üblicherweise *frei* genannt, wenn es in großen Mengen erhältlich ist, jedermann Zugang zu ihm hat und niemand einen Preis für seine Nutzung zu zahlen braucht. Luft ist vielleicht ein solches Gut (obwohl etwa die Auflagen für Abgasreinigung als Gebühren für die Luftbenutzung von Kraftwerken und Autos angesehen werden könnten); in Grönland ist vielleicht Eis ein freies Gut, in der Sahara Sand, früher war in manchen Gegenden Wasser ein freies Gut.

Bezogen auf das lineare Handelsmodell 2.10 fragen wir in 4.1, ob jedes Land ein positives Einkommen realisieren kann. Das sollten wir eigentlich erwarten!

Die zweite Frage ist die folgende:

Problem 4.2. *Gibt es zu einer gegebenen Tauschmatrix einen eindeutig bestimmten Gleichgewichtsvektor?*

Eine kurze Überlegung zeigt, dass Problem 4.2 etwas zu spontan formuliert ist. Ist nämlich y ein Gleichgewichtsvektor und $\lambda > 0$, so gilt natürlich $A(\lambda y) = \lambda y$.

Also ist jeder Vektor, der ein positives Vielfaches eines Gleichgewichtsvektors ist, ebenfalls ein Gleichgewichtsvektor. Diese Nichteindeutigkeit ist jedoch trivialer Natur und ökonomisch unmittelbar einleuchtend. Betrachten wir unser Gleichgewichtspreisproblem 2.4, so besagt die obige Aussage nur, dass die Lösung des Gleichgewichtsproblems skaliert werden kann. Das bedeutet ökonomisch nichts anderes als den Übergang von einer Geldeinheit zu einer anderen. So etwas kommt in der realen Welt häufig bei starker Inflation vor. Wenn die Geldbeträge zu groß werden, werden einfach einige Nullen weggestrichen, um handlichere Größenordnungen zu erhalten. Länder wie Bolivien, Brasilien oder Italien haben das in der Nachkriegszeit mehrfach gemacht. Eine Lösung des Gleichgewichtspreisproblems ist also nicht als absolute Preisfestsetzung zu verstehen, sondern gibt lediglich die relativen Preisverhältnisse an. Analoges gilt für das Staatseinkommensproblem. Um die Frage 4.2 sinnvoll zu stellen, sollten wir sie wie folgt formulieren.

Problem 4.3. *Gibt es zu gegebener Tauschmatrix einen bis auf Multiplikation mit positiven reellen Zahlen eindeutig bestimmten Gleichgewichtsvektor ?*

Es ist ökonomisch durchaus nicht a priori klar, dass es nur ein Preissystem geben soll, das zu stabilen Zuständen führt, bzw. nur ein System von Staatseinkommen, das Handelsgleichgewichte erbringt.

Eine triviale Mehrdeutigkeit haben wir bereits erkannt. Es kann aber offensichtlich noch eine weitere geben. Betrachten wir unser Modell 2.10, so können wir uns ohne weiteres vorstellen, dass die Welt aus mehreren Teilen besteht, die nicht miteinander Handel betreiben. So hat sich etwa Japan über mehrere Jahrhunderte bewusst von der Außenwelt isoliert. Es könnte also Blöcke von Ländern geben, die nur untereinander aber nicht mit Ländern anderer Blöcke in Handelsbeziehungen stehen. Wir haben dann mit vollständig voneinander unabhängigen Blöcken zu tun, und es ist klar, dass etwa die Einkommen der Länder eines Blocks umskaliert werden können, ohne auf die Einkommen der anderen Länder einzuwirken.

Es wird sich zeigen, dass diese (ökonomisch einleuchtende) Nicht-Eindeutigkeit die (in diesem speziellen Tauschmodell) einzig mögliche ist. Weil es sich in diesem Falle besonders anbietet, werden wir von nun an unsere ökonomische Argumentation meistens bezüglich des Modells 2.10 ausführen.

Definition 4.4. *Seien A eine (n,n)-Matrix und $N = \{1, \dots, n\}$. Ist S eine Teilmenge von N mit $a_{ij} = 0$ für alle $j \in S$ und $i \in N \backslash S$, so nennen wir S* **unabhängige Teilmenge** *von N, und die Länder $L_i, i \in S$, werden* **unabhängig** *genannt.*

Die Bedingung in Definition 4.4 besagt gerade, dass die Länder in S nur aus Ländern in S Waren beziehen. Dies schließt nicht aus, dass Länder aus S in Länder aus $N \backslash S$ exportieren. Nehmen wir der Übersichtlichkeit halber an, dass $S = \{1, \dots, k\}$ gilt, so hat die Tauschmatrix A nach Definition das folgende Aussehen

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

wobei A_1 eine (k,k)-Matrix, A_2 eine $(k,n-k)$-Matrix und A_3 eine $(n-k,n-k,)$-Matrix ist. Die $(n-k,k)$-Matrix in der linken unteren Ecke besteht aus lauter Nullen. Offensichtlich sind $\emptyset$ und N unabhängige Teilmengen von N.

Definition 4.5. *Eine (n,n)-Matrix heißt* **irreduzibel***, falls es keine unabhängige Teilmenge der Indexmenge N gibt, die verschieden von $\emptyset$ und N ist.*

Die Irreduzibilität von Tauschmatrizen hat eine wichtige ökonomische Interpretation. Sie besagt, dass jedes Land mit jedem anderen Land Handel treibt – zumindest indirekt. Das heißt, dass es für je zwei Länder L_i und L_j eine Kette von Ländern $L_{i_1}, L_{i_2}, \ldots, L_{i_k}$ gibt mit $L_{i_1} = L_i, L_{i_k} = L_j$, so dass L_{i_r} an $L_{i_{r+1}}$ eine positive Menge liefert, $r = 1, \ldots, k-1$. (Der Beweis dieser Tatsache ist eine Hausaufgabe.) Für irreduzible Tauschmatrizen zeigen wir nun, dass die Probleme 4.1 und 4.3 eine positive Antwort haben.

Satz 4.6. *Sei A eine irreduzible Tauschmatrix, dann gibt es einen (bis auf Multiplikation mit positiven Konstanten) eindeutig bestimmten Gleichgewichtsvektor y bezüglich A, und y ist positiv.*

Beweis. 1) Nach Satz 3.4 gibt es Gleichgewichtsvektoren bezüglich A. Wir zeigen zunächst, dass jeder Gleichgewichtsvektor y von A positiv ist. Angenommen y ist nicht positiv, dann setzen wir $S := \{i \in N | y_i > 0\}$. Aufgrund unserer Annahmen gilt $\emptyset \neq S \neq N$. Wir behaupten, dass S eine unabhängige Teilmenge von N ist. Ist $i \in N \backslash S$, so gilt

$$0 = y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = \sum_{j \in S} a_{ij} y_j.$$

Wegen $y_j > 0$ für alle $j \in S$ und $a_{ij} \geq 0$ folgt daraus, $a_{ij} = 0$ für alle $i \in N \backslash S$ und $j \in S$. Also ist S nach Definition eine unabhängige Teilmenge, die von $\emptyset$ und N verschieden ist. Dies widerspricht der Annahme, dass A irreduzibel ist; y muss also positiv sein.

2) Seien y und y' zwei Gleichgewichtsvektoren von A, dann sind diese nach 1) positiv, und wir können definieren:

$$\lambda := \min\{y_i / y'_i | i = 1, \ldots, n\}.$$

Es gilt somit $\lambda > 0$, und o. B. d. A. können wir annehmen, dass $\lambda = y_1 / y'_1$. Wir erhalten

$$\frac{y_j}{y'_j} y'_j \geq \frac{y_1}{y'_1} y'_j \Rightarrow y_j - \lambda y'_j \geq 0.$$

Setzen wir $y'' := y - \lambda y'$, so gilt $y'' \geq 0$ und $Ay'' = Ay - A(\lambda y') = y - \lambda y' = y''$. Andererseits gilt $y''_1 = y_1 - \frac{y_1}{y'_1} y'_1 = 0$, das heißt, y'' ist nicht positiv. Nach 1) sind aber alle Gleichgewichtsvektoren von A positiv, woraus folgt, da§ der Vektor y'' nur der Nullvektor sein kann. Mithin gilt $y = \lambda y'$, was zu zeigen war. $\square$

Den Fall irreduzibler Tauschmatrizen haben wir also vollständig geklärt. Es gibt, bezogen auf Modell 2.1, (bis auf Skalierung) nur ein Gleichgewichtspreissystem, und es gibt keine freien Güter. Bezogen auf Modell 2.10 sagt Satz 4.6 aus, dass die Staatseinkommen aller Länder positiv sind und die relativen Verhältnisse zwischen den Staatseinkommen eindeutig bestimmt sind.

Wir wollen nun den reduziblen Fall behandeln. Hier sind Strukturüberlegungen notwendig.

Definition 4.7. *Eine unabhängige Teilmenge $\emptyset \neq S \subseteq N$ heißt* **irreduzibel**, *falls S keine andere nicht-leere, unabhängige Teilmenge enthält.*

Aus der Definition folgt unmittelbar, dass für jede Tauschmatrix mindestens eine irreduzible unabhängige Teilmenge existiert. Offensichtlich besitzen irreduzible Tauschmatrizen nur eine irreduzible unabhängige Teilmenge, nämlich N selbst. Wir werden nun zeigen, dass die Menge der unabhängigen Teilmengen abgeschlossen ist bezüglich Vereinigungs- und Durchschnittsbildung.

Lemma 4.8. *Sind S und T unabhängige Teilmengen von N, dann sind $S \cup T$ und $S \cap T$ ebenfalls unabhängige Teilmengen von N.*

Beweis. Wir führen den Beweis für $S \cup T$ und müssen zeigen, dass $a_{ij} = 0$ gilt für alle $i \in N \backslash (S \cup T)$ und alle $j \in S \cup T$. Seien also $i \in N \backslash (S \cup T)$ und $j \in S \cup T$; o. B. d. A. können wir annehmen $j \in S$. Dann gilt $i \in N \backslash S$ und folglich $a_{ij} = 0$, weil S nach Annahme irreduzibel ist. □

Folgerung 4.9. *Sind S und T verschiedene irreduzible Teilmengen von N, dann gilt $S \cap T = \emptyset$.*

Da N selbst eine unabhängige Teilmenge ist, ist jedes Element $i \in N$ in einer unabhängigen Teilmenge enthalten. Folgerung 4.9 impliziert, dass jedes $i \in N$ in höchstens einer irreduziblen Teilmenge enthalten ist. Die folgende $(3,3)$-Tauschmatrix

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

besitzt die unabhängigen Teilmengen $\emptyset, \{1,2,3\}$ und $\{1,2\}$. Die einzige irreduzible Teilmenge von N ist $\{1,2\}$. Also ist der Index 3 in keiner irreduziblen Teilmenge enthalten.

Ein interessantes und wichtiges Problem ist die Aufgabe, alle irreduziblen Teilmengen von N zu bestimmen. Da N genau n Elemente enthält, folgt aus Folgerung 4.9, dass N höchstens n irreduzible Teilmengen besitzt. Jede endliche Menge hat nur endlich viele Teilmengen, also können wir alle irreduziblen Teilmengen von N durch Enumeration aller Teilmengen bestimmen. Dies geht jedoch viel schneller mit einem Algorithmus, der sich am einfachsten in graphentheoretischer Notation beschreiben lässt.

Ein *gerichteter Graph* oder *Digraph* $D = (V, B)$ besteht aus einer nicht-leeren Menge V von *Knoten* und einer Menge $B \subseteq V \times V$, deren Elemente *Bögen* genannt werden. Ist $(i,j) \in B$, so sagen wir, dass der Bogen (i,j) die Knoten i und j *verbindet*, i heißt *Anfangsknoten*, j *Endknoten* von (i,j).

Jeder quadratischen Matrix A (und damit z. B. jeder Tauschmatrix des internationalen Handels 2.10) ordnen wir einen Digraphen wie folgt zu:

- Jedem Spalten- bzw. Zeilenindex i (und damit jedem Land L_i), $i = 1, \dots, n$ ordnen wir einen Knoten i zu.

- Zwei Knoten i, j werden durch einen Bogen (i, j) verbunden, falls $a_{ij} \neq 0$ (d. h. falls das Land L_i in das Land L_j eine positive Menge von Gütern exportiert).

Wir erhalten somit zu jeder Tauschmatrix A einen Digraphen $D = (N, B)$ mit $N = \{1, \dots, n\}$. Der zur oben angegebenen $(3,3)$-Tauschmatrix gehörende Digraph ist in Abbildung 4.1 dargestellt

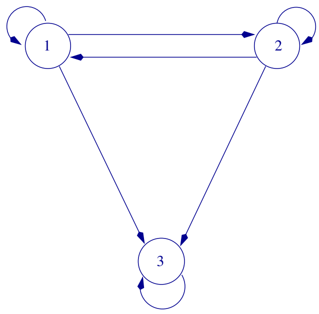

Abbildung 4.1: Der zur Tauschmatrix gehörende Digraph

Hierbei wird die übliche Konvention bei der zeichnerischen Darstellung von Digraphen verwendet, einen Knoten durch einen kleinen Kreis (mit Nummer) oder dicken Punkt darzustellen und einen Bogen (i, j) durch einen Pfeil, der vom Kreis, der zum Anfangsknoten i gehört, zum Kreis, der zum Endknoten j gehört, führt.

Ein *gerichteter Weg* in einem Digraphen $D = (V, B)$ von einem Knoten i zu einem Knoten j ist eine Folge von Bögen $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_k)$ mit der Eigenschaft $i = i_1, j = j_k$ und $j_t = i_{t+1}, t = 1, \dots, k-1$. In unserem Beispieldigraphen ist die Bogenfolge $(1, 2), (2, 3)$ ein Weg von 1 nach 3. Aus technischen Gründen wollen wir außerdem vereinbaren, dass es von jedem Knoten zu sich selbst einen gerichteten Weg gibt (z. B. könnten wir die leere Bogenfolge als einen solchen Weg auffassen).

Zwei Knoten $i, j \in V, i \neq j$ heißen *stark zusammenhängend*, wenn es sowohl einen gerichteten Weg von i nach j als auch einen gerichteten Weg von j nach i gibt. Aufgrund unserer obigen Vereinbarung ist jeder Knoten $i \in V$ mit sich selbst stark zusammenhängend. Der starke Zusammenhang definiert eine Äquivalenzrelation „$\sim$" auf der Knotenmenge V, nämlich

$$i \sim j :\Leftrightarrow i \text{ und } j \text{ sind stark zusammenhängend.}$$

Die Äquivalenzklassen von V bezüglich $\sim$ heißen *starke Zusammenhangskomponenten* oder kurz *starke Komponenten* von D.

Für jede Knotenmenge $W \subseteq V$ bezeichnen wir die Menge der Bögen, deren Anfangsknoten in

$V\backslash W$ und deren Endknoten in W liegt, mit $\delta^-(W)$, d. h.

$$\delta^-(W) = \{(i,j) \in B | i \in V\backslash W, j \in W\}$$

Betrachten wir nun wieder unser internationales Handelsmodell 2.10, so können wir ja (wie oben angegeben) jeder Ländermenge $L_i, i \in S$, die zugehörige Knotenmenge $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ zuordnen. Der Zusammenhang zwischen den Begriffen „unabhängig“ und „irreduzibel“ und den oben eingeführten graphentheoretischen Begriffen wird durch folgenden Satz hergestellt.

Satz 4.10. *Seien A eine (n,n)-Tauschmatrix, $N = \{1, \ldots, n\}$ und $D = (N, B)$ der zugehörige gerichtete Graph. Dann gilt:*

(a) *$S \subseteq N$ ist eine unabhängige Teilmenge von N genau dann, wenn $\delta^-(S) = \emptyset$ gilt.*

(b) *$\emptyset \neq S \subseteq N$ ist eine irreduzible Teilmenge von N genau dann, wenn S eine starke Komponente von D ist mit $\delta^-(S) = \emptyset$.*

Beweis. (a) Ist $\delta^-(S) = \emptyset$, so heißt dies $a_{ij} = 0$ für alle $i \in N\backslash S$ und alle $j \in S$, also ist S unabhängig, und umgekehrt.

(b) Sei $S \subseteq N$ irreduzibel. Dann ist S unabhängig und damit gilt nach (a) $\delta^-(S) = \emptyset$. Angenommen S ist keine starke Komponente von D. Dann gibt es in S zwei Knoten $i \neq j$, so dass es in D keinen gerichteten Weg von i nach j gibt. Sei $S' \subseteq N$ die Menge aller Knoten $v \in N$, so dass es in D einen gerichteten Weg von v nach j gibt. Da es keinen Bogen von einem Knoten in $N\backslash S$ zu einem Knoten in S gibt, gilt $S' \cap (N\backslash S) = \emptyset$, und somit $S' \subseteq S$.

Wir zeigen nun, dass $\delta^-(S') = \emptyset$ gilt. Wäre dem nicht so, so gäbe es einen Bogen $(v, w) \in B$ mit $v \in S\backslash S'$ und $w \in S'$. Nach Definition gibt es in D einen Weg $(w, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_k, j)$ von w nach j, dann aber ist $(v, w), (w, j_1), \ldots, (i_k, j)$ ein Weg von v nach j, also ist $v \in S'$, und wir haben einen Widerspruch erhalten. Also gilt: $j \in S' \neq \emptyset, i \in S\backslash S'$ und $\delta^-(S') = \emptyset$. Das heißt S' ist eine nicht-leere, echt in S enthaltene unabhängige Teilmenge von S. Dies widerspricht unserer Annahme, dass S irreduzibel ist.

Sei nun S eine starke Komponente mit $\delta^-(S) = \emptyset$. Dann ist S nach (a) unabhängig. Angenommen S ist nicht irreduzibel. Dann gibt es eine nicht-leere, echte, unabhängige Teilmenge S' von S. Nach (a) gilt $\delta^-(S') = \emptyset$. Seien $j \in S'$ und $i \in S\backslash S'$. Wir behaupten, dass es in D keinen gerichteten Weg von i nach j gibt. Da i nicht in S' liegt, muss es auf jedem gerichteten Weg von i nach j einen Bogen geben, dessen Anfangsknoten in $N\backslash S'$ und dessen Endknoten in S' liegt. Wegen $\delta^-(S') = \emptyset$ gibt es keinen solchen Bogen und damit keinen gerichteten Weg von i nach j. Also ist S nicht stark zusammenhängend. Widerspruch. □

Satz 4.10 (b) zeigt, dass man das Problem, die irreduziblen Teilmengen der Indexmenge einer

Tauschmatrix zu finden, als graphentheoretisches Problem formulieren kann:

„*Bestimme alle starken Komponenten S eines Digraphen D mit $\delta^-(S) = \emptyset$.*“

Wir beschreiben nun ein Verfahren, mit dem man alle starken Komponenten eines Digraphen finden kann. Zunächst betrachten wir folgenden Algorithmus:

Algorithmus 4.11. *Erreichbare Knotenmenge.*

Input.	*Digraph $D = (V, B)$ und Knoten $v \in V$.*
Initialisierung.	*Alle Knoten in $V \backslash \{v\}$ seien unmarkiert, alle Knoten in V unerledigt, v sei markiert.*
Schritt 1.	*Gibt es keinen markierten und unerledigten Knoten in D, so gehe zu Schritt 4.*
Schritt 2.	*Wähle einen markierten und unerledigten Knoten $w \in V$, nenne w erledigt.*
Schritt 3.	*Markiere alle diejenigen Knoten $u \in V$ mit $(w, u) \in B$ und gehe zu Schritt 1.*
Schritt 4.	*Bezeichne die Menge der markierten Knoten mit $E(v)$ und gib $E(v)$ aus.*

Offensichtlich besteht die in Algorithmus 4.11 konstruierte Knotenmenge $E(v)$ aus der Menge derjenigen Knoten, die von v aus auf einem gerichteten Weg erreichbar sind. Jeder Knoten v ist nach Definition in einer starken Komponente, sagen wir $S(v)$, von D enthalten. Da jeder Knoten in $S(v)$ auf einem Weg von v aus erreichbar ist, gilt $S(v) \subseteq E(v)$. Wir behaupten nun:

Lemma 4.12. *Sei $D = (V, B)$ ein Digraph, und für jeden Knoten $v \in V$ seien $S(v)$ die starke Komponente von D, die v enthält, und $E(v)$ die (in 4.11 konstruierte) Menge der von v aus auf einem gerichteten Weg erreichbaren Knoten. Dann gilt für alle $v \in V$*

$$S(v) = E(v) \backslash \{w \in E(v) | v \notin E(w)\}.$$

Beweis. Ein Knoten $w \in V$ ist in $S(v)$ genau dann, wenn $w \in E(v)$ und $v \in E(w)$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Damit haben wir die Möglichkeit, die starken Komponenten von D mit $\delta^-(S) = \emptyset$ wie folgt zu bestimmen:

Algorithmus 4.13. *Irreduzible Teilmengen*

Input.	*Digraph $D = (V, B)$ mit Knotenmenge $V = \{1, \ldots, n\}$.*
Schritt 1.	*Bestimme mit Algorithmus 4.11 für jeden Knoten $v \in V$ die erreichbare Knotenmenge $E(v)$*
Schritt 2.	*Für $v = 1, \ldots, n$ führe aus:* *Für alle $w \in E(v)$ führe aus:* *Ist $v \notin E(w)$, dann setze* *$E(v) := E(v) \backslash \{w\}$.* *Ende.* *Ende.*
Schritt 3.	*(Elimination mehrfach vorkommender Mengen)* *Für $v = 1, \ldots, n$ führe aus:* *Falls $E(v) \neq \emptyset$, führe für jeden Knoten* *$w \in E(v) \backslash \{v\}$ aus:* *$E(w) := \emptyset$.* *Ende.*
Schritt 4.	*Für $v = 1, \ldots, n$ führe aus:* *Ist $E(v) \neq \emptyset$ und ist $\delta^-(E(v)) = \emptyset$, dann markiere $E(v)$.*
Schritt 5.	*Gib die markierten nicht-leeren Mengen $E(v)$ aus.*

Es ist aufgrund der vorherigen Überlegungen offensichtlich, dass der obige Algorithmus das Gewünschte leistet und als Resultat genau die irreduziblen Teilmengen ausgibt. Das Verfahren kann, so wie es hier dargestellt ist, ohne Schwierigkeiten implementiert werden. Der Rechenaufwand beträgt $O(n^3)$ Schritte. Wie man leicht sieht, kann das Verfahren durch Kombination verschiedener Schritte rechentechnisch günstiger gestaltet werden. Durch Benutzung geeigneter Datenstrukturen kann man sogar eine Rechenzeit von $O(|B|)$ erreichen. Dies geschieht dadurch, dass die Algorithmen 4.13 und 4.11 zusammen im Rahmen einer so genannten Tiefensuche ausgeführt werden. Dieses Verfahren ist natürlich besonders interessant für diejenigen Leser, die sich für geschicktes Programmieren und die Analyse von Algorithmen interessieren. Der Nachweis der Korrektheit dieses Verfahrens ist (u. a. weil Rekursion benutzt wird) nicht ganz so trivial wie bei den Verfahren 4.11 und 4.13, siehe z. B. AHO, HOPCROFT & ULLMAN (1974), [1].

Auf jeden Fall soll an dieser Stelle festgehalten werden, dass erst die graphentheoretische Beschreibung des vorliegenden Problems zu einem Verfahren geführt hat, das in einem gewissen Sinne das schnellstmögliche ist.

Mit Hilfe graphentheoretischer Überlegungen ist es uns also gelungen, ein Verfahren zu entwickeln, das die irreduziblen Teilmengen von N effizient bestimmt. Ist eine (n, n)-Tauschmatrix A gegeben, so können wir (durch Anwendung des Algorithmus 4.13) die Matrix A durch simultane Zeilen- und Spaltenvertauschungen so umordnen, dass A das folgende Aussehen hat:

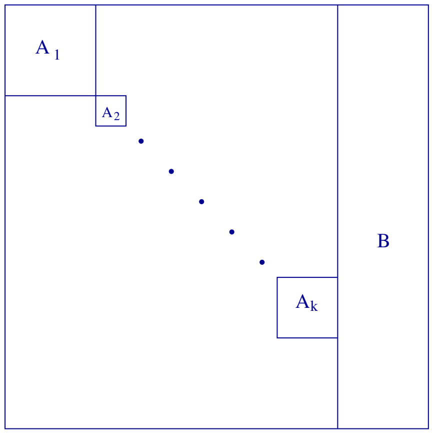

Abbildung 4.2:

wobei die Matrizen A_i quadratische Matrizen sind, die zu den irreduziblen Teilmengen $S_i, i = 1, \ldots, k$, von $N = \{1, \ldots, n\}$ gehören. Die Spalten von A, die zu den Indizes $i \in N$ gehören, die in keiner irreduziblen Teilmenge enthalten sind, bilden die Matrix B.

Nach Konstruktion ist jede der Matrizen A_i eine irreduzible Tauschmatrix. Daher folgt aus Satz 4.6, dass es zu A_i einen bis auf Multiplikation mit positiven Konstanten eindeutig bestimmten Gleichgewichtsvektor y^i gibt, der darüber hinaus noch positiv ist, $i = 1, \ldots, k$. Es gilt also

$$A_i y^i = y^i \text{ und } y^i > 0,\ i = 1, \ldots, k.$$

Setzen wir nun für $i = 1, \ldots, k$

$$\overline{y}^i_j := \begin{cases} y^i_j & \text{falls } j \in S_i \\ 0 & \text{anderenfalls} \end{cases} \qquad (\star)$$

$$\overline{y}^i := \left(\overline{y}^i_1, \ldots, \overline{y}^i_n\right)^T$$

dann ist $\overline{y}^i$ offensichtlich ein Gleichgewichtsvektor bezüglich A, d. h.

$$A\overline{y}^i = \overline{y}^i, \quad \overline{y}^i \geq 0, \quad \overline{y}^i \neq 0, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Ferner folgt daraus unmittelbar, dass jeder Vektor

$$y := \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overline{y}^i \quad (\lambda_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, k \text{ und mindestens ein } \lambda_i \neq 0)$$

ein Gleichgewichtsvektor von A ist. Wir wollen nun zeigen, dass jeder Gleichgewichtsvektor von A diese Gestalt hat.

Satz 4.14. *Sei A eine (n,n)-Tauschmatrix mit irreduziblen Teilmengen $S_1, \ldots, S_k$ von $N = \{1, \ldots, n\}$, und sei $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ ein Gleichgewichtsvektor von A. Dann gilt*

$$y = \sum_{i=1}^{k} \overline{y}^i,$$

wobei die Vektoren $\overline{y}^i$ zu den irreduziblen Teilmengen S_i gehörende Gleichgewichtsvektoren der Form $(\star)$ sind.

Beweis. Zum gegebenen Gleichgewichtsvektor y definieren wir Vektoren $\overline{y}^i \in \mathbb{R}^n$ wie folgt

$$\overline{y}^i_j := \begin{cases} y_j & \text{falls } j \in S_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, i = 1, \ldots, k.$$

Es gilt damit $\overline{y}^i \leq y$, und daher $A_{j.}\overline{y}^i \leq A_{j.}y$ für $j = 1, \ldots, n$ und $i = 1, \ldots, k$.

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} &\text{falls } j \in S_i, \text{ dann ist} \quad & A_{j.}\overline{y}^i \leq A_{j.}y = y_j = \overline{y}^i_j, \\ &\text{falls } j \notin S_i, \text{ dann ist} \quad & A_{j.}\overline{y}^i = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$A\overline{y}^i \leq \overline{y}^i.$$

Lemma 2.6 impliziert nun $A\overline{y}^i = \overline{y}^i$. Das heißt, die Vektoren $\overline{y}^i, i = 1, \ldots, k$, sind Gleichgewichtsvektoren von A und zwar Gleichgewichtsvektoren der Form $(\star)$, die zu den irreduziblen Teilmengen $S_1, \ldots, S_k$ von N gehören.

Wir müssen nun noch zeigen, dass

$$y = \sum_{i=1}^{k} \overline{y}^i$$

gilt. Wenn wir beweisen können, dass $y_j = 0$ für alle $j \in T := N \backslash (S_1 \cup \ldots \cup S_k)$ gilt, dann sind wir fertig. Wir betrachten dazu den Vektor

$$y' := y - \sum_{i=1}^{k} \overline{y}^i.$$

Offenbar gilt $Ay' = y'$, und es ist $y'_j > 0$ höchstens dann, wenn $j \in T$. Sei

$Q := \{j \in T | y'_j > 0\}$

und sei $i \in N \backslash Q$, dann gilt

$$A_{i.}y' = y'_i = 0 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y'_j = \sum_{j \in Q} a_{ij}y'_j.$$

Daraus folgt $a_{ij} = 0$ für alle $i \in N \backslash Q$ und alle $j \in Q$. Das aber bedeutet, dass Q eine unabhängige Teilmenge von $T \subseteq N$ ist. Daraus können wir schließen, dass T eine irreduzible Teilmenge von N enthält, was jedoch unserer Annahme $T = N \backslash (S_1 \cup \ldots \cup S_k)$ widerspricht. Also muss

$y'_j = 0$ gelten für alle $j \in T$, und daraus folgt $y' = 0$, was zu zeigen war. □

Damit ist uns nun eine vollständige Analyse unseres Gleichgewichtsproblems gelungen. Wir können sowohl für unser Tauschmodell 2.1 alle Gleichgewichtspreise als auch für unser internationales Handelsmodell 2.10 alle Staatseinkommen bestimmen. Dies geschieht dadurch, dass wir zunächst mit Hilfe des Verfahrens 4.13 alle irreduziblen Teilmengen bezüglich der Tauschmatrix A bestimmen. Diese irreduziblen Teilmengen bestimmen irreduzible Teilmatrizen von A, die (bis auf Skalierung) eindeutig bestimmte Gleichgewichtsvektoren haben. Daraus lassen sich durch semipositive Linearkombination alle Gleichgewichtsvektoren von A berechnen.

Hier wird also die ökonomische Anschauung, durch die wir auf die Betrachtung dieser Fälle gekommen sind, durch mathematische Überlegungen bestätigt. Das mathematische Modell ist außerdem in dem Sinne „gut", dass in ihm keine zusätzlichen Pathologien (z. B. Gleichgewichtsvektoren anderer Art) auftreten, die ökonomisch nicht erklärbar sind. Bezüglich dieses Aspektes stimmen also ökonomische Vorstellung und mathematisches Modell überein.

Dies ist bei komplizierteren Modellen – selbst in Naturwissenschaften wie der Physik – keineswegs immer so. Häufig werden (zunächst vernünftig erscheinende) mathematische Modelle realer Phänomene konstruiert, die die betrachteten Sachverhalte gut beschreiben. Jedoch treten bei solchen Modellen nicht selten zusätzliche Lösungen auf, die nichts mit der Natur zu tun haben. Dann muss intensiv an diesen Modellen „gefeilt" werden, um die unerwünschten Effekte auszuschließen.

Gute Beispiele dafür liefern die gegenwärtig intensiv untersuchten Theorien zur Vereinigung der grundlegenden physikalischen Kräfte (Stichwort: Stringtheorien). Es gibt einige Theorien, die – im Prinzip – alle Kräfte vereinigen und die Wirkungen aller Kräfte gut beschreiben, jedoch haben in diesen Theorien z. B. die Elementarteilchen keine Masse. „Gute" mathematische Modelle realer Phänomene entstehen selten „auf einen Schlag", sondern sind der Endpunkt einer langen Entwicklung von Spezial- und Teilmodellen mit vielen kleinen „Fehlern". Die Ökonomie ist in Bezug auf die Qualität der Modelle (leider) noch weit hinter der Physik zurück. Die Beschreibung ökonomischer Phänomene ist allerdings auch erheblich schwieriger als die physikalischer.

Kapitel 5

Dynamische Aspekte linearer ökonomischer Modelle

In diesem Kapitel wollen wir unsere ökonomischen Fragen wiederum hauptsächlich bezüglich unseres internationalen Handelsmodells 2.10 stellen und auch unsere Interpretationen im Rahmen von 2.10 geben. Alle Ausführungen sind analog für das Tauschmodell 2.1 gültig, und der Leser sollte in der Lage sein, die angegebenen Fragen und Interpretationen auf 2.1 zu übertragen.

Im letzten Kapitel konnten wir zeigen, dass es bezüglich einer Tauschmatrix A Gleichgewichtsvektoren $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ gibt. Das heißt, falls jedes Land mit einem Staatseinkommen $y_i, i = 1, \ldots, n$, beginnt und sich dann während der betrachteten Zeitperiode wie durch die Tauschmatrix (und unsere Axiome in 2.10) angegeben verhält, dann hat es am Ende der Zeitperiode wiederum das gleiche Staatseinkommen y_i erzielt.

Wir haben bereits mehrfach darüber diskutiert, ob es sinnvoll ist anzunehmen, dass sich Länder über mehrere Zeitperioden hin nach einem bestimmten „Konsummuster“ verhalten und waren zu der Meinung gekommen, dass speziell bei so großen Aggregaten wie Ländern unter der Annahme, dass keine außerordentlichen technologischen oder politischen Änderungen eintreten, eine solche Unterstellung zumindest kurz- bis mittelfristig (etwa 2 - 6 Jahre) durchaus gerechtfertigt sein kann. Empirisch erhobene Daten (insbesondere Input-Output-Tabellen) haben gezeigt, dass sich das Verhalten großer Aggregate nur unter besonderen Umständen kurzfristig drastisch ändert. Es ist also nicht völlig unrealistisch, für unsere Untersuchungen anzunehmen, dass die betrachteten Länder des Handelsmodells sich während einer gewissen Zahl von Jahren – wie in der Tauschmatrix A festgelegt – verhalten.

Reichlich unrealistisch wäre jedoch die Annahme, dass sich die Staatseinkommen aller Länder auf einem Gleichgewichtsniveau befinden. Wir wollen nun untersuchen, ob es – bei beliebigen Anfangsbedingungen und einer gegebenen Tauschmatrix – einen „Trend zum Gleichgewicht“ gibt, das heißt, wir wollen die Entwicklung des Einkommensvektors y über mehrere Perioden hin studieren und wollen versuchen herauszufinden, unter welchen Umständen sich langfristig ein Gleichgewicht einstellen kann.

Für die Untersuchungen in diesem Paragraphen wollen wir daher die folgenden Annahmen machen:

Annahmen 5.0.

(a) *Eine (n,n)-Tauschmatrix A ist gegeben, die die Handelsbeziehungen zwischen den betrachteten n Ländern beschreibt, $n \geq 2$.*

(b) *Jedes Land L_i hat eine „Erstausstattung“ (Vermögen zu Beginn der betrachteten Zeitperiode) $y_i^0 \geq 0$, d. h. es ist ein „Anfangsvektor“ $y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)^T \in I\!R^n$, $y^0 \geq 0$, gegeben.*

Durch Betrachtung von k Perioden erhalten wir folgendes:

$$\begin{aligned} y^1 &:= Ay^0 && \text{Staatseinkommen nach einem Jahr} \\ y^2 &:= Ay^1 = A^2y^0 && \text{Staatseinkommen nach zwei Jahren} \\ &\vdots && \qquad\vdots \\ y^k &:= Ay^{k-1} = A^ky^0 && \text{Staatseinkommen nach } k \text{ Jahren} \end{aligned}$$

Hausaufgabe 5.1. *Sind A und B (n,n)-Tauschmatrizen, so ist auch ihr Produkt AB eine (n,n)-Tauschmatrix. Daraus folgt insbesondere: Ist A eine Tauschmatrix, so ist für jedes $k \geq 0$ die k-te Potenz A^k von A ebenfalls eine Tauschmatrix.*

Den intuitiven Begriff „Trend zum Gleichgewicht“ müssen wir natürlich mathematisch präzisieren. Wir wollen darunter verstehen: Konvergenz der Folge $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ (der Staatseinkommensvektoren nach $k = 0, 1, 2\dots$ Jahren) gegen einen Gleichgewichtsvektor von A. Konvergenz sei hier koordinatenweise definiert, d. h. $y^k \to \overline{y}$ (lies: die Folge der Vektoren y^k konvergiert gegen den Vektor $\overline{y}$) genau dann, wenn $y_j^k \to \overline{y}_j$ für $j = 1, \dots, n$ (d. h. wenn jede der n Folgen $(y_j^k)_{k\in\mathbb{N}}$ der Komponenten der Vektoren y^k gegen $\overline{y}_j$ konvergiert). Wir werden nun die folgenden Fragen untersuchen:

Problem 5.2. *Unter welchen Bedingungen konvergiert die Folge $(y^k)_{k\in I\!N} = (A^ky^0)_{k\in I\!N}$?*

Problem 5.3. *Falls die Folge $(y^k)_{k\in I\!N}$ konvergiert, ist dann der Limes ein Gleichgewichtsvektor?*

Problem 5.4. *Hängen Konvergenz und Limes von $(y^k)_{k\in I\!N}$ vom Anfangsvektor y^0 ab?*

Dies ist eine typische Sorte von Fragen, die man nicht nur im Rahmen von ökonomischen Modellen sondern auch bei physikalischen, technischen etc. Systemen stellt. Wir werden sehen, dass die Probleme 5.2, 5.3 und 5.4 vollständig gelöst werden können. Bevor wir den entscheidenden Satz formulieren und beweisen, wollen wir einige kleine Beobachtungen machen und einige Begriffe einführen.

Zunächst gehen wir der Frage nach, ob innerhalb unseres Modells durch fortwährendes Tauschen eine allgemeine Einkommensvermehrung stattfinden kann, oder ob dies lediglich eine Einkommensumverteilung bewirkt. Wie das nachfolgende Lemma zeigt, ist letzteres der Fall.

Lemma 5.5.

(a) *Es gilt* $\mathbf{1}^T y^0 = \mathbf{1}^T y^k$ *für alle* $k \geq 0$.

(b) Hat die Folge $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ einen Limesvektor $\overline{y}$, so gilt: $\mathbf{1}^T y^0 = \mathbf{1}^T \overline{y}$.

Beweis. (a) Sei $k \geq 1$, dann gilt:

$\mathbf{1}^T y^k = \mathbf{1}^T A^k y^0 = \mathbf{1}^T A A^{k-1} y^0 = \mathbf{1}^T A A^{k-2} y^0 = \ldots = \mathbf{1}^T A y^0 = \mathbf{1}^T y^0.$

Behauptung (b) folgt direkt aus (a). □

Nennen wir den Wert

$$\mathbf{1}^T y^0 = \sum_{i=1}^{n} y_i^0$$

das **Gesamteinkommen aller Staaten im Zeitpunkt 0**, so bleibt dieses also über alle Perioden hin das gleiche. In der Tat finden nur Umverteilungen und keine Wertschöpfungen (im Rahmen dieses Modells) statt.

Wir wollen zunächst die Frage 5.3 angehen. Diese ist mit Hilfe des Folgenkriteriums für Stetigkeit einfach zu beantworten. Aus der Analysisvorlesung ist bekannt, dass eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in $x \in \mathbb{R}^n$ genau dann stetig ist, wenn $x_k \to x$ impliziert $f(x_k) \to f(x)$. Außerdem wissen wir, dass alle linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$ überall stetig sind.

Betrachten wir also unsere Folge $(y^k)_{k\in\mathbb{N}} = (A^k y^0)_{k\in\mathbb{N}}$ und nehmen wir an, dass $y^k \to \overline{y}$ gilt. Dann folgt aus der Stetigkeit der Abbildung $f(x) := Ax$, dass die Folge $(Ay^k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $A\overline{y}$ konvergiert. Die Folge $(Ay^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist jedoch dieselbe wie die Folge $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ohne das erste Glied y^0. Folglich konvergieren (Ay^k) und (y^k) gegen denselben Limes. Das heißt, die Folge (Ay^k) konvergiert ebenfalls gegen $\overline{y}$, und somit gilt $A\overline{y} = \overline{y}$.

Ferner gilt $y^0 \geq 0$ und $A \geq 0$ nach den Annahmen 5.0, woraus folgt, dass $y^k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Natürlich ist dann auch der Limes $\overline{y}$ nicht-negativ. Starten wir mit einem semipositiven Anfangsvektor y^0 , so folgt aus Lemma 5.5, dass $\overline{y}$ ebenfalls semipositiv sein muss. Fassen wir diese Überlegungen zusammen, so haben wir gezeigt:

Theorem 5.6. *Seien* A *eine* (n,n)*-Tauschmatrix und* $y^0 \in \mathbb{R}^n$ *ein semipositiver Erstausstattungsvektor. Konvergiert die Folge* $(A^k y^0)_{k\in\mathbb{N}}$ *gegen einen Vektor* $\overline{y} \in \mathbb{R}^n$*, dann ist* $\overline{y}$ *ein Gleichgewichtsvektor bezüglich* A.

Damit haben wir eine Antwort auf unsere Frage 5.3 gefunden. Bei der Untersuchung der Probleme 5.2 und 5.4 erweist sich die folgende Klasse von Tauschmatrizen als besonders wichtig.

Definition 5.7. *Eine Tauschmatrix* A *heißt* **stabil***, wenn es zu jedem semipositiven Vektor* y^0 *einen semipositiven Vektor* $\overline{y}$ *gibt mit* $(A^k y^0) \to \overline{y}$.

Wir wollen uns zunächst auf den Fall irreduzibler Tauschmatrizen beschränken und später den allgemeinen Fall auf diesen zurückführen. Irreduzible stabile Tauschmatrizen können wie folgt charakterisiert werden.

Theorem 5.8. *Sei A eine irreduzible Tauschmatrix. A ist genau dann stabil, wenn es einen positiven Vektor $\overline{y}$ gibt, so dass für jeden semipositiven Vektor y^0 gilt:*

$$A^k y^0 \to \lambda \overline{y} \quad \textit{mit} \quad \lambda := \mathbf{1}^T y^0 / \mathbf{1}^T \overline{y}.$$

(Man beachte die Umkehrung der Quantoren in 5.7 und 5.8.)

Beweis. Gibt es einen positiven Vektor $\overline{y}$, so dass für jeden semipositiven Vektor y^0 die Folge $A^k y^0$ gegen den positiven Vektor $\lambda \overline{y}$ konvergiert, so ist A nach Definition 5.7 stabil.

Sei nun A eine stabile irreduzible Tauschmatrix. Nach Satz 4.6 hat die irreduzible Matrix A einen (bis auf Skalierung) eindeutig bestimmten, und zwar positiven, Gleichgewichtsvektor, sagen wir $\overline{y}$. Betrachten wir einen beliebigen semipositiven Vektor y^0, so gibt es nach Annahme einen semipositiven Vektor y', gegen den die Folge $(A^k y^0)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Nach Satz 5.6 ist y' ein Gleichgewichtsvektor von A. Folglich muss nach Satz 4.6 $y' = \lambda \overline{y}$ für ein $\lambda > 0$ gelten. Aus Lemma 5.5 folgt $\mathbf{1}^T y^0 = \mathbf{1}^T y' = \lambda \mathbf{1}^T \overline{y}$, und daraus folgt $\lambda = \mathbf{1}^T y^0 / \mathbf{1}^T \overline{y}$, was zu zeigen war. □

Natürlich sind nicht alle Tauschmatrizen stabil. Betrachten wir das folgende Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

so erzeugt der Anfangsvektor $y^0 = \binom{1}{0}$ die Folge

$$y^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

d. h. nach jeder Periode wechselt der Besitzstand, und dieser alterniert fortwährend. Mit diesem Anfangsvektor wird sich offenbar kein Gleichgewicht einstellen. (Hätten wir stattdessen $y^0 = \binom{1}{1}$ gewählt, so hätten wir uns sofort in einer stabilen Situation befunden.) Das obige Beispiel können wir wie folgt verallgemeinern:

Wenn wir annehmen, dass die n Länder in m nicht-leere Teilmengen $T_1, \ldots, T_m$ so zerlegt werden können, dass die Länder in T_i nur von Ländern in $T_{i+1}, i = 1, \ldots, m-1$ und die Länder in T_m nur von Ländern in T_1 Waren beziehen, dann ist klar, dass wir periodische Umschichtungen der folgenden Art haben können: Haben anfangs nur Länder in T_1 eine positive Erstausstattung, dann haben nach einer Periode höchstens die Länder in T_2 ein positives Einkommen, dann die Länder in T_3, und nach m Perioden liegt das gesamte Einkommen wieder in den Händen der ersten Gruppe T_1. In einem solchen Falle wird die Folge $(y^k)_{k \in \mathbb{N}}$ nicht konvergieren, und Matrizen der oben beschriebenen Art sind nicht stabil.

Definition 5.9. *Eine (n,n)-Tauschmatrix A heißt* **periodisch**, *falls die Menge $N = \{1,\ldots,n\}$ so in m Teilmengen $T_1,\ldots,T_m$ zerlegt werden kann, dass gilt*

$$a_{ij} = 0 \begin{cases} \textit{falls} \quad i \in T_{r+1} \quad \textit{und} \quad j \notin T_r \quad \textit{für} \quad r = 1,\ldots,m-1 \\ \textit{falls} \quad i \in T_1 \quad \textit{und} \quad j \notin T_m. \end{cases}$$

Die Zahl m heißt **Periode** *von A.*

Offenbar können periodische Matrizen durch Zusammenfassung der Gruppen $T_1,\ldots,T_m$ so umgeordnet werden, dass sie folgendes Aussehen haben:

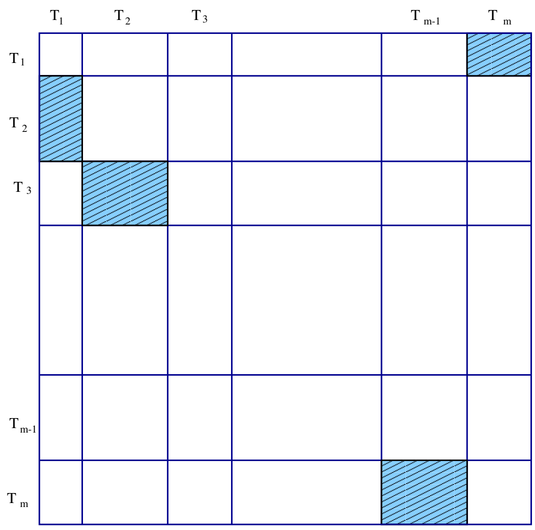

Abbildung 5.1:

wobei positive Koeffizienten höchstens in den gestrichelten Blöcken vorkommen können. Wir werden nun das folgende wichtige Resultat beweisen, das übrigens auch in anderen Teilbereichen der Mathematik (natürlich mit etwas anderen Bezeichnungen und Interpretationen) vorkommt. In der Wahrscheinlichkeitstheorie z. B. heißt der folgende Satz „Fundamentaler Konvergenzsatz für Markov-Ketten“. So wie wir dieses Resultat betrachten, hat es nichts mit Wahrscheinlichkeiten zu tun, jedoch - und hier zeigt sich eben die Stärke mathematischer Modellbildung, bei der die Modelle mathematisch abstrakt, losgelöst von der konkreten Anwendungssituation behandelt werden - kann ein Zugang zu diesem Problem von einem anderen Anwendungshintergrund aus eine völlig andere - aber gleichermaßen korrekte - Interpretation eines mathematischen Satzes liefern.

Theorem 5.10. *Eine irreduzible Tauschmatrix ist entweder stabil oder periodisch.*

Wir werden diesen Satz in mehreren Schritten beweisen und betrachten zunächst einige Hilfssätze und Definitionen.

Definition 5.11. *(a) Die Menge der semipositiven Vektoren y des $\mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{1}^T y = 1$ bezeichnen wir mit Y.*

(b) Eine irreduzible Tauschmatrix A heißt **schrumpfend**, *falls es eine Zahl $c \in I\!R$, genannt* **Schrumpfungsfaktor**, *gibt mit $0 < c < 1$ und*

$$\|Ay - \overline{y}\|_1 \leq c\|y - \overline{y}\|_1 \text{ für alle } y \in Y.$$

(wobei $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ die L_1-Norm bezeichnet und $\overline{y}$ der nach Satz 4.6 eindeutig bestimmte Gleichgewichtsvektor von A ist mit $\mathbf{1}^T\overline{y} = 1$).

Lemma 5.12. *Sei A eine irreduzible Tauschmatrix, dann gilt: Ist A schrumpfend, dann ist A stabil.*

Beweis. Sei c der Schrumpfungsfaktor von A, dann gilt nach Definition $\|A^k y - \overline{y}\|_1 \leq c^k\|y - \overline{y}\|_1$ für alle $y \in Y$ und $k = 1$. Wir wollen nun diese Ungleichung für alle $k \in I\!N$ induktiv zeigen und nehmen an, dass sie für alle $i \in I\!N$, $1 \leq i \leq k$ gilt. Um zu beweisen, dass sie dann auch für $k+1$ gilt, bemerken wir zunächst, dass nach Lemma 5.5 $y \in Y$ impliziert $A^k y \in Y$. Daraus folgt nach Definition:

$$\|A^{k+1}y - \overline{y}\|_1 = \|A(A^k y) - \overline{y}\|_1 \leq c\|A^k y - \overline{y}\|_1,$$

und somit nach Induktionsannahme

$$\|A^{k+1}y - \overline{y}\|_1 \leq c\|A^k y - \overline{y}\|_1 \leq c(c^k\|y - \overline{y}\|_1) = c^{k+1}\|y - \overline{y}\|_1.$$

Aus $0 < c < 1$ folgt $c^k \to 0$. Das aber bedeutet, dass für alle $y \in Y$ die Folge $(\|A^k y - \overline{y}\|_1)_{k\in I\!N}$ gegen Null konvergiert, woraus folgt, dass $(A^k y)$ gegen $\overline{y}$ konvergiert. Dies impliziert, dass A stabil ist. □

Im nächsten Hilfssatz formulieren wir eine einfache hinreichende Bedingung für die Stabilität von A. Sie besagt, dass A bereits dann stabil ist, wenn mindestens ein Land in alle anderen Länder exportiert.

Lemma 5.13. *Sei A eine irreduzible Tauschmatrix. Hat A eine positive Zeile dann ist A schrumpfend (und somit stabil).*

Beweis. Wir zeigen, dass A schrumpfend ist, womit nach Lemma 5.12 A auch stabil ist. Wir können o. B. d. A. annehmen, dass die erste Zeile $A_{1\cdot}$ von A positiv ist. Wir setzen

$$\begin{aligned} \overline{c} :=&\ \min\{a_{1j} | j = 1, \ldots, n\}, \\ c :=&\ 1 - \overline{c}. \end{aligned}$$

Da $A_{1\cdot}$ positiv ist, ist $\overline{c} > 0$. Da $\mathbf{1}^T A = \mathbf{1}^T$, hat jeder Koeffizient von A höchstens den Wert 1, also gilt $\overline{c} \leq 1$ und somit $0 \leq c < 1$. Wenn wir zeigen können, dass $\|Ay - \overline{y}\|_1 \leq c\|y - \overline{y}\|_1$ gilt für alle $y \in Y$ und für den Gleichgewichtsvektor $\overline{y} \in Y$ von A, dann sind wir fertig. Zur Beweisvereinfachung führen wir einige Bezeichnungen ein.

Für $y \in Y$ sei: $z := y - \overline{y}$, $\quad z_j^+ := \max\{0, z_j\}$, $\quad z_j^- := \min\{0, z_j\}$.
Es gilt dann $\mathbf{1}^T z = \mathbf{1}^T y - \mathbf{1}^T \overline{y} = 1 - 1 = 0$ und somit

$$\sum_{j=1}^n z_j^+ = -\sum_{j=1}^n z_j^-, \quad \text{sowie} \quad \sum_{j=1}^n z_j^+ - \sum_{j=1}^n z_j^- = \sum_{j=1}^n |z_j| = \|z\|_1,$$

daraus folgt

$$-\sum_{j=1}^n z_j^- = \frac{1}{2}\|z\|_1.$$

O. B. d. A. können wir annehmen, dass $A_{1.}z \geq 0$ (falls dies nicht gilt, ersetzen wir z durch $-z$), und wir können wie folgt fortfahren

$$\begin{aligned}
\|Ay - \overline{y}\|_1 &= \|Ay - A\overline{y}\|_1 = \|A(y - \overline{y})\|_1 = \|Az\|_1 \\
&= \sum_{i=2}^n |A_{i.}z| + A_{1.}z \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}|z_j| + A_{1.}z - \sum_{j=1}^n a_{1j}|z_j| \\
&= \sum_{j=1}^n |z_j| \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}\right) + A_{1.}z - \sum_{j=1}^n a_{1j}z_j^+ + \sum_{j=1}^n a_{1j}z_j^- \\
&= \|z\|_1 + 2\sum_{j=1}^n a_{1j}z_j^- \\
&\leq \|z\|_1 + 2\overline{c}\sum_{j=1}^n z_j^- = \|z\|_1 - \overline{c}\|z\|_1 = c\|z\|_1 \\
&= c\|y - \overline{y}\|_1,
\end{aligned}$$

also ist A schrumpfend. $\square$

Lemma 5.14. *Ist A eine irreduzible Tauschmatrix, und gibt es ein $m > 0$, so dass A^m stabil ist, dann ist A stabil.*

Beweis. Für jeden beliebigen Vektor $y \in Y$ und den Gleichgewichtsvektor $\overline{y} \in Y$ von A gilt

$$\begin{aligned}
\|Ay - \overline{y}\|_1 &= \|A(y - \overline{y})\|_1 = \sum_{i=1}^n |\sum_{j=1}^n a_{ij}(y_j - \overline{y}_j)| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}|y_j - \overline{y}_j| \\
&= \sum_{j=1}^n |y_j - \overline{y}_j| \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^n |y_j - \overline{y}_j| = \|y - \overline{y}\|_1.
\end{aligned}$$

A^m ist für ein $m > 0$ genau dann stabil, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_0 gibt, so dass

$$\|(A^m)^k y - \overline{y}\|_1 \leq \varepsilon \quad \text{für alle} \quad k \geq n_0.$$

Setzen wir $n_1 := m \cdot n_0$, so gilt für alle $k \geq n_1$ (also alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k = n_0 m + r, \quad r \geq 0$) :

$$\|A^k y - \overline{y}\|_1 = \|A^r(A^{n_0 m}y - \overline{y})\|_1 \leq E\|A^{n_0 m}y - \overline{y}\|_1 \leq \varepsilon,$$

folglich gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_1, so dass $\|A^k y - \overline{y}\|_1 \leq \varepsilon$ für alle $k \geq n_1$, woraus folgt, dass A stabil ist. $\square$

Folgerung 5.15. *Ist A eine irreduzible Tauschmatrix, und hat eine Potenz $A^m, m > 0$, von A eine positive Zeile, dann ist A stabil.*

Unsere Strategie zum Beweis von Satz 5.10 dürfte nun klar werden. Wir werden versuchen zu zeigen, dass für eine irreduzible Tauschmatrix A entweder immer eine Potenz A^m eine positive Zeile hat (in diesem Fall ist A stabil) oder, falls niemals eine positive Zeile in den Potenzen A^m auftritt, auf Periodizität von A geschlossen werden kann.

Im weiteren wollen wir aus schreibtechnischen Gründen die Koeffizienten der Potenzen A^m von A mit $a_{ij}^{(m)}$ bezeichnen, d. h.

$$A^m = \left(a_{ij}^{(m)}\right)_{i,j=1,\ldots,n},$$

$a_{ij}^{(m)}$ ist i. a. nicht die m-te Potenz von a_{ij}! Nach Voraussetzung gilt $A \geq 0$, d. h.

$$a_{ik}^{(r+s)} = (A^{(r)})_{i\cdot}(A^{(s)})_{\cdot k} = a_{ij}^{(r)} a_{jk}^{(s)} + p, \quad p \geq 0,$$

daraus folgt

Bemerkung 5.16. *Falls $a_{ij}^{(r)} > 0$ und $a_{jk}^{(s)} > 0$, dann gilt $a_{ik}^{(r+s)} > 0$.*

Lemma 5.17. *Ist A eine irreduzible (n,n)-Tauschmatrix, dann gibt es für jedes Paar $i, j \in N = \{1, \ldots, n\}$ eine natürliche Zahl $r > 0$ mit $a_{ij}^{(r)} > 0$.*

Beweis. Wir zeigen das Lemma für $i = 1$ und alle $j \in N$. Sei $S := \{j \in N | a_{1j}^{(r)} = 0 \ \forall r \in \mathbb{N}\}$. Ist $k \in N \backslash S$, dann gilt nach Definition $a_{1k}^{(r)} > 0$ für ein $r > 0$. Ist $j \in S$ und wäre $a_{kj} \neq 0$, dann erhielten wir aus 5.16 $a_{1j}^{(r+1)} > 0$, Widerspruch. Also können wir schließen $a_{kj} = 0$ für alle $k \in N \backslash S$ und alle $j \in S$. Das aber heißt gerade, dass S eine unabhängige Menge ist. Ist $S = N$, dann gilt $a_{1j} = 0$ für $j = 2, \ldots, n$ und folglich ist $N \backslash \{1\}$ ebenfalls unabhängig. Dies aber widerspricht der Irreduzibilität von A. Also muss $S = \emptyset$ gelten. □

Zum Beweis des Satzes 5.10 benötigen wir noch ein wohlbekanntes zahlentheoretisches Hilfsmittel.

Lemma 5.18. *Ist R eine Menge positiver ganzer Zahlen, deren größter gemeinsamer Teiler 1 ist, dann gibt es eine ganze Zahl p, so dass folgendes gilt:*
Jede ganze Zahl $m \geq p$ läßt sich in der Form

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i p_i$$

darstellen mit $m_i \in \mathbb{N}$ und $p_i \in R$, $i = 1, \ldots, k$.

Beweis. Hat R nur ein Element, so ist die Voraussetzung nur im Falle $R = \{1\}$ erfüllt, und dann ist die Behauptung trivial.

Wir betrachten nun den Fall, dass R genau zwei Elemente enthält, sagen wir p_1 und p_2. Ist eines der Elemente gleich 1, sind wir fertig. Also können wir $p_1 > 1$ und $p_2 > 1$ annehmen. Wir setzen $p = (p_1 - 1)p_2$ und behaupten, dass sich jede ganze Zahl $m \geq p$ in der gewünschten Form darstellen lässt. Dieser Sachverhalt ergibt sich direkt aus der folgenden Beobachtung.

Ist $m \geq p$, dann sind alle p_1 Reste, die beim Teilen der positiven Zahlen

$$m, m - p_2,\ m - 2p_2, \ldots, m - (p_1 - 1)p_2$$

durch p_1 auftreten, voneinander verschieden. Das kann man wie folgt einsehen.

Nehmen wir an, dass für $0 \leq s < t \leq p_1 - 1$ die Reste von $m - sp_2$ und $m - tp_2$ beim Teilen durch p_1 gleich sind, sagen wir $m - sp_2 = s_1 p_1 + \rho$ und $m - tp_2 = t_1 p_1 + \rho,\ 0 \leq \rho < p_1$, dann erhalten wir

$$(m - sp_2) - (m - tp_2) = (t - s)p_2 = (s_1 - t_1)p_1.$$

Daraus folgt, dass p_1 ein Teiler von $(t - s)p_2$ ist. Da $(t - s) < p_1$ ist, muss p_1 ein Teiler von p_2 sein. Dies aber widerspricht unserer Annahme, dass p_1 und p_2 teilerfremd sind.

Wir schließen nun weiter durch Induktion und nehmen an, dass wir unsere Behauptung für alle Mengen mit $r \geq 2$ Elementen bewiesen haben und dass $R = \{p_1, \ldots, p_{r+1}\}$ eine Menge von $r + 1$ positiven ganzen Zahlen ist, deren größter gemeinsamer Teiler (ggT) 1 ist. Sei d der ggT von $p_1, \ldots, p_r$, dann ist $R' = \{\frac{p_1}{d}, \ldots, \frac{p_r}{d}\}$ eine Menge von positiven ganzen Zahlen, deren ggT 1 ist. Folglich gibt es nach Induktionsannahme eine positive natürliche Zahl q, so dass jede Zahl $m \geq q$ in der Form

$$m = \sum_{i=1}^{r} m_i \frac{p_i}{d}, \quad m_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, r,$$

dargestellt werden kann. Wir wählen nun eine Zahl k, so dass k und dk teilerfremd zu p_{r+1} sind und $k \geq q$ gilt (dies ist offensichtlich möglich).

Nach Induktionsannahme gibt es eine Darstellung

$$k = \sum_{i=1}^{r} m_i \frac{p_i}{d},$$

also gilt

$$dk = \sum_{i=1}^{r} m_i p_i.$$

Da dk und p_{r+1} relativ prim sind, gibt es (aufgrund des bereits bewiesenen Falles $|R| = 2$) eine Zahl p, so dass alle $m \geq p$ in der Form

$$m = m_{r+1}p_{r+1} + m'(dk) = m_{r+1}p_{r+1} + \sum_{i=1}^{r} m' m_i p_i$$

dargestellt werden können, und der Beweis ist fertig. □

Damit können wir nun den Hauptsatz dieses Kapitels beweisen.

Beweis. *von Satz 5.10.* Sei also A eine irreduzible (n,n)-Tauschmatrix. Nach Lemma 5.17 gibt es eine positive ganze Zahl r mit $a_{11}^{(r)} > 0$. Wir setzen

$$R := \{r \in \mathbb{N} | a_{11}^{(r)} > 0\}$$

und bezeichnen mit d den größten gemeinsamen Teiler der Elemente von R.

1. Fall: $d = 1$. Wir zeigen, dass es ein $m' > 0$ gibt, so dass $A^{m'}$ eine positive Zeile hat. Folgerung 5.15 impliziert dann, dass A stabil ist.

Nach Lemma 5.18 gibt es eine positive ganze Zahl p, so dass jede ganze Zahl $m \geq p$ in der Form

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i p_i \quad \text{mit} \quad m_i \geq 0 \quad \text{und} \quad p_i \in R,\ i = 1, \dots, k$$

dargestellt werden kann. Da nach Definition $a_{11}^{(p_i)} > 0,\ i = 1, \dots, k$, können wir aus Bemerkung 5.16 schließen, dass

$$a_{11}^{(m)} = a_{11}^{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} m_i p_i\right)} > 0 \quad \text{für alle} \quad m \geq p$$

gilt.

Da A irreduzibel ist, gibt es nach Lemma 5.17 für jeden Index $j \in \{1, \dots, n\}$ eine positive ganze Zahl s_j, so dass $a_{1j}^{(s_j)} > 0$. Sei $s := \max\{s_j | j = 1, \dots, n\}$.

Wir behaupten nun:

$$a_{1j}^{(m+s)} > 0 \quad \text{für alle} \quad j \in \{1, \dots, n\} \quad \text{und alle} \quad m \geq p.$$

Um dies zu zeigen, setzen wir $s'_j := s - s_j$. Da $s'_j \geq 0$, wissen wir bereits, dass $a_{11}^{(m+s'_j)} > 0$ gilt; und aufgrund der Wahl von s_j gilt $a_{1j}^{(s_j)} > 0$. Also folgt mit Bemerkung 5.16 $a_{1j}^{(m+s)} \geq a_{11}^{(m+s'_j)} a_{1j}^{(s_j)} > 0$. Damit haben wir bewiesen, dass die erste Zeile von A^{m+s} positiv ist.

2. Fall: $d > 1$. Wir zeigen, dass A periodisch ist, insbesondere, dass d die Periode von A ist. D. h., wir konstruieren eine Partition $S_1, \dots, S_d$ der Indexmenge $N = \{1, \dots, n\}$ mit den in Definition 5.9 geforderten Eigenschaften.

Wir überlegen uns zunächst folgendes. Falls $a_{1j}^{(r)} > 0$ und $a_{1j}^{(s)} > 0$, dann gilt $r \equiv s (\text{mod } d)$. Nämlich, nach Lemma 5.17 gibt es ein $k > 0$ mit $a_{j1}^{(k)} > 0$, und somit gilt nach Bemerkung 5.16 $a_{11}^{(r+k)} > 0$ und $a_{11}^{(s+k)} > 0$. Nach Definition ist d ein Teiler von $r + k$ und von $s + k$, also sind r und s kongruent modulo d.

Aus dieser Beobachtung folgt, dass alle Zahlen $s > 0$ mit $a_{1j}^{(s)} > 0$ zu derselben Kongruenzklasse modulo d gehören. Dies impliziert, dass jeder Index $j \in \{1, \dots, n\}$ einer Kongruenzklasse modulo d zugeordnet werden kann.

Für $r = 1, 2, ..., d$ sei nun S_r die Menge aller Indizes $j \in \{1, \ldots, n\}$, so dass gilt $a_{1j}^{(r+kd)} > 0$ für mindestens ein $k \geq 0$. Jeder Index kommt nach Lemma 5.17 in mindestens einer Menge S_r vor, und aus der obigen Beobachtung folgt, dass $S_r \cap S_q = \emptyset$, falls $r \neq q$, also kommt jeder Index in genau einer Menge S_r vor. Nehmen wir an, dass $S_r \neq \emptyset$ und dass $i \in S_r$, d. h. es gibt ein $k \geq 0$ mit $a_{1i}^{(r+kd)} > 0$. Die i-te Zeile von A enthält mindestens ein positives Element, sagen wir a_{ij} (andernfalls hätten wir einen Widerspruch zu Satz 4.6). Daraus folgt mit Bemerkung 5.16 $a_{1j}^{(r+1+kd)} > 0$, d. h. $j \in S_{(r+1) \bmod d}$. Aus dieser Überlegung können wir schließen, dass alle Mengen $r = 1, \ldots, d$ nicht-leer sind, also eine Partition von N bilden, und dass A in der Tat periodisch ist. $\square$

Damit haben wir den Beweis von Satz 5.10 erledigt und unsere Fragen in Problem 5.2, Problem 5.3, Problem 5.4 für irreduzible Tauschmatrizen vollständig geklärt. Wir wollen nun noch kurz den Fall reduzibler Tauschmatrizen behandeln.

Sei nun A eine reduzible (n, n)-Tauschmatrix mit irreduziblen Teilmengen $S_i, i = 1, \ldots, k$, von $N = \{1, \ldots, n\}$. Sei

$$T = N \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{k} S_1 \right).$$

Wir haben uns in Abschnitt 4 überlegt, dass A das in Bild 4.2 angegebene Aussehen hat (u. U. sind zur Erreichung dieses Aussehens Zeilen und Spalten zu vertauschen). Ist die Untermatrix B von A leer, d. h. ist $T = \emptyset$, dann besteht A nur aus irreduziblen Blöcken $A_i, i = 1, \ldots, k$, entlang der Hauptdiagonalen. Jede dieser Matrizen A_i ist eine irreduzible Tauschmatrix und somit nach Satz 5.10 entweder stabil oder periodisch. Offensichtlich ist A genau dann stabil, wenn jede der Matrizen A_i stabil ist. Gibt es mindestens eine periodische Untermatrix A_i, so ist A nicht stabil. In diesem Fall hat A „periodische Bereiche“ und unter Umständen auch „stabile Bereiche“. Jedenfalls lässt sich das Verhalten der Folge $(y^k)_{k \in \mathbb{N}}$ im Limes direkt aus den Eigenschaften der irreduziblen Teilmatrizen $A_i, i = 1, \ldots, k$ ableiten.

Wir müssen nun noch den Fall $T \neq \emptyset$ diskutieren. O. B. d. A. können wir annehmen, dass $T = \{p, \ldots, n\}$ gilt. Die Erstausstattung der Länder $1, \ldots, n$ sei gegeben durch den Anfangsvektor $y^0 = (y_1^0, \ldots, y_n^0)$, und es sei $\eta^0 := (y_p^0, \ldots, y_n^0)$. Mit C bezeichnen wir die $(n-p+1, n-p+1)$-Untermatrix in der rechten unteren Ecke von A, d. h.

$$C = (a_{ij})_{i,j=p,\ldots,n}$$

Nach einer Periode hat das Land $i \in \{1, \ldots, p-1\}$ von den Ländern aus T Einnahmen in Höhe von

$$b_i^1 := \sum_{j=p}^{n} a_{ij} y_j^0$$

erzielt aber nichts von den Ländern in T gekauft. Da die Länder aus T nicht in Länder aus $N \backslash T$ exportieren, gehen diese Beträge b_i^1 (für $i = 1, \ldots, p-1$) den Ländern aus T für immer verloren. Das heißt nach jedem Jahr verschwindet ein gewisser Anteil des Gesamtvermögens der Länder aus T und wird von den Ländern aus $N \backslash T$ hinzuverdient.

Das Einkommen der Länder aus T nach r Jahren lässt sich wie üblich berechnen

$$\begin{aligned}\eta^1 &= C\eta^0,\\ \eta^2 &= C\eta^1 = C^2\eta^0,\\ &\vdots\\ \eta^r &= C^r\eta^0.\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass nach $r+1$ Jahren das Land $i \in \{1,\ldots,p-1\}$ insgesamt den Betrag

$$d_i^{r+1} := \sum_{s=1}^{r+1} b_i^s = \sum_{s=0}^{r}\sum_{j=p}^{n} a_{ij}\eta_j^s = (a_{ip},\ldots,a_{in})(I+C+\ldots+C^r)\eta^0$$

von den Ländern aus T erhalten hat.

Wir nehmen nun an, dass $I-C$ invertierbar ist (dies ist in der Tat der Fall, wie wir später sehen werden), dann gilt zunächst

$$(I-C)(I+C+\ldots+C^r) = I - C^{r+1}$$

und daher

$$(I+C+\ldots+C^r) = (I-C)^{-1}(I-C^{r+1}).$$

Daraus folgt

$$d_i^{r+1} = (a_{ip},\ldots,a_{in})(I-C)^{-1}\eta^0 - (a_{ip},\ldots,a_{in})(I-C)^{-1}C^{r+1}\eta^0.$$

Die Folge $(C^{r+1}\eta^0) = (\eta^{r+1})$ konvergiert – wie man leicht (aus ökonomischen Gründen) schließen kann – gegen den Nullvektor, und daher gilt für $i \in \{1,\ldots,p-1\}$

$$d_i := \lim_{r\to\infty} d_i^r = (a_{ip},\ldots,a_{in})(I-C)^{-1}\eta^0.$$

Bemerkung 5.19. *Für jedes Land $i \in N\backslash T$ konvergiert die Summe der Beträge, die in den Jahren $r = 1,2,\ldots$ aus den Ländern in T in das Land i fließen, gegen*

$$d_i := (a_{ip},\ldots,a_{in})(I-C)^{-1}\begin{pmatrix} y_p^0\\ \vdots\\ y_n^0\end{pmatrix}.$$

Das bedeutet also, dass die Länder in T pro Jahr einen Teil ihres Vermögens verlieren, dass ihr Vermögen gegen Null strebt und sich die Vermögensverluste der Länder aus T wie in Bemerkung 5.19 angegeben auf die Länder in $N\backslash T$ verteilen.

Die Situation der Länder in $N\backslash T$ ist nach Satz 5.10 klar. Jedes Land $j \in N\backslash T$ gehört zu einer irreduziblen Teilmenge S_i, die eine irreduzible Untermatrix A_i induziert. Sind alle Matrizen $A_i, i = 1,\ldots,k$ stabil, so ist auch A stabil. Im vorliegenden Fall erhöht sich jedoch das

Gesamteinkommen der Ländergruppen $S_i, i = 1, \ldots, k$, um den Betrag $\sum_{j \in S_i} d_j$. Für jeden beliebigen Anfangsvektor y^0 konvergiert die Folge $(A^k y^0)$ gegen einen Gleichgewichtsvektor $\overline{y}$ von A. Partitionieren wir $\overline{y}$ in $(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k, \overline{y}_{k+1})$ wobei die $\overline{y}_i$ Vektoren mit $|S_i|$ Komponenten sind, $i = 1, \ldots, k$, die zu den Ländern aus S_i gehören, und $\overline{y}_{k+1}$ ein Vektor mit $|T|$ Komponenten ist, dann gilt:

$$\overline{y}_{k+1} = 0 \text{ und}$$

$$\overline{y}_i, \quad i = 1, \ldots, k \text{ ist ein Gleichgewichtsvektor von } A_i \text{ mit } \mathbf{1}^T \overline{y}_i = \sum_{j \in S_i} (y_j^0 + d_j).$$

Kapitel 6

Grundkonzepte der Input-Output-Rechnung

In den dreißiger und vierziger Jahren dieses Jahrunderts hat Wassily Leontief, siehe z. B. LEONTIEF (1936), (1951), (1953) (siehe [14], [15], [16]) die Input-Output-Rechnung entwickelt. Hierbei handelt es sich um ein mathematisch recht einfaches ökonomisches Modell, das jedoch schöne und zutreffende ökonomische Interpretationen mathematischer Operationen erlaubt und sich in der Praxis gut als Prognose- und Analyseinstrument bewährt hat. Für die Entwicklung der Input-Output-Rechnung (ab jetzt schreiben wir häufig kurz I-O- statt Input-Output-) wurde Leontief 1973 mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnet.

Im Internet findet man eine "*Leontief memorial site*" unter *http://www.iioa.org/leontief* mit Informationen über Leontief und sein Leben.

Die Input-Output-Wissenschaftler und -Praktiker der Welt sind in der *International Input-Output Association* organisiert, die auf ihrer Webpage *http://wwwiioa.org* über ihre Ziele und Aktivitäten informiert. Sie gibt u. a. eine Zeitschrift *"Economic Systems Research"* heraus, die sich ganz der Input-Output-Forschung und -Praxis widmet.

Die I-O-Rechnung wird üblicherweise in zwei Teilbereiche gegliedert, einen empirisch-praktischen und einen theoretisch-analytischen. Der empirisch-praktische Teil befasst sich mit der Konzeption von Input-Output-Tabellen sowie mit den Problemen der Erhebung empirischer Daten zur Aufstellung solcher Tabellen. Im theoretisch-analytischen Teil, der so genannten Input-Output-Analyse, werden Interpretationen der in der Tabelle gespeicherten Angaben gegeben. Die Interpretationen bestehen aus deskriptiven Auswertungen, jedoch hauptsächlich aus Auswertungen mit Hilfe mathematischer Verfahren.

Die Aufteilung der Input-Output-Rechnung in diese zwei Teilbereiche besagt natürlich nicht, dass diese unabhängig voneinander sind. Im Gegenteil, einerseits werden I-O-Tabellen häufig mit dem Ziel erstellt, gewisse Analysen und Strukturuntersuchungen durchzuführen, andererseits können aus einem vorgegebenen Datenmaterial nicht alle im Prinzip möglichen Schlussfolgerungen gezogen werden, seien sie auch noch so wünschenswert. Für die praktischen (z. B. wirtschaftspolitischen) Anwendungen der I-O-Rechnung sind daher Tabellenerstellung und -auswertung als untrennbare Einheit anzusehen. Die Analyse kann nie mehr liefern als die Daten ermöglichen.

In zunehmendem Maße wird in der Bundesrepublik Deutschland und anderen Ländern die Input-Output-Rechnung als ein wichtiges Instrument zur Strukturuntersuchung, als ein Hilfsmittel zur Prognose wirtschaftlicher Daten und als ein Werkzeug zur Entscheidungsvorbereitung in der Wirtschaftspolitik eingesetzt. Je nach Ziel und Zweck der Untersuchungen unterscheiden sich jedoch die dabei benutzten Input-Output-Tabellen und die verwendeten Analysemethoden.

Von besonderer Bedeutung ist die Tatsache, dass in der Input-Output-Analyse sehr genaue Angaben über das Datenmaterial gemacht werden können, das benötigt wird, um eine vorliegende Frage beantworten zu können. Dies bedeutet insbesondere, dass eine theoretische Analyse der praktischen Erhebung von Daten vorausgehen muss, damit die gesteckten Ziele überhaupt erreicht werden können. Erst nach einer Untersuchung der theoretisch möglichen Aussagen ist es sinnvoll, die i. a. sehr kostenträchtigen statistischen Erhebungen voranzutreiben.

Andererseits sollte natürlich auch versucht werden, vorhandene Daten soweit wie möglich zu benutzen, um zum Beispiel Teilaspekte einer Fragestellung auszuleuchten bzw. zu untersuchen, ob von der Input-Output-Analyse tatsächlich brauchbare Ergebnisse geliefert werden können. Ohne Zweifel hat die Input-Output-Analyse klare theoretische Grenzen bezüglich ihrer Aussagemöglichkeiten, meistens jedoch müssen diese Grenzen sehr viel enger als theoretisch möglich gezogen werden, weil die benötigten Daten in der Praxis (oder aus finanziellen) Gründen nicht beschaffbar sind.

Wie bereits erwähnt, werden in der Input-Output-Rechnung verschiedene Arten von Input-Output-Tabellen betrachtet. Sie alle basieren jedoch auf einer Grundversion, die gemeinhin als die Input-Output-Tabelle (im weiteren I-O-Tabelle) bezeichnet und in Abschnitt 6.1 eingeführt wird. Alle anderen I-O-Tabellen können als Abwandlungen oder Erweiterungen dieser Grundtabelle betrachtet werden.

Der für die mathematische Behandlung eigentlich irrelevante Teil der Definition der I-O-Matrizen und der Datenerhebung wird hier so ausführlich behandelt, damit klar wird, dass die Aufstellung derartiger Matrizen eine komplexe Aufgabe ist, die erheblichen ökonomischen Sachverstand erfordert. Mathematiker gehen typischerweise davon aus, dass Daten „gegeben“ sind. Wenn man allerdings keine Kenntnisse von der Art und Genauigkeit der Datenerfassung hat und von den theoretischen Problemen, die dabei erwogen worden sind, dann kann man auch keine vernünftigen Interpretationen von Analyserechnungen geben. Bei derartigen Anwendungen von Mathematik ist die enge Zusammenarbeit mit Fachleuten (hier Ökonomen und Personen, die Statistik in der Praxis betreiben) unabdingbar.

Der restliche Text dieses Kapitels ist eine Zusammenfassung verschiedener Quellen zur I-O-Analyse. Besonders erwähnen möchte ich hier das Deutsche Institut für Wirtschaftsforschung (DIW) in Berlin, das die wichtigsten I-O-Tabellen für Deutschland zusammenstellt und dessen Mitarbeiter seit vielen Jahren zu diesem Bereich sehr kompetent veröffentlichen.

6.1 Die Input-Output-Tabelle

Das Kernstück der Input-Output-Rechnung ist die Input-Output-Tabelle. Sie bildet das formale Gerüst für die I-O-Analyse, setzt durch ihre Gliederungstiefe den Rahmen für alle Untersuchungen und begrenzt durch die Exaktheit der in ihr enthaltenen Daten die Güte und die Genauigkeit aller Analysen und Prognosen.

In diesem ersten Abschnitt soll zunächst der formale Aufbau einer I-O-Tabelle dargestellt werden. Eine inhaltliche Interpretation der Begriffe und eine Erläuterung des ökonomischen Gehalts erfolgt in den nächsten Abschnitten; dort werden auch konzeptionelle und empirisch-statistische Probleme bei der Aufstellung von I-O-Tabellen besprochen.

Unter einer *Input-Output-Tabelle* verstehen wir eine systematische Darstellung aller Lieferungen und Bezüge, die während eines genau festgelegten Zeitraumes zwischen definitorisch abgegrenzten Sektoren einer ökonomischen Einheit erfolgt sind. Die verschiedenen Systemen jeweils zugrundeliegenden ökonomischen Einheiten können sehr unterschiedlicher Natur sein. So kann es sich um eine Nationalökonomie, ein Großunternehmen, den Landwirtschaftssektor einer Volkswirtschaft oder z. B. der Europäischen Gemeinschaft, den Kohlebergbau im Ruhrgebiet oder die gesamte Wirtschaft des Landes Bayern handeln. Als Bezugszeitraum wird eine Einheit gewählt, die in natürlicher Beziehung zu dem betrachteten ökonomischen System steht: Kalenderjahr, Geschäftsjahr, Landwirtschaftsjahr.

Die Definitionen der Wirtschaftssektoren werden im allgemeinen in Hinblick auf spezielle Analyse- oder Prognoseziele getroffen, sind jedoch stark an die zur Verfügung stehenden oder erhebbaren statistischen Daten gebunden. Obwohl - wie oben angedeutet - sehr verschiedene Wirtschaftsbereiche durch I-O-Tabellen beschrieben werden können, werden wir im weiteren nur den (wichtigsten) Spezialfall einer gesamten (nationalen) Volkswirtschaft behandeln. Die weiteren Ausführungen gelten jedoch mutatis mutandis ebenso für alle übrigen Arten von I-O-Tabellen. Somit gelte im weiteren:

Definition 6.1. *Eine* **Input-Output-Tabelle** *ist eine systematische Darstellung der Waren- und Dienstleistungsströme, die zwischen den zu Sektoren zusammengefassten Wirtschaftsbereichen einer Volkswirtschaft innerhalb eines Kalenderjahres fließen.*

Die Sektoren einer Volkswirtschaft werden in drei verschiedene Kategorien aufgeteilt:

- *Produktionssektoren*
- *Endnachfragesektoren*
- *Sektoren des primären Inputs (Primärsektoren)*

Zweck allen wirtschaftlichen Handelns ist die Erzeugung von Gütern für die Endnachfrage (Konsum). Im Mittelpunkt aller Betrachtungen steht daher die Produktion; wir verstehen darunter:

Die **Produktion** *ist eine Tätigkeit, bei der verschiedene Güter (***Inputs***) kombiniert werden, um andere Güter (***Outputs***) zu erzeugen.*

Die Herstellung der Güter geschieht in verschiedenen Produktionssektoren, die in Anlehnung an die reale Wirklichkeit definiert werden. Wir nehmen zunächst an (vergleiche Modell 2.1):

Annahme 6.2. *Jeder Produktionssektor erzeugt genau ein Gut.*

Annahme 6.3. *Jedes Gut wird in genau einem Produktionssektor erzeugt.*

Es ist natürlich unsinnig anzunehmen, dass eine I-O-Tabelle aufgestellt werden kann, die so stark disaggregiert ist, dass jeder Produktionssektor nur ein reales Produkt (etwa Farbfernsehgerät mit 70 cm Bildröhre) herstellt. Die Annahme 6.2 ist so zu interpretieren, dass die Volkswirtschaft derart in Sektoren gegliedert ist, dass jeder Sektor eine typische durch gemeinsame Merkmale ausgezeichnete Produktpalette anbietet (Fahrzeuge, Kohle, chemische Erzeugnisse); diese Produktpalette wird als das *Gut des betreffenden Sektors* bezeichnet.

Diese sehr vereinfachende Annahme kann, wie wir weiter unten zeigen werden, sehr problematisch sein und zu wesentlichen Interpretationsfehlern führen. Sie ist jedoch wegen des vorliegenden Datenmaterials die einzig pragmatisch mögliche Hypothese.

Die Annahme 6.3 kann im Rahmen theoretischer Untersuchungen – wie wir später noch sehen werden – fallen gelassen werden, ist jedoch bei empirischen Analysen und bei den noch zu erörternden Schwierigkeiten der Aufstellung von I-O-Tabellen sinnvoll und gerechtfertigt.

In jedem Produktionssektor werden zur Herstellung des erwünschten Guts verschiedene Inputs benötigt. Diese sind zum einen produzierte Güter, die aus anderen Produktionssektoren stammen - solche Güter heißen *intermediäre Inputs* oder *Vorleistungen* -, zum anderen sind es Güter, die nicht produzierbar sind (Arbeit) oder im Rahmen der betrachteten Volkswirtschaft als nicht produzierbar angenommen werden (z. B. Importe) - solche Güter heißen *primäre Inputs*.

Wie auf der Inputseite bei der Produktion eines Gutes unterscheiden wir auch bei den Lieferungen eines Produktionssektors zwei Arten von Outputs. Die Outputs, die für die Weiterverarbeitung in anderen Produktionssektoren bestimmt sind, heißen *intermediäre Outputs* (Zwischennachfrage), diejenigen, die an die Endnachfrage (Konsum, Investitionen, Export) geliefert werden, *autonome Outputs*.

Schließen wir noch die Möglichkeit ein, dass gewisse Primärfaktoren ohne Weiterverarbeitung an die Endnachfrage geliefert werden, dann ergibt sich aus den vorhergehenden Überlegungen, dass sich eine Input-Output-Tabelle aus vier Teilen zusammensetzt:

(1) *Lieferungen von Produktions- an Produktionssektoren*

(2) *Lieferungen von Produktions- an Endnachfragesektoren*

(3) *Lieferungen von Primär- an Produktionssektoren*

(4) *Lieferungen von Primär- an Endnachfragesektoren*

Auf natürliche Weise stellt sich das Problem, in welchen Einheiten die Lieferungen und Bezüge gemessen werden sollen. Vorausgesetzt, dass jeder Sektor ein homogenes Gut produziert, böten sich technische Einheiten (Mengengrößen) wie Kilowatt, Kilogramm etc. oder einfach Anzahleinheiten an. Wie wir bereits dargestellt haben, ist die Hypothese der Güterhomogenität jedoch irreal. Das bedeutet, dass eine Maßeinheit gefunden werden muss, die erlaubt, die unterschiedlichen technischen Größen, in denen die verschiedenen Produkte der Produktpalette eines Sektors gemessen werden, ohne Skalierungsschwierigkeiten zu aggregieren.

Ein sinnvoller Ausweg, der den Vorzug hat, für alle Sektoren gleich gut und ohne statistische Probleme zu funktionieren (ja sogar mit erheblichen statistischen Vorteilen), ist die Messung der Lieferungen in Geldeinheiten, also Wertgrößen. Obwohl bei einer derartigen Vorgehensweise die I-O-Tabelle Wertgrößen enthält, ist sie doch weiterhin als eine Tabelle technischer Beziehungen interpretierbar.

Als *technische Einheit für das im Produktionssektor i erzeugte Gut* wählen wir einfach die Mengeneinheit, die für die der Messung zugrundeliegende Geldeinheit gekauft werden kann. Die Aussage „Sektor j bezieht Güter im Werte von x_{ij} Geldeinheiten vom Sektor i“ ist dann gleichwertig damit, dass Sektor j insgesamt x_{ij} (technische) Einheiten des von Sektor i produzierten Gutes kauft. Somit legen wir fest:

Lieferungen und Bezüge werden in Geldeinheiten gemessen.

Weiterhin nehmen wir im Folgenden an, dass die betrachtete Volkswirtschaft (alle hier gemachten Überlegungen gelten für jede beliebige Volkswirtschaft und nicht nur für die uns besonders interessierende Bundesrepublik Deutschland) wie folgt in Sektoren gegliedert ist:

n Produktionssektoren (die n Güter erzeugen)

m Endnachfragesektoren

l Primärinputsektoren (oder Primärsektoren)

Damit können wir nun eine I-O-Tabelle in dem in Abbildung 6.1 gezeigten Schema darstellen:

Die vier Teile der Tabelle heißen Quadranten und sind wie in der Abbildung 6.1 angegeben numeriert.

Die (n, n)-Matrix X bildet den ersten Quadranten. X heißt Matrix der *Vorleistungsverflechtungen* bzw. Matrix der *intersektoralen* (oder *intrasektoralen*, oder *intermediären*) *Lieferungen* oder auch *Zentralmatrix*. Bezeichnen wir mit $x_{ij}, i, j \in \{1, \dots, n\}$ die Elemente der Matrix X, so gilt:

x_{ij} gibt die Lieferungen (gemessen in Geldeinheiten) des Produktionssektors i an, die innerhalb eines Kalenderjahres an den Produktionssektor j geflossen sind und im Sektor j als Vorleistungen zur Herstellung des Gutes j verwendet werden. (6.1.1)

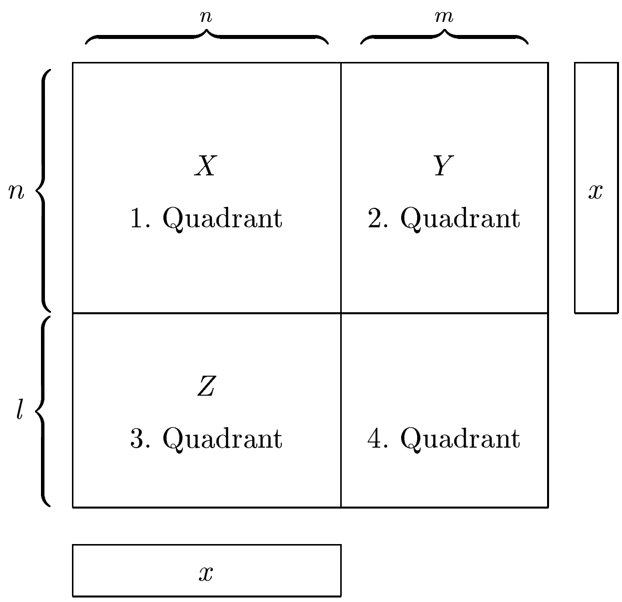

Abbildung 6.1: I-O-Tabelle

Der zweite Quadrant der I-O-Tabelle wird von der (n, m)-Matrix Y gebildet. Y heißt *Endnachfragematrix*, ihre Elemente bezeichnen wir mit $y_{ij}, i \in \{1, \ldots, n\}, \quad j \in \{1, \ldots, m\}$. Für diese gilt:

y_{ij} gibt die Lieferungen des Produktionssektors i an, die innerhalb eines Kalenderjahres an den Endnachfragesektor j geflossen sind. (6.1.2)

Die (l, n)-Matrix Z heißt *Primärinput-Matrix* und bildet den dritten Quadranten. Für die Elemente z_{ij}, $i \in \{1, \ldots, l\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ der Matrix Z gilt:

z_{ij} gibt die Lieferungen des Primärsektors i an, die innerhalb eines Kalenderjahres an den Produktionssektor j geflossen sind. (6.1.3)

Im vierten Quadranten werden die Lieferungen der Primärsektoren an die Endnachfrage verbucht. Dieser Teil der I-O-Tabelle spielt in der Input-Output-Analyse keine Rolle, deshalb haben wir für ihn keine spezielle Bezeichnung gewählt. Er bleibt bei analytischen Untersuchungen im allgemeinen unberücksichtigt, wird jedoch gelegentlich aus bilanztechnischen Gründen bei der Aufstellung der I-O-Tabelle mit einigen Daten belegt (z. B. Direktimporte privater Haushalte). Wir nehmen im weiteren an, dass der 4. Quadrant nur mit Nullen belegt ist.

Der gesamte Output x_i eines Produktionssektors i im betrachteten Zeitraum kann aufgrund der oben getroffenen Definitionen einfach (zeilenweise) aus der Tabelle abgelesen werden. Er ist die Summe aller Lieferungen an andere Produktionssektoren, an sich selbst und an die Endnachfrage, d.h.:

$$x_i := \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{m} y_{ij}, \quad i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{6.1.4}$$

Die Größe x_i ist die *Bruttoproduktion* des produzierenden Sektors i.
Der Vektor $x := (x_i)_{i=1,\dots,n}$, der komponentenweise die Outputs der Produktionssektoren enthält, heißt *Bruttoproduktionsvektor.* Ist $\mathbf{1}_k$ ein Vektor, der k Einselemente enthält, so gilt in Matrixnotation

$$x = X\mathbf{1}_n + Y\mathbf{1}_m. \tag{6.1.5}$$

Ebenso, wie man zeilenweise den Erlös für alle von Produktionssektor i erstellten Produkte berechnen kann, erhält man über die Spalten der I-O-Tabelle Aufschluss über die Kosten, d. h. den Wert der an einen Sektor gelieferten Waren und Dienstleistungen. Die Differenz zwischen Erlös und Kosten ist eine Restgröße, die den Gewinn repräsentiert, und wird – wie wir später noch genauer erläutern werden – als ein Sektor des primären Inputs verbucht. Aufgrund dieser Verbuchungstechnik ist für jeden Produktionssektor die Zeilensumme gleich der Spaltensumme, d. h. es gilt ebenfalls:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{l} z_{ij}, \quad j \in \{1, \dots, n\} \tag{6.1.6}$$

und damit für den Bruttoproduktionsvektor:

$$x^T = \mathbf{1}_n^T X + \mathbf{1}_l^T Z. \tag{6.1.7}$$

Für jeden produzierenden Sektor gilt in diesem bilanztechnischen System Gleichheit von Input und Output, d. h. die Gesamtproduktion ist gleich der Gesamtverwendung. Es sei darauf hingewiesen, dass ohne den „Trick“, technische Einheiten in Geldeinheiten zu messen, eine spaltenweise Addition, d. h. Addition der gesamten Vorleistungen, nicht bzw. nur mit erheblichen Gewichtungsproblemen möglich gewesen wäre. Hier zeigt sich bereits einer der Vorteile der Messung in Wertgrößen.

Zur einfacheren Notation bei späteren Analysen fassen wir die Lieferungen an alle Endnachfragesektoren zusammen: y_i gibt die Lieferungen des Produktionssektors i an, die innerhalb eines Kalenderjahres an die Endnachfrage geflossen sind.

Definition 6.4. *Der Vektor $y := (y_i)_{i=1,\dots,n}$ heißt Vektor der Endnachfrage.*

Aufgrund der vorhergehenden Definitionen gilt:

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} y_{ij}, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \text{ bzw.} \tag{6.1.8}$$

$$y = Y\mathbf{1}_m \qquad \text{und mit (6.1.5)} \tag{6.1.9}$$

$$x = X\mathbf{1}_n + y. \tag{6.1.10}$$

Ebenso definieren wir durch Aggregation der Primärsektoren einen *Primärinputvektor.*

Definition 6.5. *Der Vektor der Primärinputs* $z := (z_j)_{j=1,\dots,n}$ *ist gegeben durch:*

$$z_j := \sum_{i=1}^{l} z_{ij}, \quad j \in \{1, \dots, n\}. \tag{6.1.11}$$

z_j gibt die gesamten Lieferungen an, die innerhalb eines Kalenderjahres aus Primärsektoren an den Produktionssektor j geflossen sind.

Aus dieser Definition folgt:

$$z^T = \mathbf{1}_l^T Z \qquad \text{und mit (6.1.7)} \tag{6.1.12}$$

$$x^T = \mathbf{1}_n^T X + z^T. \tag{6.1.13}$$

Die Input-Output-Tabelle in der oben dargestellten Form verschafft uns also einen Überblick über die Lieferungen und Bezüge in einer Ökonomie. Die Zeilen der Tabelle geben Auskunft über den Verbleib der in den Produktionssektoren erzeugten Güter, bzw. über die Verteilung der primären Güter. D. h. die Zeilen bilden die Distributionsstruktur (*Outputstruktur*) der Volkswirtschaft ab. Die Spalten informieren über die Herkunft der Waren und Dienstleistungen, die zur Produktion der Güter erforderlich sind bzw. an die Endnachfrage geliefert werden, die Spalten beschreiben also die *Inputstruktur* der Ökonomie.

6.2 Konzeptionelle Probleme bei der Aufstellung von Input-Output-Tabellen

Viele Tabellen, wie die in Abschnitt 6.1 beschriebene I-O-Tabelle, lassen sich theoretisch einfach definieren. Ob diese Tabellen jedoch mit „Leben“ erfüllt werden können, ist nicht ohne weiteres klar.

Die nachfolgenden Bemerkungen beziehen sich speziell auf konzeptionelle Probleme bei der Aufstellung von I-O-Tabellen einer nationalen Volkswirtschaft. Alle Überlegungen gelten jedoch in ähnlicher Weise, teilweise mit etwas verlagerten Schwerpunkten bei der Aufstellung von I-O-Tabellen für andere ökonomische Einheiten. Wir werden in diesem Abschnitt kurz die folgenden konzeptionellen Probleme allgemeiner Art diskutieren:

- Wahl des Bezugszeitraumes
- Tabellengröße
- Verknüpfung mit der volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung
- Prinzipien bei der Sektorenbildung
- Zeitpunkt der Erfassung von Transaktionen

- Bewertung von Transaktionen

In der Regel ist der Bezugszeitraum von nationalen I-O-Tabellen das Kalenderjahr. Für welches Jahr eine I-O-Tabelle erstellt werden sollte, hängt weitgehend vom Verwendungszweck, d. h. vom Interesse des Auftraggebers oder den beabsichtigten Forschungsvorhaben ab. Im allgemeinen wird man sich bei einmaligen Vorhaben für ein „typisches" Jahr bzw. für ein möglichst zeitnahes Jahr entscheiden. Bei langfristigen Programmen bietet sich eine Aufstellung von Tabellen in regelmäßigen Perioden (jährlich, alle vier Jahre) an.

In den meisten Industrieländern werden jährlich fortlaufend I-O-Tabellen erstellt, jedoch werden diese i. a. nur alle vier oder mehr Jahre (fast) originär erhoben und für die Zwischenjahre unter Zuhilfenahme mathematisch-statistischer Methoden fortgeschrieben. Die Zeitnähe der Tabellen wird begrenzt durch fehlendes statistisches Material für gerade zu Ende gegangene Jahre und natürlich durch die Dauer der Aufstellung der Tabellen selbst, was z. T. mehrere Jahre erfordern kann.

Die *Größe der Tabellen*, d. h. die Anzahl der verschiedenen Sektoren, hängt ebenso vom Zweck der Tabellenerstellung wie von den vorhandenen statistischen Daten ab. Will man etwa I-O-Tabellen innerhalb ökonometrischer Prognosemodelle verwenden, so genügen meistens Tabellen mit etwa 20 Sektoren. Desgleichen reichen diese Tabellen i. a. bei schwach entwickelten Ländern aus. Ist an sehr detaillierte Analysen von hochentwickelten Industrieländern gedacht, so sind bei der Anzahl der Sektoren nach oben hin nur Grenzen durch den Aggregationsgrad der erhältlichen Daten gesetzt. Für spezielle Untersuchungen sind bereits Tabellen in einer Größenordnung von rund 500 Sektoren erstellt worden. Bei kleinen Tabellen geht durch die hohe Aggregation der Daten viel Information verloren; andererseits sind sie in ihrer Struktur stabiler und können über längere Zeiträume verwendet werden als große Tabellen, bei denen sich strukturelle und technologische Veränderungen stärker bemerkbar machen, was natürlich bei vergleichenden Analysen auch von Vorteil sein kann.

Bei der Aufstellung von nationalen I-O-Tabellen sollte darauf geachtet werden, dass die Tabellen kompatibel sind mit den Daten der volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung (VGR). Speziell ist es möglich, dass sie voll in die volkswirtschaftliche Gesamtrechnung integriert sind und somit als Erweiterung der VGR angesehen werden können. Wesentlich ist dabei, dass alle Transaktionen auf der gleichen Basis erfasst werden (in der VGR werden Transaktionen bei der Entstehung einer Forderung bzw. Verbindlichkeit erfasst) und dass die (stärker disaggregierten) Sektoren der I-O-Tabellen konzeptionell den Sektoren der VGR zugeordnet werden können, d. h. dass durch Zusammenfassung einiger Felderwerte der I-O-Tabelle Größen der VGR gegeben sein sollten.

Die Input-Output-Rechnung basiert auf der fundamentalen Annahme, dass die Volkswirtschaft in gewisse (mehr oder weniger) homogene Produktions-, Primär- und Endnachfragesektoren gegliedert werden kann. Theoretisch könnte man zwar eine Gliederung definieren, in der jedes real auf dem Markt auftretende Produkt in einem Produktionssektor hergestellt wird, doch ist die empirische Aufstellung einer derartigen I-O-Tabelle unmöglich, und sie ist für allgemein-analytische Aussagen sicherlich ungeeignet. Es besteht also für den Empiriker das Problem, die vielen Produktionstechnologien und Wirtschaftsverflechtungen auf eine überschaubare Größenordnung zusammenzufassen. Bei der Aggregation der Daten zu wenigen Sektoren sind zwei Ziele unmittelbar einsichtig:

(1) *Die Sektoren sollten möglichst realitätsnah definiert sein und „natürlichen" Wirtschaftseinheiten bzw. Produktgruppen mit gemeinsamen Merkmalen entsprechen.*

(2) *Der Informationsverlust durch die erforderliche Aggregation sollte möglichst gering sein.*

Da nicht unmittelbar klar ist, was „Information" wirklich ist oder wie man Information und somit Informationsverlust messen kann, ist das zweite Ziel eher ein kategorischer Imperativ als eine konkret durchführbare Aufgabe. Hier soll nur das erste Ziel behandelt werden, welche theoretischen Möglichkeiten es gibt, Sektoren zu bilden, wie sich die Verfahren in die Praxis umsetzen lassen, und welche Vor- und Nachteile diese Verfahren haben.

Die Sektorenbildung in der I-O-Rechnung basiert offenbar stark auf den statistischen Gegebenheiten. Es ist anhand des in fast allen Ländern vorhandenen statistischen Materials relativ einfach, zwei Arten von statistischen Einheiten zu bilden:

1. *Waren bzw. Warengruppen (Schrauben, Kraftfahrzeuge, Spielwaren)*
2. *Unternehmen, Betriebe (chemische Werke, Zechen, Bauernhöfe)*

Jede dieser Einheiten ist in einem gewissen Sinn homogen, d. h. besitzt gemeinsame Merkmale, jedoch hat keine dieser Einheiten die in den Annahmen 6.2 und 6.3 geforderten Eigenschaften gleichzeitig. Schrauben sind zwar ein sehr homogenes Gut, jedoch werden Schrauben in zahlreichen Firmen als eines unter vielen Produkten hergestellt. Das heißt, es ist kaum möglich, den Produktionssektor „Schraubenherstellung" empirisch zu ermitteln. Die Inputstruktur chemischer Werke, also der Produktionsprozess „Erzeugung chemischer Produkte" kann anhand von Bilanzen und Materialeingangsstatistiken gut ermittelt werden, jedoch werden in einem chemischen Werk eine Vielzahl unterschiedlicher Produkte hergestellt, so dass die Zuordnung der unterschiedlichen Vorlieferungen zu einzelnen Produkten schwerfällt. Die stärkere Betonung einer dieser beiden statistischen Einheiten als Basis der Tabellenerstellung unterscheidet die beiden Hauptprinzipien der Sektorenbildung: das funktionelle Prinzip und das institutionelle Prinzip.

Bei der *Sektorenbildung nach dem funktionellen Prinzip(manchmal auch funktionales Prinzip genannt)* werden die Sektoren hauptsächlich produktmäßig abgegrenzt, d. h., es werden Produkte nach festgelegten Merkmalen klassifiziert und zu möglichst homogenen Produktgruppen zusammengefasst. Als Klassifikationsmerkmale bieten sich gemeinsamer Verwendungszweck (Spielwaren), gemeinsamer Rohstoffeinsatz (Lederwaren) oder auch gleichartige Herstellungsverfahren an. Über die so definierte Zusammenfassung von Produkten zu Gruppen werden (theoretische) Sektoren gebildet, so dass jeder Sektor eine ausgewählte Produktgruppe als „Gut" herstellt.

Aufgrund des statistischen Materials ist es i. a. recht einfach festzustellen, wieviele Einheiten der Güter erzeugt und wohin diese über den Markt abgesetzt worden sind. Da die Sektorabgrenzung jedoch kaum den institutionellen Rahmenbedingungen etwa in der Industrie entspricht, ist es außerordentlich schwierig, die Inputstruktur zur Herstellung der Güter festzulegen. In einer Firma, die elektrotechnische Artikel und dabei z. B. Kühlschränke und Elektromotoren herstellt, die z. T. über dieselben Produktionsbänder laufen, ist es kaum möglich, die Inputs „Abschreibung der Anlagen“, „Management-Kosten“, „Miete für Fabrikationsräume“ oder auch „Arbeitsleistung“ verschiedenen Produkten getrennt zuzuordnen.

Die Sektorenbildung nach dem funktionellen Prinzip hat den Vorzug, dass sie den theoretischen Forderungen der Annahmen 6.2 und 6.3 hervorragend entspricht. Der Terminus „Gut des Sektors i“ hat einen realen, produktionstechnischen Inhalt, und die über Produktzusammenfassung nach gemeinsamen Merkmalen definierten Sektoren sind technisch sinnvolle Gebilde. Der entscheidende Nachteil ist jedoch, dass diese Sektoren in der Realität statistisch nicht gesichert werden können. Die Outputstruktur der Sektoren ist relativ gut zu ermitteln, jedoch macht die Inputstruktur erhebliche Probleme.

Beim *institutionellen Prinzip der Sektorenbildung* stehen die institutionell bzw. organisatorisch abgegrenzten Produktionseinheiten (Betriebe, Firmen) bei der Definition geeigneter Sektoren im Mittelpunkt. Solche institutionellen Produktionsbereiche, die eine hinreichende Anzahl gemeinsamer Merkmale aufweisen, werden zu Sektoren zusammengefasst. Als Unterscheidungsmerkmale kommen z. B. in Betracht:

- Produktion ähnlicher Güter (Fahrzeuge),
- Einsatz ähnlicher Rohstoffe (holzverarbeitende Industrie),
- Verwendung ähnlicher Produktionsverfahren (Bergbau).

Da selbst die kleinsten statistisch erfassbaren (selbst bilanzierenden) Produktionseinheiten i. a. eine recht inhomogene Produktpalette besitzen, wird als Entscheidungskriterium bei der Zuordnung zu Sektoren das *Schwerpunktprinzip* gewählt, d. h. die Produktionsbereiche werden dem Sektor zugeordnet, in dessen definitorisch abgegrenzten Rahmen der überwiegende Teil ihrer wirtschaftlichen Tätigkeit fällt. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten der Festlegung des Schwerpunkts. Zum einen kann man denjenigen Bereich wählen, in dem der meiste Umsatz erfolgt ist, zum anderen kann der Schwerpunkt nach der Anzahl der Beschäftigten bestimmt werden.

Als Bezugseinheiten werden gewöhnlich die kleinsten, statistisch erfassbaren, institutionellen Produktionseinheiten gewählt, da es wahrscheinlicher ist, dass die Produktpalette eines kleinen Betriebsteils homogener ist als die eines Großkonzerns. Soweit wie möglich wird versucht, die Konzerne, Unternehmen, Betriebe oder Betriebsteile so zu zerlegen, dass sie einheitlichen Produktgruppen zugeordnet werden können.

Der Vorteil des institutionellen Prinzips der Sektorenbildung liegt im guten Zugang zu Daten, die die Inputseite eines Sektors beschreiben. Aus Bilanzen, Gewinn- und Verlustrechnungen, Materialeingangserhebungen und anderen statistischen Aufstellungen lässt sich vielfach herauslesen, welche und wieviele Güter von welchen anderen Sektoren während eines Kalenderjahres bezogen worden sind; und die Feststellung der Verwendung der Güter ist nicht schwieriger als beim funktionellen Prinzip.

Der Hauptnachteil liegt darin, dass diese Aufstellungspraxis den Forderungen 6.2 und 6.3 wenig entspricht. Zwar entsprechen bei der institutionellen Gliederung die Sektoren realen Wirtschaftsbereichen, jedoch erzeugt jeder Sektor viele, durchaus verschiedene reale Güter, und viele gleichartige Güter (z. B. Maschinen) werden in mehreren Produktionssektoren gleichzeitig erzeugt.

Keines der beiden hier dargestellten Prinzipien der Sektorabgrenzung hat alle Vorteile auf seiner Seite.

Dem funktionellen Prinzip gebührt sicherlich der theoretische Vorzug, da es die Forderungen 6.2 und 6.3 annähernd erfüllt. Es führt durch die definitorisch gewährleistete Homogenität der Güter und die daraus abgeleiteten Produktionssektoren zu Verflechtungsbeziehungen, die technisch gut interpretierbar sind und produktionstechnologisch Sinn ergeben. Zwischen Sektoren und ihren Gütern besteht eine technische Verbindung, was beim institutionellen Prinzip nur in geringem Umfang der Fall ist.

Die Vorteile des institutionellen Prinzips liegen hauptsächlich auf der Datenseite. Die meisten Aufstellungen von Marktverflechtungen auf Unternehmensbasis können ohne große Zurechnungsprobleme in die I-O-Tabelle übernommen werden. Die auf dieser Basis erstellten Tabellen sind nicht wie beim funktionellen Prinzip als *Matrizen der Produktionsverflechtungen*, sondern eher als *Matrizen der Marktverflechtungen* zu interpretieren. Da in fast allen Ländern Statistiken auf Unternehmens- und nicht auf Produktbasis erstellt werden und die Arbeit der Aufstellung durch Verwendung dieser Daten erheblich verringert wird, wird i. a. auf den Vorteil der Güterhomogenität verzichtet und der Tabellenaufstellung nach dem institutionellen Prinzip der Vorzug gegeben.

Gewöhnlich wird das institutionelle Verfahren jedoch nicht in reiner Form angewendet, sondern es werden beide Aufstellungsarten gemischt, da manche Wirtschaftsbereiche (Bergbau, Landwirtschaft) besser auf Produktbasis abzugrenzen sind.

Ein großes theoretisches Problem, zu dem schon sehr viele Lösungsvorschläge gemacht worden sind, ist die *Verbuchung von Koppelprodukten.* Dies sind Güter, die bei einem technischen Prozess gleichzeitig erzeugt werden, wobei man bei der Herstellung eines dieser Güter die anderen aufgrund technischer Gegebenheiten automatisch miterzeugt. Will man z. B. aus Rohöl Benzin herstellen, so fallen bei dem so genannten Crack-Prozess Schweröl und Leichtöl in relativ fest vorgegebenen Anteilen gleichzeitig mit an. Die alleinige Herstellung von Benzin aus Rohöl ist technisch nicht möglich. Die Herstellung von Schweröl und Leichtöl ist also an die Benzinerzeugung gekoppelt. Wie verbucht man nun aber die Kosten der Benzin-, Rohöl- und Leichtölherstellung, wenn eigentlich nur die Benzinherstellung gewünscht war, aber gleichzeitig andere Produkte als „Abfall", der jedoch weiter verwendet werden kann, erzeugt werden? Das Problem der Verbuchung von Koppelprodukten tritt nur beim funktionellen Abgrenzungsprinzip auf und erfordert zu einer angemessenen Lösung erheblichen statistischen Aufwand.

Eine allgemeine Antwort auf die Frage, welches der beiden Prinzipien der Sektorenbildung beim praktischen Einsatz das bessere ist, kann jedoch nicht gegeben werden und hängt wesentlich vom verfügbaren Ausgangsmaterial ab.

Ein weiteres, wichtiges Problem, das wir bereits angesprochen haben, ist die Frage, welcher *Zeitpunkt zur Erfassung einer Transaktion* gewählt werden sollte. Denkbar wären z. B.:

- Zeitpunkt der Entstehung einer Forderung bzw. Verbindlichkeit
- Zeitpunkt des Einsatzes eines Gutes im Produktionsprozess,
- Zeitpunkt des Zahlungsvorganges.

Es leuchtet ein, dass die dritte Möglichkeit nicht sonderlich sinnvoll ist, weil die Zahlungsvorgänge und die uns interessierenden Produktionsvorgänge aufgrund finanztechnischer Überlegungen häufig weit auseinanderfallen. Darüberhinaus könnte durch konjunkturbedingte Zahlungsschwierigkeiten und dadurch notwendige Forderungsverzichte die wahre Struktur der Güterverflechtung verzerrt werden.

Falls zur Aufstellung der I-O-Tabelle das funktionelle Prinzip verwendet werden soll, bietet sich das zweite Verfahren an, da hierdurch die technischen Vorgänge am besten wiedergegeben werden. Jedoch dürfte eine genaue Ermittlung des Zeitpunktes, an dem ein Gut im Produktionsprozess eingesetzt wurde, einige Schwierigkeiten mit sich bringen, da hierüber nur wenige statistische Originärdaten erhältlich sind.

Für die Aufstellung der I-O-Tabelle nach dem institutionellen Prinzip eignet sich die Buchung nach der ersten Methode am besten, weil durch sie ein realistisches Abbild der tatsächlichen Marktverflechtungen gewonnen werden kann. Hinzu kommt, dass in der volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung ebenfalls nach dieser Technik verfahren wird, wodurch zumindest auf der Seite der zeitlichen Erfassung der Transaktionen Vergleichbarkeit mit der VGR gewährleistet ist. Aufgrund dieser Vorteile und der guten Verfügbarkeit von Daten diesen Typs werden Transaktionen bei der Mehrzahl der I-O-Tabellen bei der Entstehung von Forderungen bzw. Verbindlichkeiten erfasst.

In Abschnitt 6.1 hatten wir uns überlegt, dass aus praktischen Erwägungen bei der Aufstellung von I-O-Tabellen allein Geldeinheiten zur Messung von Liefer- und Bezugsströmen in Frage kommen. Das heißt, die quantitative Erfassung von Gütern erfolgt nicht in „natürlichen“ technischen Einheiten, sondern in Preisen. Zur Bestimmung von Preisen stehen zwei (reine) Systeme zur Verfügung, nämlich:

- *Produzentenpreissystem*,
- *Käuferpreissystem*,

sowie Mischungen bzw. Modifikationen beider Preissysteme.

Bei beiden Preissystemen wird davon ausgegangen, dass Lieferungen direkt vom Verkäufer zum Käufer erfolgen und dass die Verteilungsleistungen (Handel, Transport, Transportversicherungen) gesondert erfasst werden.

Der Sinn dieser Annahme ist unmittelbar einleuchtend. Da fast alle Waren irgendeine Form des Handels durchlaufen bzw. transportiert werden, gäbe es bei einer anderen Verbuchung nur Lieferungen von produzierenden Sektoren an Handel- oder Transportsektoren und von diesen wiederum an andere Sektoren. Der Sinn der I-O-Tabelle, Verflechtungsstrukturen deutlich zu machen, wäre somit hinfällig.

Beim Produzentenpreissystem werden die Handelszuschläge und Transportkosten dem Käufer zugerechnet. Er ist also der Bezieher der Handels- und Transportleistungen, während beim Käuferpreissystem die Verteilungszuschläge beim Verkäufer verbucht werden. Der *Produzentenpreis* enthält alle Vorleistungen und primären Inputs, der *Käuferpreis* umfasst zusätzlich noch die Verteilungskosten.

Der Käuferpreis hat den Vorteil, dass er vielfach dem tatsächlich gezahlten Preis entspricht, was die Verbuchungen erleichtert, und hat den Nachteil, dass für gleiche Produkte aufgrund z. B. längerer Transportwege in verschiedenen Sektoren unterschiedliche Preise bezahlt werden. Beim Produzentenpreissystem zahlen alle Abnehmer den gleichen Preis für das gleiche Produkt, was sicherlich ein theoretisch erstrebenswertes Ziel ist und die später noch zu behandelnde Deflationierung vereinfacht. Probleme ergeben sich jedoch auf der empirisch-statistischen Seite, da statistischen Aufstellungen meistens Käuferpreise zugrunde liegen und daraus über (recht schwierige) Schätzungen die Produzentenpreise ermittelt werden müssen.

In der Praxis – speziell bei der Verwendung des institutionellen Prinzips der Sektorenbildung – werden i. a. alle Transaktionen mit dem *tatsächlich gezahlten Preis* bewertet. Falls die Transaktion über den Handel stattgefunden hat, wird der Preis fiktiv in die beiden Bestandteile *Güterwert* und *Handelszuschlag* zerlegt. Transportkosten werden aus dem tatsächlich gezahlten Preis nicht herausgerechnet, sondern bei dem Sektor verbucht, der sie effektiv bezogen hat.

Ein zusätzliches Problem entsteht dadurch, dass indirekte Steuern berücksichtigt werden müssen; diese sind im Käuferpreis und tatsächlich gezahlten Preis enthalten, aber nicht im Produzentenpreis. Dies ist wiederum ein theoretischer Vorteil des Produzentenpreissystems, der praktisch jedoch kaum realisiert werden kann, da die im Preis eines Produktes enthaltenen indirekten Steuern kaum ermittelt werden können. Eine Ersatzlösung ist die Rechnung in Produzentenpreisen einschließlich indirekter Steuern, in den sogenannten *Ab-Werk-Preisen.*

Welches dieser Preissysteme verwendet werden sollte, lässt sich im allgemeinen Fall kaum beurteilen; in jedem Einzelfall muss die Entscheidung unter Berücksichtigung des vorhandenen statistischen Materials getroffen werden.

Bisher haben wir immer unterstellt, dass die Lieferströme in I-O-Tabellen in laufenden Preisen gemessen werden (solche Tabellen heißen *nominale I-O-Tabellen*), jedoch ist es für Vergleichszwecke außerordentlich wichtig zu wissen, wie sich die Wirtschaftsverflechtungen entwickelt haben, wenn die durch die Inflation induzierten Änderungen unberücksichtigt gelassen werden. Hierzu ist es notwendig, in den I-O-Tabellen eine *Preisbereinigung* vorzunehmen, um sogenannte *reale I-O-Tabellen* aufstellen zu können, deren Preise auf die Preise eines gewissen Basisjahres bezogen sind.

Die theoretisch beste Methode der Deflationierung ist die *felderweise Preisbereinigung*, weil durch sie die wegen der meist heterogenen Zusammensetzung der Waren- und Dienstleistungsströme (speziell bei der institutionellen Sektorengliederung) sich häufig unterschiedlich entwickelnden Preisindizes berücksichtigt werden können. In der Praxis stehen allerdings Daten zur Berechnung solcher Preisindizes selten zur Verfügung.

Eine *spaltenweise Preisbereinigung* erscheint insbesondere bei den Vorlieferungen wenig sinnvoll, da es recht unwahrscheinlich ist, dass ein gleicher Inflationstrend bei allen verschiedenen Lieferungen an einen Sektor vorliegt. Es ist bei funktioneller Sektorengliederung, aber auch trotz der Heterogenität der Produktpalette bei institutioneller Gliederung vernünftig anzunehmen, dass der Preis des Gutes eines Sektors aufgrund erhöhter Kosten im Vergleich zum Basisjahr gleichmäßig angehoben wurde und der Preis nicht nach belieferten Sektoren diversifiziert wurde. Wenn aufgrund der Datenlage eine felderweise Preisbereinigung nicht möglich ist, ist auf jeden Fall einer *zeilenweisen Preisbereinigung* gegenüber einer spaltenweisen Deflationierung der Vorzug zu geben, das heißt, es muss für jede Zeile der I-O-Tabelle ein Preisindex berechnet werden, der die auf Inflation beruhende Preiserhöhung der Güter des betreffenden Sektors widerspiegelt. Die reale Input-Output-Tabelle ergibt sich aus der nominalen I-O-Tabelle dadurch, dass alle Elemente einer Zeile mit dem Zeilenpreisindex multipliziert werden bzw. bei elementweiser Preisbereinigung durch Mulitplikation jedes Tabellenelements mit seinem Preisindex.

6.3 Definition der Wirtschaftssektoren

In Abschnitt 6.2 haben wir ausführlich behandelt, welche Möglichkeiten es gibt, die Wirtschaft in verschiedene Sektoren aufzuteilen, und welche theoretischen und praktischen Probleme die unterschiedlichen Prinzipien der Sektorenbildung mit sich bringen. Bei allen Methoden gibt es aufgrund wirtschaftlicher Sachverhalte einen Katalog ähnlicher Abgrenzungsschwierigkeiten, aber es gibt auch ökonomisch begründete Definitionskriterien, die unabhängig von dem gewählten Prinzip beachtet werden müssen. So ist es beispielsweise nicht möglich, eine Gliederung zu entwerfen, so dass jedes Wirtschaftssubjekt in genau einer Sektorenkategorie oder gar in genau einem Sektor enthalten ist. Ein und dieselbe ökonomische Einheit kann durchaus als Lieferant von Primärinput, als Produzent und als Konsument auftreten.

Zunächst wollen wir mögliche Einteilungen der Wirtschaft eines Landes in produzierende Sektoren behandeln. Die *Produktionssektoren* lassen sich in drei Typen gliedern:

- *warenproduzierende Sektoren*,
- *Verteilungssektoren*,
- *andere Produktionssektoren*.

Zu den *warenproduzierenden Sektoren* gehören im allgemeinen

- *Landwirtschaft*,
- *Energiewirtschaft*,
- *Bergbau*,
- *verarbeitendes Gewerbe*,
- *Bauwirtschaft*.

Wie weit diese Wirtschaftsbereiche weiter untergliedert werden, hängt von den Zielsetzungen und dem Datenmaterial ab; i. a. wird speziell das verarbeitende Gewerbe sehr stark disaggregiert.

Zu den *Verteilungssektoren* zählen

- *Handel*,
- *Verkehr*.

Der Sektor *Verkehr* kann nach verschiedenen Verkehrsträgern, wie Schifffahrt, Luftverkehr etc. aufgegliedert werden. Beim *Handel* lassen sich z. B. Groß- und Einzelhandel unterscheiden. Wie wir bereits in Abschnitt 6.2 dargestellt haben, wird der Handel nur mit seiner Transitfunktion erfasst, um die intermediären Verflechtungen nicht zu verschütten. Der Output der Handelssektoren ist damit definitorisch durch die Brutto-Handelsspanne erklärt. Als Input werden nur Lieferungen verbucht, die zur Erbringung der Handelstätigkeit erforderlich sind. Beim funktionellen Abgrenzungsprinzip müssen zum Handelssektor noch die von anderen Sektoren erbrachten Handelsleistungen hinzugerechnet werden, beim institutionellen Verfahren werden diese aufgrund des Schwerpunktprinzips dort verbucht. Die Verkehrssektoren werden analog zu den Handelssektoren (mit den gleichen Abgrenzungsschwierigkeiten) nur mit ihrer Transitfunktion erfasst.

Zu den *übrigen Produktionssektoren* zählen im wesentlichen die Dienstleistungsbereiche wie

- *Banken*,
- *Versicherungen*,
- *Gaststätten und Beherbergungsgewerbe*,

- *Wohnungsvermietung*,
- *Nachrichtenübermittlung*

und manchmal auch die Sektoren

- *Staat*,
- *private Haushalte*,
- *private Organisationen ohne Erwerbscharakter*.

Der Output der Banken wird gemessen durch die Summe der vereinnahmten Gebühren und der Differenz zwischen Soll- und Habenzinsen, analog die Leistungen der *Versicherungen* durch direkt erhobene Gebühren bzw. durch die in den Prämien enthaltenen Verwaltungskosten. Der Sektor *Nachrichtenübermittlung* war in vielen Ländern über lange Jahre mit der Post identisch. In der gesamten Welt ist die Post in den letzten Jahren aufgespalten worden in Telekommunikation-, Logistik- und andere Firmen. Gerade durch die Entstehung neuer Firmen im Telekommunikationsbereich ist in diesem Marktsegment eine neue Dynamik entstanden, die auch zu Datenerfassungs- und Abgrenzungsproblemen führt. Der Sektor Nachrichtenübermittlung wird gelegentlich auch den Verkehrssektoren zugeschlagen.

Ein besonderes Problem, das auf verschiedene Arten gelöst werden kann, stellt die *Verbuchung des Staates* dar; dieser kann nur als Endnachfragesektor, aber auch als Produktions- und Endnachfragesektor erfasst werden.

Wird der Staat auch als Produktionssektor angesehen, so werden in der Matrix der Vorleistungsverflechtungen in der Spalte „Staat“ alle Bezüge des Staates von produzierenden Sektoren verbucht, in der Matrix der Primärinputs seine Beiträge zum Bruttoinlandsprodukt (im wesentlichen Gehälter und Löhne). In der Zeile „Staat“ werden die Verkäufe des Staates an produzierende Sektoren erfasst. Hier handelt es sich hauptsächlich um Einnahmen aus Gebühren. Der Schnittpunkt der Zeile „Staat“ (prod. Sektor) mit dem Endnachfragesektor „Staatsverbrauch“ enthält den größten Posten, den sogenannten *Eigenverbrauch des Staates*. Dieser ist definiert als Differenz zwischen Spaltensumme der Spalte „Staat“ und den zurechenbaren Lieferungen des Staates an andere Sektoren. Der Eigenverbrauch des Staates wird interpretiert als der Wert der Güter, die der Staat der Allgemeinheit kostenlos bzw. ohne spezielle Gebühr zur Verfügung stellt (Schulen, Universitäten, Polizei, Katastrophen-, Küsten-, Wasserschutz, etc.). Hier sei auch darauf hingewiesen, dass alle Käufe des Staates an Waffen und militärischen Anlagen (in der Regel) als Staatskonsum aufgefasst werden.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, den Teil der Spalte „Staat“, der sich in der Matrix der Vorleistungsverflechtungen befindet, in die Spalte „Staatsverbrauch“ der Endnachfragematrix umzubuchen, d. h., dass der Staat nur als Vorlieferant auftritt, aber nicht als Produzent.

Will man den Staat nicht als Produktionssektor erfassen, so kann man die Zeile und Spalte „Staat“ in der Matrix der Vorleistungsverflechtungen nur mit Nullen belegen und alle Bezüge des Staates als Endnachfragesektor verbuchen, sowie die Lieferungen des Staates (Gebühren) als Primärinput. Andererseits kann man die Bezüge und Lieferungen saldieren und diese als Endnachfrage „Staatsverbrauch“ verbuchen. Die Zeile und Spalte „Staat“ völlig entfallen zu lassen und den Staat nur in der Endnachfrage zu behandeln, wirft Probleme bei der Kompatibilität mit der volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung auf, da dann die Löhne und Gehälter von Staatsbediensteten (eine nicht geringe Größe) im 4. Quadranten verbucht werden müssten. Diese Buchungstechnik empfiehlt sich nicht.

Darüber hinaus ist es häufig angebracht, den Staat als Produktionssektor oder als Endnachfragesektor weiter zu untergliedern; als „natürliche“ Teilbereiche bieten sich an:

- *Bund*,
- *Länder*,
- *Gemeinden*,
- *Sozialversicherung*,
- *Militär*,

wobei in der Endnachfrage noch nach Konsum und Investitionen unterschieden werden sollte.

Unter dem Begriff *private Organisationen ohne Erwerbscharakter* fasst man solche Wirtschaftseinheiten zusammen, deren Hauptziel nicht die Erzielung von Gewinn ist und die ihre wirtschaftliche Tätigkeit in der Hauptsache aus Beiträgen und Spenden privater Haushalte finanzieren. Manche dieser Organisationen ohne Erwerbscharakter erzielen auch Einnahmen durch Dienstleistungen und den Verkauf von Publikationen. Dieser Sektor enthält Organisationen wie Kirchen, Parteien, Gewerkschaften, Sportvereine etc. Der Sektor „Private Organisationen ohne Erwerbscharakter“ wird häufig mit den Sektoren „Private Haushalte“ oder „Sonstige Dienstleistungen“ zusammengefasst.

In manchen Fällen tritt ein weiterer Sektor, der sogenannte *Scheinsektor*, auf, der zur Verbuchung von Koppelprodukten bzw. Produkten, die anderweitig nicht zugeordnet werden können, dient.

Zur besseren Interpretierbarkeit der I-O-Matrizen sollte die Aufstellung eines solchen Sektors vermieden werden, was z. B. durch Verteilung der Größen auf die anderen Sektoren mit mathematisch statistischen Mitteln möglich ist.

In der *Endnachfrage* werden alle diejenigen Güter erfasst, die im Rahmen der betrachteten Volkswirtschaft nicht mehr weiterverarbeitet werden. Zur Endnachfrage zählen:

- *Konsum*,
- *Investitionen*,
- *Außenhandel*.

Der Konsum kann unterteilt werden in die zwei Bereiche:

- *privater Verbrauch*,
- *staatlicher Verbrauch*.

Die verschiedenen Möglichkeiten zur Definition des staatlichen Verbrauchs haben wir bereits eingehend diskutiert. Der *Privatverbrauch* kann nach dem Inländer- oder dem Inlandskonzept erfasst werden. Nach dem *Inlandskonzept* umfasst er alle Käufe privater Haushalte (inländischer und ausländischer), die im Inland getätigt werden (territoriales Konzept), beim *Inländerkonzept* werden davon die Käufe ausländischer Privathaushalte im Inland abgezogen und die Käufe inländischer Privathaushalte im Ausland hinzugerechnet. Zum Privatverbrauch wird auch der Eigenverbrauch der privaten Organisationen ohne Erwerbscharakter gerechnet.

Bei den *Investitionen* werden unterschieden:

- *Anlageinvestitionen*,
- *Vorratsinvestitionen*.

Im Sektor *Anlageinvestitionen* werden diejenigen Güterlieferungen verbucht, die dem Produktionskapital des produzierenden Sektors hinzugefügt und nicht bei der Produktion von Gütern als Vorleistungen eingesetzt wurden.

Für manche Fragestellungen ist es nicht nur interessant zu wissen, dass Güter eines Sektors investiert wurden, sondern auch, in welchem Produktionssektor die Investition vorgenommen wurde. Dazu kann, falls Daten erhältlich sind, der n-Vektor Anlageinvestitionen in eine (n, n)-*Investitionsmatrix* disaggregiert werden.

Im Sektor *Vorratsinvestitionen* werden die in einem Kalenderjahr erfolgten Vorratsveränderungen aufgenommen. Diese umfassen die Output-Vorratsveränderungen (halbfertige, nicht verkaufte eigene Erzeugnisse) und Inputvorratsveränderungen (Rohstoffe, Betriebsmittel), obwohl diese zum Teil auch als Sektor der Primärinputs erfasst werden. Die Investitionen können ebenfalls nach staatlichen und privaten unterschieden werden.

Der Außenhandel gliedert sich in zwei Bereiche

- *Export*,
- *Import*.

Der Endnachfragesektor *Export* enthält alle Lieferungen von produzierenden Sektoren an das Ausland (übrige Welt), welches vermittels Inlands- bzw. Inländerkonzept abgegrenzt wird. Der n-Vektor Export wird häufig bei Ländern mit hohem Ausfuhranteil zu einer *Exportmatrix* nach wichtigen Ländern erweitert, um den territorialen Verbleib der ausgeführten Güter feststellen zu können.

Der zweite Außenhandelssektor „*Importe*“ kann als Endnachfragesektor verbucht werden, dann aber müssen die Importe mit negativem Vorzeichen versehen werden, um die Bilanzgleichung (in jedem Sektor ist Input gleich Output) zu erhalten; ebenso kann ein Außenhandelssektor „Exporte minus Importe“ als Endnachfragesektor nachgewiesen werden. Eine zweite Möglichkeit, die in den meisten Fällen angewendet wird, besteht darin, die Importe als Sektor der primären Inputs zu erfassen.

Zu den primären Inputs werden gerechnet:

- *Abschreibungen*,
- *indirekte Steuern minus Subventionen*,
- *Bruttoeinkommen aus unselbständiger Arbeit*,
- *Bruttoeinkommen aus Unternehmertätigkeit und Vermögen*,

sowie gelegentlich

- *Importe*,
- *Input-Vorratsveränderungen*.

Die verschiedenen Möglichkeiten der Verbuchung von *Importen* und *Input-Vorratsveränderungen* haben wir bereits im Abschnitt über Endnachfragesektoren behandelt. Die Importe können als eine Zeile in der Primärinputmatrix erscheinen, d. h. bei jedem Sektor wird der Wert aller von ihm bezogenen importierten Waren verbucht, und zwar unabhängig von der Art dieser Güter. Man kann jedoch auch die Importe in einer (n, n)-*Importmatrix* erfassen, die dann Auskunft über die importierte Güterart gibt (z. B. Importe des Sektors Energieerzeugung an Rohöl), was speziell bei der Untersuchung von Abhängigkeiten von gewissen importierten Gütern wichtig ist.

In den *Abschreibungen* wird die Abnutzung des Produktionskapitals gemessen. Im Gegensatz zur betriebswirtschaftlichen Praxis wird die Abschreibung zu Wiederbeschaffungswerten und nicht zu Anschaffungswerten vorgenommen.

Die *indirekten Steuern* sind Kostensteuern, die von den Unternehmen gezahlt werden und bei der Gewinnermittlung wie Kosten abgezogen werden können. Zu ihnen gehören z. B. die Umsatzsteuer, von Unternehmen gezahlte Kfz-Steuer, Mineralölsteuer, Salzsteuer, Getränkesteuer. Zölle und Abgaben auf Einfuhren werden ebenfalls als indirekte Steuern erfasst.

Subventionen haben gerade den umgekehrten Effekt wie indirekte Steuern, da sie die Kosten vermindern. Sie werden nicht bei dem Sektor verbucht, der sie empfängt, sondern bei dem Sektor, der die subventionierten Güter herstellt (Dieselkraftstoffverbilligungen für Landwirtschaft, Fischerei und Schifffahrt werden beim Sektor Mineralölverarbeitung aufgeführt).

Die *Bruttoeinkommen aus unselbständiger Arbeit* umfassen Löhne, Gehälter, Arbeitgeberbeiträge zur Sozialversicherung und die freiwilligen Sozialleistungen sowie sonstige Lohnnebenkosten, falls diese nachweisbar sind und zugerechnet werden können.

Zu den *Bruttoeinkommen aus Unternehmertätigkeit* zählen Gewinne, Mieten und Zinsen. Diese Einkommen werden bei dem Sektor verbucht, der die Zahlungen erbringt und nicht bei demjenigen, der sie erhält (Eigentümer).

Die hier dargestellten Möglichkeiten der Abgrenzung von Sektoren sind nicht ganz vollständig, da in der Praxis gelegentlich andere Gliederungen gewählt worden sind. Dennoch sind hier die wichtigsten Probleme und Lösungsvorschläge angesprochen worden; insbesondere sind alle Verbuchungstechniken diskutiert worden, die bei I-O-Matrizen für die Bundesrepublik Deutschland verwendet worden sind.

6.4 Daten zur Erstellung von Input-Output-Tabellen

Natürlich sind der Erstellung von I-O-Tabellen Grenzen gesetzt durch die Verfügbarkeit von Daten. Je größer die Tabellen werden sollen, desto bessere Statistiken sind erforderlich. Da aus Kostengründen kaum jemals statistische Primärerhebungen zur Aufstellung von I-O-Tabellen gemacht werden dürften, ist man darauf angewiesen, die für I-O-Tabellen benötigten Daten aus anderen Statistiken „herauszurechnen".

Die bisher erstellten nationalen und regionalen I-O-Matrizen konnten im wesentlichen durch Auswertung der folgenden Informationsquellen gewonnen werden.

1. *Amtliche Statistiken*,
2. *Statistiken und Informationen von Wirtschaftsverbänden*,
3. *Informationen von Unternehmen*,
4. *Expertenbefragung*,
5. *wissenschaftliche Untersuchungen und Fachliteratur*,
6. *eigene Erhebungen oder Schätzungen*,
7. *Analogiematerial*.

Die ergiebigste Informationsquelle ist wohl die amtliche Statistik, die in der Hauptsache vom Statistischen Bundesamt und den Statistischen Landesämtern aufgestellt wird. Von großer Bedeutung für die Erstellung globaler I-O-Matrizen ist die Industriestatistik, die eine starke Untergliederung des verarbeitenden Gewerbes ermöglicht. Darüber hinaus veröffentlicht das Statistische Bundesamt laufend Statistiken und Sondererhebungen, etwa den monatlichen Industriebericht, die vierteljährliche Produktionserhebung und Fachstatistiken für verschiedene Industriezweige. Zu den verwertbaren Sondererhebungen zählen Untersuchungen über die Kostenstruktur der Industrie, die Jahreserhebung über die Nettoleistung in der Industrie, der Industriezensus sowie Statistiken von Fachministerien und der Deutschen Bundesbank. Zur Bestimmung der Endnachfrage liefert das Statistische Bundesamt Material durch die seit 1964 jährlich durchgeführte Erhebung über Investitionen in größeren Unternehmen und Betrieben der Industrie des produzierenden

Handwerks, des Bauhauptgewerbes und der öffentlichen Energie- und Wasserversorgung. Eine Fachserie ist dem Außenhandel gewidmet; hier wird unter anderem der grenzüberschreitende Handel nach Mengen und Wert und nach Warengruppen gegliedert ausgewiesen.

Nicht alle diese Statistiken sind ohne weiteres für die Aufstellung von allgemeinen I-O-Tabellen geeignet, da sie in der Regel nicht speziell für I-O-Untersuchungen, sondern für andere Zwecke erhoben werden.

Auskünfte und Statistiken von Wirtschaftsorganisationen haben den Vorteil der engen Begrenzung und Spezialisierung. Sie sind jedoch von unterschiedlicher Aussagekraft, da ihre Daten auf freiwilligen Angaben ihrer Mitglieder beruhen und manche Firmen aufgrund starken Konkurrenzdrucks keine oder nur ungenaue Daten an die zuständigen Organisationen und Verbünde liefern. Darüber hinaus kann jedoch die Branchenkenntnis der in den Wirtschaftsverbänden beschäftigten Statistiker hilfreich sein, um die Plausibilität selbst erhobener Daten zu überprüfen.

Auskünfte von für Subsektoren typischen Unternehmen sowie Expertenmeinungen können für die Ermittlung von Verflechtungsstrukturen sehr wertvoll sein. Sie können Richtgrößen liefern, die zur Überprüfung anders gewonnener Daten dienen. Natürlich reicht das Spektrum dieser Auskünfte von fundierten Schätzungen bis zu subjektiven Vermutungen, jedoch sind Felderwerte, die aus keinerlei statistischem Material ableitbar sind, kaum auf andere Weise zu erheben.

Gelegentlich werden von wissenschaftlichen Instituten wie dem Deutschen Institut für Wirtschaftsforschung (DIW), Berlin, dem Rheinisch-Westfälischen Institut für Wirtschaftsforschung (RWI), Essen, dem Ifo-Institut für Wirtschaftsforschung, München oder von Forschungsgruppen an Universitäten Spezialuntersuchungen vorgelegt, die auf Fachtagungen vorgetragen oder in wissenschaftlichen Fachzeitschriften veröffentlicht werden.

Eine Möglichkeit, die stets vorhandenen Lücken in einer Verflechtungsmatrix statistisch zu schließen, sind natürlich eigene Erhebungen. Solche Vorhaben sind jedoch außerordentlich zeit- und kostenaufwendig und können fast nur von statistischen Ämtern durchgeführt werden. Deshalb wird bei Institutionen, die I-O-Tabellen aufstellen, von Primärerhebungen nur selten Gebrauch gemacht.

6.5 Erstellung von Input-Output-Tabellen in der Praxis

Ist man mit genügend Datenmaterial versorgt, (siehe Abschnitt 6.4), so bestehen drei Möglichkeiten zur Aufstellung der I-O-Tabelle:

- **(a)** Input-Methode
- **(b)** Output-Methode
- **(c)** Kombination beider Methoden

Die *Input-Methode*(a) bietet sich an, wenn das Datenmaterial über die Kosten- oder Vorleistungsstruktur der einzelnen Sektoren besser ist, als das über die Verteilungsstruktur der Produkte. Die I-O-Tabelle wird spaltenweise erstellt, indem für jeden einzelnen Produktions- bzw. Endnachfragesektor die Bezüge von den anderen Sektoren und Subsektoren ermittelt werden. Dies geschieht gewöhnlich durch Festlegung der relativen Anteile der Vorlieferungen. Die Felder einer Spalte werden dann durch Verteilung des (aus anderen Daten ermittelten) Bruttoproduktionswertes dem relativen Anteil gemäß belegt.

Bei der *Output-Methode* (b) wird dagegen die Tabellenerstellung zeilenweise vorgenommen. Dabei wird der Output eines Produktions- oder Primärsektors auf die jeweiligen Bezieher (Produktions- oder Endnachfragesektoren) aufgeteilt.

Während die Input-Methode detaillierte Kostenstrukturkenntnisse voraussetzt, erfordert die Output-Methode Statistiken über die Verteilungsstruktur der einzelnen Sektoren. Obwohl beide Methoden theoretisch dieselbe I-O-Tabellen liefern müssten, werden sie in der Praxis aufgrund ungenügenden Datenmaterials nie übereinstimmen. Es wäre daher wünschenswert, eine Kombination beider Methoden (c) durchzuführen, um unstimmige Tabellenteile abzugleichen oder fehlende Felderwerte konsistent zu ergänzen. Aus statistischen Gründen ist diese Methode jedoch selten durchführbar, so dass im allgemeinen gewisse Tabellenteile nach der Input-, andere nach der Output-Methode erstellt werden, wobei jedoch aufgrund der Tabellenkonzeption meistens auf einer Methode der Schwerpunkt liegt.

Die Matrix der Vorleistungsverflechtungen der für das Jahr 1954 vom DIW aufgestellten I-O-Tabellen wurde hauptsächlich nach der Input-Methode erstellt, weil für sie sehr wesentlich die Resultate der Erhebung über die Nettoleistungen der Industrie im Jahre 1954 benutzt wurden. Gleichzeitig war dazu konzeptionell eine Sektorgliederung nach dem institutionellen Prinzip erforderlich, da die Daten auf Unternehmensbasis ermittelt wurden, vgl. KRENGEL, SCHINTKE et. al. (l972), siehe [12].

Hingegen ist die vom Ifo-Institut für das Jahr 1961 erstellte I-O-Tabelle überwiegend nach der Output-Methode aufgestellt worden (vgl. GELWIG (1964), siehe [7]). Ihr lag das funktionelle Prinzip der Sektorengliederung zugrunde. Es war durch sehr starke Disaggregation der Produktgruppen gelungen, einen guten Überblick über den Verbleib der einzelnen Produkte zu gewinnen.

Im allgemeinen bietet sich bei institutioneller Gliederung der Sektoren eher die Input-Methode an, bei funktioneller Gliederung wird meistens die Output-Methode bevorzugt. Für die Konsistenzprüfung ist es sehr wesentlich, dass man nach der Aufstellung der Tabelle versucht, mittels der einen Methode Teile der Tabelle nach der anderen Methode zu ermitteln, um zu sehen, ob die Größen plausibel verteilt sind, und um herauszufinden, wo noch Korrekturen erfolgen müssen, die die Matrizen konsistent machen.

Wichtige Kontrolldaten bei der Aufstellung von I-O-Tabellen sind Globalgrößen wie die Bruttoproduktionswerte, die häufig einfacher als die Tabellen selbst aus der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung ermittelt werden können. Nach den Gleichungen (6.1.5) und (6.1.6) müssen für die Produktionssektoren die Summen über die Spalten bzw. die Summen über die Zeilen gleich dem Bruttoproduktionswert des betreffenden Sektors sein. Bei Tabellenerstellungen der geschilderten Art tritt jedoch immer das Problem auf, dass diese Größen nicht übereinstimmen. Man kann diesen Fehler durch ökonomisch sinnvolle Verteilung der Differenzen mit mathematischen Methoden beheben. Speziell dann, wenn bereits eine vergleichbare Tabelle aus früheren Jahren existiert, ist es angebracht, ein auf mathematisch-statistischen Uberlegungen basierendes Ausgleichsverfahren zu wählen, da hierdurch eine gewisse Gleichmäßigkeit der Restverteilung gewährleistet wird. Wir werden hier jedoch auf diese Verfahren nicht näher eingehen.

6.6 Welche Arten von Input-Output-Tabellen gibt es?

Input-Output-Tabellen werden in großem Umfang weltweit erstellt und zur ökonomischen Analyse benutzt. AM wichtigsten sind natürlich die nationalen Tabellen. Sie werden in den meisten (industriell wichtigen) Ländern regelmäßig von Forschungsinstituten oder statistischen Ämtern erhoben.

Die wichtigsten Tabellen für Deutschland wurden (bzw. werden) vom *Deutschen Institut für Wirtschaftsförderung (DIW)* in Berlin und vom *Statistischen Bundesamt* erstellt. Das DIW hat seine nach 56 Produktionssektoren gegliederte Tabellenreihe 1954 begonnen und regelmäßig (üblicherweise alle 4 Jahre in realer und nominaler Version) fortgeschrieben. Die Veröffentlichung erfolgte in der Reihe "DIW-Beiträge zur Strukturforschung" bei Duncker & Humblot, Berlin. Die aufwendige Produktion dieser nach dem institutionellen Prinzip erstellten Reihe wurde 1986 eingestellt. Seither kommen die deutschen Tabellen vom Statistischen Bundesamt. Online (gegen eine Gebühr) erhältlich über den Statistik-Shop (http://www-ec.destatis.de) sind die Input-Output-Tabellen (nominal und real) der Jahre 1995 und 1997, jeweils in zwei Versionen, nach 59 und 71 Gütergruppen gegliedert. Der Name deutet schon an, dass hier die Erstellung nach dem funktionellen Prinzip erfolgt.

Input-Output-Tabellen werden nicht nur für Industrieländer erstellt. Auch für Entwicklungsländer wie Tansania [26] oder Ecuador wurden Tabellen erstellt. Für Städte wie Hamburg, Bundesländer wie Baden-Württemberg, siehe [18], Regionen wie Norddeutschland, siehe [22] oder gar für die ganze Welt wurden erstellt. Es gibt auch I-O-Tabellen, die die Verflechtung großer Firmen mit einer nationalen Ökonomie darstellen. Das Ende der DDR wurde gar durch die Aufstellung einer I-O-Tabelle ökonomisch dokumentiert, siehe [17]. Ganze Aufsatzsammlungen widmen sich z. B. der regionalen Input-Output-Analyse, siehe [20], oder gar unternehmensgrößenspezifischen Fragestellungen, siehe [2].

Das Internet ist wie üblich eine gute Informationsquelle, und zwar auch über die verschiedenen I-O-Aktivitäten. Eine Google-Suche nach „OECD Input-Output-Database“ (mit den Anführungszeichen) führt (das war zumindestens im Februar 2003 so) auf eine Reihe interessanter Quellen, in denen u. a. die von der OECD Statistical Commission and Economic Commission for Europe die Bemühungen beschrieben werden, die I-O-Daten zu harmonisieren. Es wird außerdem ein Überblick über die Länder gegeben, die „harmonisierte Tabellen“ erstellt haben.

6.7 Die I-O-Tabellen des DIW und des Statistischen Bundesamtes

Wir zitieren hier aus den allgemeinen Erläuterungen des Statistischen Bundesamtes zur Input-Output-Rechnung im Internet:

Input-Output-Tabellen geben einen detaillierten Einblick in die Güterströme und Produktionsverflechtungen in der Volkswirtschaft und mit der übrigen Welt. Sie dienen u.a. als Grundlage für Strukturuntersuchungen der Wirtschaft sowie für Analysen der direkten und indirekten Auswirkungen von Nachfrage-, Preis- und Lohnänderungen auf die Gesamtwirtschaft und die einzelnen Bereiche. Darüber hinaus sind sie eine vielseitig verwendbare Basis für Vorausschätzungen der wirtschaftlichen Entwicklung. Sie werden ferner für internationale Vergleiche der Produktionsstrukturen und -ergebnisse in den Volkswirtschaften verwendet.

Um einerseits den Wünschen vieler Kunden nach tieferer Untergliederung der Input-Output-Tabellen zu entsprechen und um andererseits mit anderen Ergebnissen der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen vergleichbar gegliederte Daten anzubieten, werden in der Input-Output-Rechnung zwei verschiedene Gliederungstiefen – 59 und 71 Gütergruppen bzw. Produktionsbereiche – dargestellt. Aufkommens- und Verwendungstabellen ermöglichen den Übergang von den Ergebnissen der Input-Output-Rechnung zu Ergebnissen der Inlandsproduktberechnung und umgekehrt. ... Die Abschreibungen und der Nettobetriebsüberschuss sind erstmals seit der Umstellung der Input-Output-Rechnung auf die Konzepte des Europäischen Systems Volkswirtschaftlicher Gesamtrechnungen 1995 getrennt dargestellt.

Die Konzepte und Definitionen der Input-Output-Rechnung basieren auf dem Europäischen System Volkswirtschaftlicher Gesamtrechnungen 1995. Die hier veröffentlichten Ergebnisse sind voll mit den Angaben in den jährlichen Konten und Standardtabellen der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen abgestimmt. Soziale Sachleistungen, die bisher in den Input-Output-Tabellen als Vorleistungskäufe gebucht wurden, sind nunmehr - wie auch in den übrigen Nachweisen der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen - in den Konsumausgaben des Staates enthalten.

Die Input-Output-Tabellen für inländische Produktion und Importe bzw. für die inländische Produktion und die Importmatrix zeigen das Aufkommen an Gütern und deren Verwendung nach in den Zeilen und Spalten einheitlich abgegrenzten Gütergruppen und Produktionsbereichen bzw. nach den Kategorien der letzten Verwendung. Als Darstellungseinheiten werden in den Input-Output-Tabellen nach produktionsrelevanten Merkmalen abgegrenzte "homogene Produktionseinheiten" verwendet und zu Produktionsbereichen zusammengefasst. Die Gliederung der Produktionsbereiche basiert auf der Statistischen Güterklassifikation in Verbindung mit den Wirtschaftszweigen in der Europäischen Gemeinschaft (CPA). In den Input-Output-Tabellen werden alle dargestellten Vorgänge einheitlich zu Herstellungspreisen und die Importe entsprechend zu cif-Preisen ausgewiesen.

Zu ihrer I-O-Tabelle für 1997 gibt das Statistische Bundesamt folgende Hinweise:

Hinweise

Rechenstand: Volkswirtschaftliche Gesamtrechnungen, Februar 2002.

Die Tabellen der Input-Output-Rechnung 1997 wurden auf der Grundlage zusätzlich verfügbarer statistischer Daten und aktualisierter Ergebnisse der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen neu berechnet und sind nicht mit den bisher im Statistik-Shop veröffentlichten fortgeschriebenen Ergebnissen der Input-Output-Rechnung 1995 nach 1997 vergleichbar. Abschreibungen und Nettobetriebsüberschuss nach Produktionsbereichen werden für 1997 erstmals getrennt nachgewiesen. Die Ergebnisse der Input-Output-Rechnung 1997 nach 59 Gütergruppen/Produktionsbereichen liegen bis Mitte 2002 auch als Print-Veröffentlichung vor (Hrsg.: Statistisches Bundesamt, Fachserie 18, Volkswirtschaftliche Gesamtrechnungen, Reihe 2, Input-Output-Rechnung 1997).

Wertangaben sind in Millionen Euro (Mill. EUR) dargestellt.

Das in der Bundesrepublik Deutschland verfügbare statistische Ausgangsmaterial weist für die Aufstellung von Input-Output-Tabellen für Teilbereiche erhebliche Lücken auf, die durch Schätzungen geschlossen werden mussten. Der Zuverlässigkeitsgrad der sehr detaillierten Einzelergebnisse der Input-Output-Rechnung entspricht aus diesem Grunde nicht immer dem, der sonst für Veröffentlichungen in den Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen als Maßstab zugrunde gelegt wird. Dies sollte bei der Verwendung der Ergebnisse beachtet werden.

Ergebnisse der Input-Output-Rechnung 1997 liegen auch nach 71 Gütergruppen und Produktionsbereichen gegliedert vor. Übersicht 1 zeigt die Unterschiede beider Gliederungstiefen.

Gebietsstand

Alle Angaben beziehen sich auf die Bundesrepublik Deutschland nach dem Gebietsstand seit dem 03.10.1990.

Die Gliederung der Produktionsbereiche nach 59 bzw. 71 Produktionssektoren hat das Statistische Bundesamt wie folgt vorgenommen (siehe nachfolgende 4 Tabellen):

Gliederung der Produktionsbereiche [1)]

lfd. Nr.	59 Produktionsbereiche		71 Produktionsbereiche	Vergleichbare Position der CPA[2)] bzw. der WZ 93[3)]
1	Erzeugung von Produkten der Landwirtschaft und Jagd	1	Erzeugung von Produkten der Landwirtschaft und Jagd	01
2	Erzeugung von Produkten der Forstwirtschaft	2	Erzeugung von Produkten der Forstwirtschaft	02
3	Erzeugung von Produkten der Fischerei und Fischzucht	3	Erzeugung von Produkten der Fischerei und Fischzucht	05
4	Gewinnung von Kohle und Torf	4	Gewinnung von Kohle und Torf	10
5	Gewinnung von Erdöl, Erdgas, Erbringung diesbezüglicher Dienstleistungen	5	Gewinnung von Erdöl, Erdgas, Erbringung diesbezüglicher Dienstleistungen	11
6	Gewinnung von Uran- und Thoriumerzen	6	Gewinnung von Uran- und Thoriumerzen	12
7	Gewinnung von Erzen	7	Gewinnung von Erzen	13
8	Gewinnung von Steinen und Erden, sonstigen Bergbauerzeugnissen	8	Gewinnung von Steinen und Erden, sonstigen Bergbauerzeugnissen	14
9	Herstellung von Nahrungs-, Futtermitteln und Getränken	9	Herstellung von Nahrungs- und Futtermitteln	15.1 - 15.8
		10	Herstellung von Getränken	15.9
10	Herstellung von Tabakwaren	11	Herstellung von Tabakwaren	16
11	Herstellung von Textilien	12	Herstellung von Textilien	17
12	Herstellung von Bekleidung	13	Herstellung von Bekleidung	18
13	Herstellung von Leder und Lederwaren	14	Herstellung von Leder und Lederwaren	19
14	Herstellung von Holz und Holzerzeugnissen	15	Herstellung von Holz und Holzerzeugnissen	20
15	Herstellung von Papier, Pappe und Waren daraus	16	Herstellung von Holzstoff, Zellstoff, Papier, Karton und Pappe	21.1
		17	Herstellung von Papier-, Karton- und Pappewaren	21.2
16	Herstellung von Verlags- und Druckerzeugnissen, bespielten Ton-, Bild- und Datenträgern	18	Herstellung von Verlagserzeugnissen	22.1
		19	Herstellung von Druckerzeugnissen, bespielten Ton-, Bild- und Datenträgern	22.2 - 22.3

Gliederung der Produktionsbereiche [1)]

lfd. Nr.	59 Produktionsbereiche		71 Produktionsbereiche	Vergleichbare Position der CPA[2)] bzw. der WZ 93 [3)]
17	Herstellung von Kokereierzeugnissen, Mineralölerzeugnissen, Spalt- und Brutstoffen	20	Herstellung von Kokereierzeugnissen, Mineralölerzeugnissen, Spalt- und Brutstoffen	23
18	Herstellung von chemischen Erzeugnissen	21	Herstellung von pharmazeutischen Erzeugnissen	24.4
		22	Herstellung von chemischen Erzeugnissen (oh. pharmaz. Erzeugn.)	24 (ohne 24.4)
19	Herstellung von Gummi-und Kunststoffwaren	23	Herstellung von Gummiwaren	25.1
		24	Herstellung von Kunststoffwaren	25.2
20	Herstellung von Glas, Keramik, Verarbeitung von Steinen und Erden	25	Herstellung von Glas und Glaswaren	26.1
		26	Herstellung von Keramik, Verarbeitung von Steinen und Erden	26.2 - 26.8
21	Herstellung von Metallen und Halbzeug daraus	27	Herstellung von Roheisen, Stahl, Rohren und Halbzeug daraus	27.1 - 27.3
		28	Herstellung von NE-Metallen und Halbzeug daraus	27.4
		29	Herstellung von Gießereierzeugnissen	27.5
22	Herstellung von Metallerzeugnissen	30	Herstellung von Metallerzeugnissen	28
23	Herstellung von Maschinen	31	Herstellung von Maschinen	29
24	Herstellung von Büromaschinen, Datenverarbeitungsgeräten und -einrichtungen	32	Herstellung von Büromaschinen, Datenverarbeitungsgeräten und -einrichtungen	30
25	Herstellung von Geräten der Elektrizitätserzeugung, -verteilung u.ä	33	Herstellung von Geräten der Elektrizitätserzeugung, -verteilung u.ä	31
26	Herstellung von Erzeugnissen der Rundfunk-, Fernseh- und Nachrichtentechnik	34	Herstellung von Erzeugnissen der Rundfunk-, Fernseh- und Nachrichtentechnik	32
27	Herstellung von Erzeugnissen der Medizin-, Mess-, Steuer- und Regelungstechnik	35	Herstellung von Erzeugnissen der Medizin-, Mess-, Steuer- und Regelungstechnik	33
	28 Herstellung von Kraftwagen und Kraftwagenteilen	36	Herstellung von Kraftwagen und Kraftwagenteilen	34
29	Herstellung von sonstigen Fahrzeugen (Wasser-, Schienen-, Luftfahrzeuge u.a.)	37	Herstellung von sonstigen Fahrzeugen (Wasser-, Schienen-, Luftfahrzeuge u.a.)	35

Gliederung der Produktionsbereiche[1)]

lfd. Nr.	59 Produktionsbereiche		71 Produktionsbereiche	Vergleichbare Position der CPA[2)] bzw. der WZ 93[3)]
30	Herstellung von Möbeln, Schmuck, Musikinstrumenten, Sportgeräten, Spielwaren u. ä.	38	Herstellung von Möbeln, Schmuck, Musikinstrumenten, Sportgeräten, Spielwaren u. ä.	36
31	Herstellung von Sekundärrohstoffen	39	Herstellung von Sekundärrohstoffen	37
32	Erzeugung und Verteilung von Energie (Strom, Gas)	40	Erzeugung und Verteilung von Elektrizität und Fernwärme	40.1, 40.3
		41	Erzeugung und Verteilung von Gasen	40.2
33	Gewinnung und Verteilung von Wasser	42	Gewinnung und Verteilung von Wasser	41
34	Bauarbeiten	43	Vorbereitende Baustellenarbeiten, Hoch- und Tiefbauarbeiten	45.1 - 45.2
		44	Bauinstallationsarbeiten und sonstige Bauarbeiten	45.3 - 45.5
35	Handelsleistungen mit Kfz; Reparaturen an Kfz; Tankleistungen	45	Handelsleistungen mit Kfz; Reparaturen an Kfz; Tankleistungen	50
36	Handelsvermittlungs- und Großhandelsleistungen	46	Handelsvermittlungs- und Großhandelsleistungen	51
37	Einzelhandelsleistungen; Reparaturen an Gebrauchsgütern	47	Einzelhandelsleistungen; Reparaturen an Gebrauchsgütern	52
38	Beherbergungs- und Gaststättendienstleistungen	48	Beherbergungs- und Gaststättendienstleistungen	55
39	Landverkehrs- und Transportdienstleistungen in Rohrfernleitungen	49	Eisenbahndienstleistungen	60.1
		50	Sonstige Landverkehrsleistungen, Transportleistungen in Rohrfernleitungen	60.2 - 60.3
40	Schifffahrtsleistungen	51	Schifffahrtsleistungen	61
41	Luftfahrtleistungen	52	Luftfahrtleistungen	62
42	Dienstleistungen bezüglich Hilfs- und Nebentätigkeiten für den Verkehr	53	Dienstleistungen bezüglich Hilfs- und Nebentätigkeiten für den Verkehr	63
43	Nachrichtenübermittlungsdienstleistungen	54	Nachrichtenübermittlungsdienstleistungen	64
44	Dienstleistungen der Kreditinstitute	55	Dienstleistungen der Kreditinstitute	65
45	Dienstleistungen der Versicherungen (ohne Sozialversicherung)	56	Dienstleistungen der Versicherungen (ohne Sozialversicherung)	66
46	Dienstleistungen des Kredit- und Versicherungshilfsgewerbes	57	Dienstleistungen des Kredit- und Versicherungshilfsgewerbes	67

Gliederung der Produktionsbereiche 1)

lfd. Nr.	59 Produktionsbereiche		71 Produktionsbereiche	Vergleichbare Position der CPA 2) bzw. der WZ 93 3)
47	Dienstleistungen des Grundstücks- und Wohnungswesens	58	Dienstleistungen des Grundstücks- und Wohnungswesens	70
48	Dienstleistungen der Vermietung beweglicher Sachen (ohne Personal)	59	Dienstleistungen der Vermietung beweglicher Sachen (ohne Personal)	71
49	Dienstleistungen der Datenverarbeitung und von Datenbanken	60	Dienstleistungen der Datenverarbeitung und von Datenbanken	72
50	Forschungs- und Entwicklungsleistungen	61	Forschungs- und Entwicklungsleistungen	73
51	Unternehmensbezogene Dienstleistungen	62	Unternehmensbezogene Dienstleistungen	74
52	Dienstleistungen der öffentlichen Verwaltung, Verteidigung, Sozialversicherung	63	Dienstleistungen der öffentlichen Verwaltung, Verteidigung	75.1 - 75.2
		64	Dienstleistungen der Sozialversicherung	75.3
53	Erziehungs- und Unterrichtsdienstleistungen	65	Erziehungs- und Unterrichtsdienstleistungen	80
54	Dienstleistungen des Gesundheits-, Veterinär- und Sozialwesens	66	Dienstleistungen des Gesundheits-, Veterinär- und Sozialwesens	85
55	Abwasser-, Abfallbeseitigungs- und sonstige Entsorgungsleistungen	67	Abwasser-, Abfallbeseitigungs- und sonstige Entsorgungsleistungen	90
56	Dienstleistungen von Interessenvertretungen, Kirchen u.ä.	68	Dienstleistungen von Interessenvertretungen, Kirchen u.ä.	91
57	Kultur-, Sport- u. Unterhaltungsdienstleistungen	69	Kultur-, Sport- und Unterhaltungsdienstleistungen	92
58	Sonstige Dienstleistungen	70	Sonstige Dienstleistungen	93
59	Dienstleistungen privater Haushalte	71	Dienstleistungen privater Haushalte	95

1) Die Abgrenzung der Gütergruppen entspricht derjenigen für Produktionsbereiche.

2) Statistische Güterklassifikation in Verbindung mit den Wirtschaftszweigen in der Europäischen Gemeinschaft.

3) Klassifikation der Wirtschaftszweige mit Erläuterungen - Ausgabe 1993.

Die Tabellen des DIW, erstellt nach dem institutionellen Prinzip, unterscheiden sich durchaus von denen des Statistischen Bundesamtes. Der Produktionsbereich ist in 56 Sektoren gegliedert (siehe Übersicht 1, Systematik der Produktionssektoren), siehe z. B. Stäglin & Wessels (1969), [27].

Übersicht 1

Systematik der Produktionssektoren

Nummer	Bezeichnung
1	Land- und Forstwirtschaft, Fischerei
2	Elektrizitätswirtschaft
3	Gas- und Wasserwirtschaft
4	Kohlenbergbau
5	Eisenerzbergbau
6	Kali- und Steinsalzbergbau
7	Erdölgewinnung
8	Restlicher Bergbau
9	Industrie der Steine und Erden
10	Eisen schaffende Industrie
11	Eisen-, Stahl- und Tempergießereien
12	Ziehereien und Kaltwalzwerke
13	NE-Metallindustrie
14	Chemische Industrie
15	Mineralölverarbeitung
16	Kautschuk und Asbest verarbeitende Industrie
17	Sägewerke und Holzbearbeitung
18	Zellstoff und Papiererzeugung
19	Stahlbau
20	Maschinenbau
21	Straßenfahrzeugbau
22	Luftfahrzeugbau
23	Schiffbau
24	Elektrotechnische Industrie
25	Feinmechanische und optische Industrie (einschließlich Uhrenindustrie)
26	Stahlverformung
27	EBM-Industrie
28	Feinkeramische Industrie
29	Glasindustrie
30	Holzverarbeitende Industrie
31	Musikinstrumente-, Spielwaren-, Schmuckwaren- und Sportgeräte-Industrie
32	Papier und Pappe verarbeitende Industrie
33	Druckerei- und Vervielfältigungs-Industrie
34	Kunststoffverarbeitende Industrie
35	Lederindustrie
36	Textilindustrie
37	Bekleidungsindustrie
38	Mühlenindustrie
39	Ölmühlen- und Margarine-Industrie
40	Zuckerindustrie
41	Brauereien und Mälzereien
42	Tabakverarbeitende Industrie
43	Sonstige Nahrungs- und Genussmittel-Industrien
44	Verarbeitendes Handwerk, Kleinindustrie und sonstiges produzierendes Gewerbe
45	Baugewerbe
46	Großhandel (einschl. Handelsvermittlung)
47	Einzelhandel
48	Eisenbahnen
49	Schifffahrt, Wasserstraßen und Häfen
50	Übriger Verkehr
51	Nachrichtenübermittlung (Deutsche Bundespost)
52	Kreditinstitute und Versicherungsgewerbe
53	Wohnungsvermietung
54	Sonstige Dienstleistungen (einschl. Private Organisationen ohne Erwerbscharakter)
55	Staat (Gebietskörperschaften und Sozialversicherung)
56	Private Haushalte (Häusliche Dienste)

Kapitel 7

Input-Output-Analyse

7.1 Input- und Outputkoeffizienten, Leontief-Matrizen und indirekte Verflechtungen

Obwohl eine Input-Output-Tabelle an sich bereits einen tiefen Einblick in die Struktur einer Volkswirtschaft gibt, so sind doch die Instrumente der Input-Output-Analyse von viel größerer Bedeutung. Sie erlauben beispielsweise die Berechnung von Preisüberwälzungseffekten, die Abschätzung der Wirkung von Subventionszahlungen, die Prognose von direkten und indirekten Effekten zusätzlicher (staatlicher) Nachfrage (z. B. im Bausektor) und vieles andere mehr.

Um hier ein paar konkrete Beispiele zu nennen, zitieren wir aus der Pressemitteilung des Statistischen Bundesamtes vom 30.08.2000, die über ein Pressegespräch des Präsidenten des Statistischen Bundesamtes berichtet, bei dem er die Input-Output-Tabellen für Deutschland für das Jahr 1997 vorstellt:

- Fast jeder fünfte Arbeitsplatz in Deutschland war 1997 exportabhängig (18 %). Mit Hilfe der Modellrechnungen werden auch die Arbeitsplätze berücksichtigt, die der Exportindustrie in Form von Vorprodukten ßuarbeiten". So würde ein Anstieg der Exportnachfrage aus dem Ausland um nahezu 4 % für rund 250 000 Menschen eine bessere Chance, einen Arbeitsplatz zu finden, bedeuten.

- In den neuen Ländern und Berlin-Ost sind die Bauinvestitionen in jeweiligen Preisen von 1995 bis 1999 um etwa 30 Mrd. DM zurückgegangen, während sie im früheren Bundesgebiet etwa gleich geblieben sind. Nach den Modellrechnungen der Input-Output-Rechnung dürften dadurch im Baugewerbe und allen vorgelagerten Lieferbereichen rund 250 000 Arbeitsplätze verloren gegangen sein.

- Steigen die Energiepreise, so steigen auch die Preise für Konsumgüter, da einerseits die privaten Haushalte fossile Energieträger etwa beim Autofahren oder Heizen direkt konsumieren und andererseits die Unternehmen Kostensteigerungen, die ihnen aus steigenden Energiepreisen entstehen, an die Endverbraucher "weiterreichen". Die Input-Output-Modelle berücksichtigen beide Effekte und schätzen die Gesamtwirkungen von Energiepreissteigerungen ab: Die Verdoppelung der Importpreise für Rohöl, Erdgas und Mineralölerzeugnisse seit Mitte letzten Jahres hätte bei vollständiger Kostenüberwälzung von der Wirtschaft auf die Endverbraucher die Konsumgüterpreise um rund 1,5 % erhöht.

- Nach Schätzungen der Input-Output-Rechner würde eine Erhöhung des Satzes der Mehrwertsteuer in Deutschland von 16% um zwei Prozentpunkte auf 18 % das Preisniveau der privaten Konsumgüter um rund 1 % erhöhen.

In diesem Kapitel soll ein relativ vollständiger Überblick über die verschiedenen Analysekonzepte gegeben werden. Um jedoch den Umfang dieses Kapitels in einem akzeptablen Rahmen zu halten, werden die verschiedenen Koeffizienten, die im folgenden eingeführt werden, nur kurz auf exakte mathematische Weise definiert. Darüber hinaus wird jeweils eine knappe Interpretation gegeben und der ökonomische Gehalt anhand von Beispielen erläutert.

Wir weisen jedoch ausdrücklich darauf hin, dass vor jeder ökonomischen Interpretation der mathematischen Formeln jeweils genau geklärt werden muss, auf welche Art von I-O-Tabellen die Analyse angewendet wird und auf welche Weise die Tabellen definiert und ermittelt worden sind. Auf die Problematik der Tabellenerstellung sind wir ausführlich in den Abschnitten 6.2 und 6.3 eingegangen. In diesen Abschnitten sollte auch klar geworden sein, dass die Qualität der Aussagen einer Analyse ganz wesentlich von der Güte der Daten und der Konzeption der Tabellenerstellung abhängt.

Zunächst wiederholen wir zur besseren Übersicht einige unserer Definitionen und Konventionen.

- Vektoren werden immer als Spaltenvektoren

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

  aufgefasst. Versehen wir einen Vektor mit einem Transpositionszeichen, z. B. v^T, so handelt es sich um einen Zeilenvektor.

- Der Vektor $x^T = (x_i, \dots, x_n)$ ist der in (6.1.4),...,(6.1.7) eingeführte Bruttoproduktionsvektor.

- Der Vektor $y^T = (y_1, \dots, y_n)$ ist der in Definition 6.4 mit den Gleichungen (6.1.8) und (6.1.9) definierte Vektor der Endnachfrage.

- Der Vektor $z^T = (z_1, \dots, z_n)$ ist der in Definition 6.5, und den Gleichungen (6.1.11), (6.1.12) eingeführte Vektor der Primärinputs.

- Die (n, n)-Matrix $X = (x_{ij})$ bezeichnet die Matrix der Vorleistungsverflechtungen, siehe Abbildung 6.1, (6.1.1).

- Die (n, m)-Matrix $Y = (y_{ij})$ ist die in Abbildung 6.1 und in Gleichung (6.1.2) eingeführte Endnachfragematrix.

- Die (l, n)-Matrix $Z = (z_{ij})$ ist die in Abbildung 6.1 und in Gleichung (6.1.3) definierte Primärinput-Matrix.

- Bei den oben definierten Vektoren x, y, z und Matrizen X, Y, Z verzichten wir im weiteren auf Dimensionsangaben, insbesondere für den Wertebereich der Koeffizienten.

- Mit $\mathbf{1}_k$ bezeichnen wir einen Vektor mit k Komponenten, die alle 1 sind.

- Mit I bezeichnen wir immer die (n, n)-Einheitsmatrix.

- Ist A eine Matrix und ist A invertierbar, so wird die inverse Matrix mit A^{-1} bezeichnet.

- Ist v ein n-dimensionaler Vektor, so ist $\mathrm{diag}(v)$ diejenige (n,n)-Matrix $A = (a_{ij})$, für die gilt $a_{ij} = 0$, falls $i \neq j$, und $a_{ii} = v_i$ für $i = 1, \ldots, n$. D. h. $\mathrm{diag}(v)$ ist eine Diagonalmatrix. Ist insbesondere jede Komponente von v ungleich Null, so ist $\mathrm{diag}(v)$ invertierbar, und die Inverse wird mit $\mathrm{diag}(v)^{-1}$ bezeichnet.
- Für eine (n,n)-Matrix A ist A^k diejenige Matrix, die man erhält, wenn A k-mal mit sich selbst multipliziert wird.

Es folgt nun eine Liste der in der Input-Output-Analyse betrachteten Konzepte. Die jeweils definierten Koeffizienten erlauben, auf vielfältige Weise Rückschlüsse auf die Struktur der Wirtschaft zu ziehen, Prognosen zukünftiger Entwicklungen zu geben sowie die Auswirkungen exogener Eingriffe abzuschätzen. Wann immer wir im folgenden inverse Matrizen benutzen, nehmen wir an, dass diese auch tatsächlich existieren. Für die Existenz solcher Inversen können recht einfache mathematische Bedingungen angegeben werden. Darauf werden wir näher in Kapitel 8 eingehen. Diese Bedingungen sind in der Praxis so gut wie immer erfüllt. Für die im folgenden angeführten Analysebeispiele gehen wir davon aus, dass jeweils entsprechend disaggregierte Verflechtungsmatrizen gegeben sind.

Input-Koeffizienten

$$\overline{x}_{ij} := \frac{x_{ij}}{x_j} \tag{7.1.1}$$

$$\overline{X} := (\overline{x}_{ij}) = X \ \mathrm{diag}(x)^{-1} \tag{7.1.2}$$

Interpretation:
$\overline{x}_{ij}$ gibt an, welchen Anteil am Gesamtinput (Bruttoproduktionswert) des Produktionssektors j die Lieferungen des Produktionssektors i an den Produktionssektor j haben. Man kann beispielsweise mit Hilfe der Matrix $\overline{X}$ erkennen, welche Unterschiede zwischen Betrieben der Papierindustrie und der Chemieindustrie bezüglich ihrer relativen Abhängigkeit von direkten Lieferungen der mineralölverarbeitenden Industrie bestehen.

$$\overline{y}_{ij} := y_{ij} / \sum_{k=1}^{n} y_{kj} \tag{7.1.3}$$

$$\overline{Y} := (\overline{y}_{ij}) = Y \ \mathrm{diag}(\mathbf{1}_n^T Y)^{-1} \tag{7.1.4}$$

Interpretation:
$\overline{y}_{ij}$ gibt an, welchen Anteil am Gesamtkonsum des Endnachfragesektors j die Lieferungen des Produktionssektors i an den Endnachfragesektor j haben. Aus der Matrix $\overline{Y}$ lässt sich etwa der Exportanteil (gemessen am Gesamtexport) von Betrieben der Bekleidungsindustrie ablesen.

$$\overline{z}_{ij} := \frac{z_{ij}}{x_j} \tag{7.1.5}$$

$$\overline{Z} := (\overline{z}_{ij}) = Z \ \mathrm{diag}(x)^{-1} \tag{7.1.6}$$

Interpretation:
$\overline{z}_{ij}$ gibt an, welchen Anteil am Gesamtinput (BPW) des Produktionssektors j die Lieferungen des Primärinputsektors i an den Produktionssektor j haben.

Zum Beispiel kann man mit Hilfe der Matrix $\overline{Z}$ den Anteil der Lohnkosten an den gesamten Produktionskosten der Landwirtschaft ermitteln, oder etwa den Prozentsatz (gemessen am BPW) der Gewinne in der Spielwarenindustrie.

Output-Koeffizienten

$$\underline{x}_{ij} := \frac{x_{ij}}{x_i} \tag{7.1.7}$$

$$\underline{X} := (\underline{x}_{ij}) = \ \mathrm{diag}(x)^{-1} \, X \tag{7.1.8}$$

Interpretation:
$\underline{x}_{ij}$ gibt an, welchen Anteil am Gesamtoutput (Bruttoproduktionswert) des Produktionssektors i die Lieferungen des Produktionssektors i an den Produktionssektor j haben. Mit Hilfe der Matrix $\overline{X}$ kann man z. B. die wichtigsten direkten Abnehmer von Erzeugnissen der elektrotechnischen Industrie bestimmen und damit direkte Nachfrageabhängigkeiten erkennen.

$$\underline{y}_{ij} := \frac{y_{ij}}{x_i} \tag{7.1.9}$$

$$\underline{Y} := (\underline{y}_{ij}) = \ \mathrm{diag}(x)^{-1} \, Y \tag{7.1.10}$$

Interpretation:
$\underline{y}_{ij}$ gibt an, welchen Anteil am Gesamtoutput (BPW) des Produktionssektors i die Lieferungen von i an den Endnachfragesektor j haben. Um wieder ein Beispiel anzugeben, lässt sich aus der Matrix $\underline{Y}$ ablesen, welche Unterschiede in der relativen Abhängigkeit gewisser produzierender Sektoren von der direkten privaten Endnachfrage bestehen.

$$\underline{z}_{ij} := z_{ij} / \sum_{k=1}^{n} z_{ik} \tag{7.1.11}$$

$$\underline{Z} := (\underline{z}_{ij}) = \operatorname{diag}(Z\mathbf{1}_n)^{-1}\,Z \tag{7.1.12}$$

Interpretation:
$\underline{z}_{ij}$ gibt an, welchen Anteil am Gesamtoutput des Primärinputsektors i die Lieferungen von i an den Produktionssektor j haben. Man kann z. B. aus der Matrix $\overline{Z}$ ablesen, welcher Produktionssektor relativ die meisten Arbeiter und Angestellten beschäftigt, gemessen an der Gesamtsumme unselbständiger Arbeit. Analog kann der relativ größte Importeur (gemessen am Gesamtimport) der Bundesrepublik bestimmt werden.

Transformationsgleichungen:

$$\overline{X} = \operatorname{diag}(x)\,\underline{X}\,\operatorname{diag}(x)^{-1} \tag{7.1.13}$$

$$\underline{X} = \operatorname{diag}(x)^{-1}\,\overline{X}\,\operatorname{diag}(x) \tag{7.1.14}$$

$$\overline{Y} = \operatorname{diag}(x)\,\underline{Y}\,\operatorname{diag}(\mathbf{1}_n^T Y)^{-1} \tag{7.1.15}$$

$$\underline{Y} = \operatorname{diag}(x)^{-1}\,\overline{Y}\,\operatorname{diag}(\mathbf{1}_n^T Y) \tag{7.1.16}$$

$$\overline{Z} = \operatorname{diag}(Z\,\mathbf{1}_n)\,\underline{Z}\,\operatorname{diag}(x)^{-1} \tag{7.1.17}$$

$$\underline{Z} = \operatorname{diag}(Z\,\mathbf{1}_n)^{-1}\,\overline{Z}\,\operatorname{diag}(x) \tag{7.1.18}$$

Bilanzgleichungen:

$$\mathbf{1}_n^T x = \mathbf{1}_n^T X \mathbf{1}_n + \mathbf{1}_n^T y \tag{7.1.19}$$

$$\mathbf{1}_n^T x = \mathbf{1}_n^T X \mathbf{1}_n + z^T \mathbf{1}_n \tag{7.1.20}$$

$$\mathbf{1}_n^T y = \mathbf{1}_n^T Y \mathbf{1}_m = \mathbf{1}_l^T Z \mathbf{1}_n = z^T \mathbf{1}_n \tag{7.1.21}$$

$$\mathbf{1}_n = \underline{X}\mathbf{1}_n + \underline{Y}\mathbf{1}_m \tag{7.1.22}$$

$$\mathbf{1}_n^T = \mathbf{1}_n^T \overline{X} + \mathbf{1}_l^T \overline{Z} \tag{7.1.23}$$

$$x = \overline{X}x + Y\mathbf{1}_m = \overline{X}x + y \tag{7.1.24}$$

$$x^T = x^T\underline{X} + \mathbf{1}_l^T Z = x^T\underline{X} + z^T \tag{7.1.25}$$

$$y = (I - \overline{X})x \tag{7.1.26}$$

$$z^T = x^T(I - \underline{X}) \tag{7.1.27}$$

Die Matrizen $I - \overline{X}$ bzw. $I - \underline{X}$ heißen *Input-Leontief-Matrix* bzw. *Output-Leontief-Matrix.*

Inverse der Leontief-Matrizen:

$$\overline{M} := (\overline{m}_{ij}) = (I - \overline{X})^{-1} \tag{7.1.28}$$

$$\underline{M} := (\underline{m}_{ij}) = (I - \underline{X})^{-1} \tag{7.1.29}$$

$\overline{M}$ wird häufig Leontief-Inverse oder Matrix-Multiplikator genannt. Wir nennen $\overline{M}$ *Input-Inverse* und analog $\underline{M}$ *Output-Inverse.* Falls $\overline{M}$ und $\underline{M}$ existieren, was in der Praxis immer der Fall ist, gilt (hierbei ist $\overline{X}^0 = \underline{X}^0 = I$)

$$\overline{M} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{X}^k \tag{7.1.30}$$

$$\underline{M} = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{X}^k \tag{7.1.31}$$

Setzen wir $\overline{X}^k = \left(\overline{x}_{ij}^{(k)}\right)$ und $\underline{X}^k = \left(\underline{x}_{ij}^{(k)}\right)$, so ergibt sich

$$\overline{m}_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{x}_{ij}^{(k)} \tag{7.1.32}$$

$$\underline{m}_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{x}_{ij}^{(k)} \tag{7.1.33}$$

Interpretation von $\overline{x}_{ij}^{(k)}$: Diese Größe gibt an, welchen Anteil am Gesamtinput (BPW) des Produktionssektors j diejenigen Vorleistungen des Produktionssektors i für j haben, die über genau $k-1$ intermediäre Produktionssektoren gegangen sind, $k \geq 1$.

Interpretation von $\underline{x}_{ij}^{(k)}$: Diese Größe gibt an, welchen Anteil am Gesamtoutput (BPW) des Produktionssektors i diejenigen Vorleistungen von i für den Produktionssektor j haben, die über genau $k-1$ Zwischensektoren gegangen sind, $k \geq 1$.

Für $k > 1$ messen also die Größen $\overline{x}^{(k)}$ bzw. $\underline{x}_{ij}^{(k)}$ die indirekten Vorleistungen von i für j, während $\overline{x}_{ij}^{(1)} = \overline{x}_{ij}$ bzw. $\underline{x}_{ij}^{(1)} = \underline{x}_{ij}$ die direkten Lieferungen messen. Somit erhalten wir:

Interpretation von $\overline{m}_{ij}$: Diese Größe gibt an, wieviel der Produktionssektor i produzieren muss, damit eine Einheit Endnachfrage nach Gütern des Produktionssektors j befriedigt werden kann. Für $i \neq j$ muss der Produktionssektor i für die direkten Lieferungen und indirekten Vorleistungen an Sektor j produzieren, für $i = j$ muss darüber hinaus die für die Endnachfrage bestimmte Einheit erzeugt werden.

Wir greifen das Beispiel auf, das wir zur Veranschaulichung der Analysemöglichkeiten mit Hilfe der Matrix $\overline{X}$ angeführt haben. Während sich aus $\overline{X}$ nur die relative Abhängigkeit von den direkten Lieferungen ablesen lässt, wird mit $\overline{M}$ die relative Abhängigkeit von Betrieben der Papierindustrie und der Chemieindustrie sowohl von direkten Lieferungen als auch von indirekten Vorleistungen der mineralölverarbeitenden Industrie erfasst.

Interpretation von $\underline{m}_{ij}$: Diese Größe gibt an, wieviele Einheiten des i-ten Gutes als direkte Lieferungen und indirekte Vorleistungen für den Produktionssektor j produziert werden, wenn i eine Einheit seines Gutes produziert.

Während in $\underline{X}$ nur die direkte Nachfrageabhängigkeit erfasst wird, kann man in $\underline{M}$ zum Beispiel die relative Abhängigkeit der Betriebe der kunststoffverarbeitenden Industrie und des Bergbaus sowohl von der direkten Nachfrage als auch von indirekten Vorleistungen der Straßenfahrzeugindustrie vergleichen.

Transformationsgleichungen und Bilanzgleichungen

$$x = \overline{M}y \tag{7.1.34}$$

$$x^T = z^T \underline{M} \tag{7.1.35}$$

$$\overline{M} = \operatorname{diag}(x)\, \underline{M}\, \operatorname{diag}(x)^{-1} \tag{7.1.36}$$

$$\underline{M} = \operatorname{diag}(x)^{-1}\, \overline{M}\, \operatorname{diag}(x) \tag{7.1.37}$$

Preisüberwälzungseffekte

Wir wollen nun untersuchen, wie sich in den oben definierten Matrizen Preiserhöhungen bei gleichbleibender Produktionsstruktur bemerkbar machen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die bestehenden Einheiten so normiert sind, dass jeweils eine Einheit eines Primärgutes und eines produzierten Gutes eine Geldeinheit kostet. Veränderte Preise für die primären und produzierten Güter seien durch die folgenden Preisvektoren gegeben:

$$p^T = (p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

$$\pi^T = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_l).$$

Dadurch erhalten wir bezüglich des neuen Preissystems die folgende Matrix der Vorleistungsverflechtung, Endnachfragematrix bzw. Primärinput-Matrix:

$$\begin{aligned} X^* &= \operatorname{diag}(p)\, X \\ Y^* &= \operatorname{diag}(p)\, Y \\ Z^* &= \operatorname{diag}(\pi)\, Z \end{aligned}$$

Bezeichnen wir bezüglich des neuen Preissystems die verschiedenen im vorhergehenden definierten Matrizen mit $\overline{X}^*, \underline{X}^*, \overline{M}^*, \ldots$, so gilt:

$$\underline{X}^* = \underline{X} \tag{7.1.38}$$

$$\underline{Y}^* = \underline{Y} \tag{7.1.39}$$

$$\underline{Z}^* = \underline{Z} \tag{7.1.40}$$

$$\underline{M}^* = \underline{M} \tag{7.1.41}$$

$$\overline{X}^* = \operatorname{diag}(p)\, \overline{X}\, \operatorname{diag}(p)^{-1} \tag{7.1.42}$$

$$\overline{Y}^* = \operatorname{diag}(p)\, \overline{Y}\, \operatorname{diag}(p^T Y)^{-1} \tag{7.1.43}$$

$$\overline{Z}^* = \operatorname{diag}(\pi)\, \overline{Z}\, \operatorname{diag}(p)^{-1} \tag{7.1.44}$$

$$\overline{M}^* = \operatorname{diag}(p)\, \overline{M}\, \operatorname{diag}(p)^{-1} \tag{7.1.45}$$

Aus (7.1.38),..., (7.1.41) folgt, dass alle outputorientierten Konzepte unabhängig sind von Preisänderungen bei produzierten Gütern und Primärgütern, während (7.1.42),..., (7.1.45) zeigen, dass dies für die Input-Konzepte nicht der Fall ist.

7.2 Doppel- und Dreifachmatrizen

Basierend auf den im vorigen Abschnitt definierten Matrizen $X, Y, Z, \overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, \underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}, \overline{M}, \underline{M}$ werden wir nun weitere Analysekonzepte entwickeln. Hierbei werden jeweils Produkte von zwei oder drei der oben definierten Matrizen gebildet, und es werden Interpretationen der dadurch definierten Koeffizienten gegeben. Wir betrachten zunächst die Produkte von zwei solchen Matrizen.

7.2.1 Direkte und indirekte Vorleistungen des i-ten Produktionssektors für den k-ten Endnachfragesektor

$$\overline{M}Y = (a_{ik})$$

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \overline{m}_{ij} y_{jk}$$

Interpretation:
a_{ik} gibt die gesamten direkten und indirekten Vorleistungen an, die der Produktionssektor i für den Endnachfragesektor k erbringt. Äquivalent dazu: Hat der k-te Endnachfragesektor die folgende Nachfrage $(y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{nk})^T$ so muss der i-te Produktionssektor a_{ik} Einheiten produzieren, damit diese Nachfrage befriedigt werden kann. Bezeichnet $(y_{1k}, \ldots, y_{nk})^T$ „Export", so lässt sich z. B. aus der entsprechenden Spalte von $\overline{M}Y$ die direkte und indirekte Exportabhängigkeit (in absoluten Nachfrageeinheiten) der Stahlindustrie entnehmen.

Offenbar folgt aus (7.1.34): $\overline{M}Y\mathbf{1}_m = \overline{M}y = x$.

7.2.2 Endnachfrageabhängigkeit der Sektoren (Abhängigkeit des i-ten Produktionssektors vom k-ten Endnachfragesektor)

$$\overline{M}\,\overline{Y} = (a_{ik})$$

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \overline{m}_{ij} \overline{y}_{jk}$$

Interpretation:
Falls eine Einheit Gesamtnachfrage im Endnachfragesektor k entsteht, dann muss der i-te Produktionssektor a_{ik} Einheiten seines Gutes produzieren. Äquivalent dazu: a_{ik} sind die direkten und indirekten Vorleistungen des i-ten Produktionssektors für den k-ten Endnachfragesektor gemessen an der Gesamtnachfrage des Sektors k. Zur Illustration erwähnen wir wieder das für $\overline{M}Y$ angegebene Beispiel. In $\overline{M}Y$ wird die Endnachfrageabhängigkeit der Sektoren absolut gemessen, während in $\overline{M}\,\overline{Y}$ die Endnachfrageabhängigkeit relativ zur Gesamtnachfrage der entsprechenden Sektoren erfasst wird.

Die Matrix $\overline{M}\,\overline{Y}$ ist weder zeilen- noch spaltennormiert.

7.2.3 Sektorabhängigkeit der Endnachfrage (Abhängigkeit des k-ten Endnachfragesektors vom i-ten Produktionssektor)

$$\underline{M}\,\underline{Y} = (a_{ik})$$

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \underline{m}_{ij} \underline{y}_{jk}$$

Interpretation:
Die Produktion einer Einheit des Gutes des i-ten Produktionssektors bewirkt a_{ik} Einheiten Gesamtnachfage im k-ten Endnachfragesektor.

Aus (7.1.10) und (7.1.37) folgt

$$\underline{M}\,\underline{Y} = \operatorname{diag}(x)^{-1}\overline{M}\,Y. \tag{7.2.1}$$

Daraus ergibt sich mit (7.2.1) die folgende alternative *Interpretation:*
a_{ik} gibt an, welchen Anteil am gesamten Output (BPW) des Produktionssektors i die direkten und indirekten Vorleistungen von i für den k-ten Endnachfragesektor haben. Während sich in $\underline{Y}$ nur die Abhängigkeit gewisser Produktionssektoren von der direkten Nachfrage etwa des Exportsektors erfassen lässt, wird mit Hilfe der Matrix $\underline{M}\,\underline{Y}$ darüberhinaus auch den indirekten Vorleistungen zur Befriedigung der Endnachfrage Rechnung getragen (jeweils bezogen auf den entsprechenden BPW).

Die Matrix $\underline{M}\,\underline{Y}$ ist zeilennormiert, d. h. es gilt

$$\underline{M}\,\underline{Y}\mathbf{1}_m = \mathbf{1}_n. \tag{7.2.2}$$

7.2.4 Sektorabhängigkeit der Primärinputs (Abhängigkeit des i-ten Primärinputsektors vom k-ten Produktionssektor)

$$\overline{Z}\,\overline{M} = (a_{ik})$$
$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \overline{z}_{ij}\overline{m}_{jk}$$

Interpretation:
Zur Produktion einer Einheit des im k-ten Produktionssektor hergestellten Gutes sind direkt und indirekt a_{ik} Einheiten des Gutes des i-ten Primärinputsektors erforderlich. Anders ausgedrückt, a_{ik} gibt den relativen Anteil an, den die direkten und indirekten Vorleistungen des i-ten Primätinputsektors für den k-ten Produktionssektor am Gesamtinput des k-ten Sektors haben. Die im letzten Abschnitt eingeführte Matrix $\overline{Z}$ erlaubte etwa, wie dort ausgeführt, die Analyse des relativen Anteils des Primärinputs „Löhne und Gehälter" bei landwirtschaftlichen Betrieben. Es werden jedoch nur Löhne und Gehälter in Form von direkten Vorleistungen berücksichtigt, wogegen in der Matrix $\overline{Z}\,\overline{M}$ sowohl direkte als auch indirekte Vorleistungen berücksichtigt sind.

Die Matrix $\overline{Z}\,\overline{M}$ ist spaltennormiert, d. h.

$$\mathbf{1}_l^T\overline{Z}\,\overline{M} = \mathbf{1}_n^T \tag{7.2.3}$$

7.2.5 Primärinputabhängigkeit der Sektoren (Abhängigkeit des i-ten Produktionssektors vom k-ten Primärinputsektor)

$$\underline{Z}\,\underline{M} = (a_{ik})$$

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \underline{z}_{ij}\underline{m}_{jk}$$

Interpretation:
Einer Einheit des Gutes des i-ten Primärinputsektors entspricht direkt und indirekt die Produktion von a_{ik} Einheiten des Gutes des k-ten Produktionssektors. Anders ausgedrückt, a_{ik} gibt den relativen Anteil der direkten und indirekten Vorleistungen des i-ten Primärinputsektors für den k-ten Produktionssektor am gesamten Primärinput des Sektors i an. Bei der Erläuterung der Analysemöglichkeit mit Hilfe der Matrix $\underline{Z}$ hatten wir auf die Aufteilung der Importe verwiesen, die man aus der „Import-“ Zeile von $\underline{Z}$ ablesen kann. Dies bezog sich jedoch nur auf diejenigen Importe, die als direkte Vorleistungen von den in Frage stehenden Produktionssektoren bezogen werden. In der Matrix $\underline{Z}\,\underline{M}$ werden nun auch die indirekten Vorleistungen der Primärinputs verbucht (bezogen auf den jeweiligen Gesamtumfang des Inputsektors).

Die Matrix $\underline{Z}\,\underline{M}$ ist weder zeilen- noch spaltennormiert. Wiederum gibt es Transformationsgleichungen, die die oben besprochenen Produkte von zwei Matrizen ineinander überführen.

Transformationsgleichungen

$$\overline{M}Y = \operatorname{diag}(x)\underline{M}\,\underline{Y} \tag{7.2.4}$$

$$\overline{M}\,\overline{Y} = \operatorname{diag}(x)\underline{M}\,\underline{Y}\ \operatorname{diag}(\mathbf{1}_n^T Y)^{-1} \tag{7.2.5}$$

$$\underline{M}\,\underline{Y} = \operatorname{diag}(x)^{-1}\overline{M}\,\overline{Y}\ \operatorname{diag}(\mathbf{1}_n^T Y) \tag{7.2.6}$$

$$\overline{Z}\,\overline{M} = \operatorname{diag}(Z\mathbf{1}_n)\underline{Z}\,\underline{M}\ \operatorname{diag}(x)^{-1} \tag{7.2.7}$$

$$\underline{Z}\,\underline{M} = \operatorname{diag}(Z\mathbf{1}_n)^{-1}\overline{Z}\,\overline{M}\ \operatorname{diag}(x) \tag{7.2.8}$$

Von besonderem Interesse sind darüberhinaus zwei Produkte von jeweils drei Matrizen.

7.2.6 Endnachfrageabhängigkeit der Primärinputs (Abhängigkeit des i-ten Primärinputsektors vom k-ten Endnachfragesektor)

$$\overline{Z}\,\overline{M}\,\overline{Y} = (a_{ik})$$
$$a_{ik} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \overline{z}_{ir}\overline{m}_{rs}\overline{y}_{sk}$$

Interpretation:
Um eine Einheit Nachfrage im k-ten Endnachfragesektor befriedigen zu können, sind a_{ik} Einheiten direkte und indirekte Vorleistungen des i-ten Primärinputsektors erforderlich. Alternativ ausgedrückt: a_{ik} gibt die direkten und indirekten Vorleistungen des i-ten Primärinputsektors für den k-ten Endnachfragesektor an, relativ zur Gesamtnachfrage des k-ten Endnachfragesektors.

7.2.7 Primärinputabhängigkeit der Endnachfrage (Abhängigkeit des i-ten Endnachfragesektors vom k-ten Primärinputsektor)

$$\underline{Z}\,\underline{M}\,\underline{Y} = (a_{ik})$$
$$a_{ik} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \underline{z}_{ir}\underline{m}_{rs}\underline{y}_{sk}$$

Interpretation:
Einer Einheit des Gutes des i-ten Primärinputsektors entspricht direkt und indirekt der Nachfrage von a_{ik} Einheiten im k-ten Endnachfragesektor. Äquivalent dazu: a_{ik} gibt die direkten und indirekten Vorleistungen des i-ten Primärinputsektors für den k-ten Endnachfragesektor an, gemessen am Gesamtinput des Sektors i.

Die dreifachen Matrixprodukte $\overline{Z}\,\overline{M}\,\overline{Y}$ und $\underline{Z}\,\underline{M}\,\underline{Y}$ bieten wiederum aufschlussreiche Analysemöglichkeiten. So lassen sich beispielsweise die Auswirkungen von Änderungen der Auslandsnachfrage auf den Sektor „Löhne und Gehälter“ untersuchen, bzw. umgekehrt der Einfluss von Importschwankungen auf die Nachfrage der privaten Haushalte.

Transformations- und Bilanzgleichungen

$$\overline{Z}\,\overline{M}Y = Z\underline{M}\,\underline{Y} \tag{7.2.9}$$

$$\overline{Z}\,\overline{M}\,\overline{Y} = \operatorname{diag}(Z\mathbf{1}_n)\underline{Z}\,\underline{M}\,\underline{Y}\,\operatorname{diag}(\mathbf{1}_n^T Y)^{-1} \tag{7.2.10}$$

$$\underline{Z}\,\underline{M}\,\underline{Y} = \operatorname{diag}(Z\mathbf{1}_n)^{-1}\underline{Z}\,\underline{M}\,\underline{Y}\,\operatorname{diag}(\mathbf{1}_n^T Y) \tag{7.2.11}$$

$$\mathbf{1}_l^T\overline{Z}\,\overline{M}\,\overline{Y} = \mathbf{1}_m^T \tag{7.2.12}$$

$$\underline{Z}\,\underline{M}\,\underline{Y}\mathbf{1}_m = \mathbf{1}_l \tag{7.2.13}$$

Es gibt noch weitere Konzepte zur Partial- und Sektoranalyse. Wir wollen es jedoch bei den oben aufgeführten (und am häufigsten benutzten) Konzepten bewenden lassen. Die hier dargestellte Technik der ökonomischen Interpretation mathematischer Operationen hat sich in der Praxis als außerordentlich aussagekräftig erwiesen und zeigt, wie selbst einfachste Matrizenrechnung – geschickt angewendet und interpretiert – nutzbringend in der Ökonomie verwendet werden kann.

Modellrechnungen, die einige der im Vorhergehenden erläuterten Analysekonzepte und Interpretationen verwenden, finden sich in dem Artikel von Stahmer, Bleses, Meyer, siehe [31]. Die Autoren verwenden die in Abschnitt 6.7 erläuterte I-O-Tabelle des Statistischen Bundesamtes als Analysegrundlage. Sie machen u. a. Aussagen zu Beschäftigungswirkungen, zu Preiswirkungen und zu Kostenstrukturen der Endnachfragekomponenten. In den Artikeln werden außerdem weitere Möglichkeiten der Verwendung von I-O-Tabellen dargestellt (Umweltökonomie, Analysen des Strukturwandels, CO_2-Steuer, ...).

Kapitel 8

Mathematische Grundlagen der Input-Output-Analyse

In Kapitel 6 haben wir Input-Output-Tabellen eingeführt und die Schwierigkeiten beim Aufstellen derartiger Tabellen besprochen. In Kapitel 7 haben wir verschiedene Konzepte der Input-Output-Analyse diskutiert, insbesondere haben wir ökonomische Interpretationen verschiedener Matrizen (und deren Elemente) gegeben, die durch algebraische Manipulationen aus der Input-Output-Tabelle gewonnen wurden. Wir haben dabei immer angenommen, dass diese algebraischen Manipulationen auch durchführbar sind. Wir wollen nun zeigen, dass diese Annahmen gerechtfertigt waren. Es wird sich z. B. zeigen, dass die Leontief-Matrizen $I - \overline{X}$ und $I - \underline{X}$ aus ökonomischen Gründen invertierbar sind.

Ist, wie in (7.1.2) definiert, $\overline{X}$ die Matrix der Inputkoeffizienten, y der Endnachfragevektor (siehe (6.1.8)) und x der Bruttoproduktionsvektor (siehe (6.1.5)), so gilt nach (7.1.26):

$$y = (I - \overline{X})x.$$

Diese Gleichheit gilt schlicht aufgrund der Definition von $\overline{X}$, x und y, und es steckt kein tieferer mathematischer Sachverhalt dahinter. Interessant ist jedoch die folgende Fragestellung. Nehmen wir an, dass die Matrix der Inputkoeffizienten $\overline{X}$ für ein Jahr j bestimmt wurde und dass sich in der betrachteten Volkswirtschaft die Technologie im Jahre $j+1$ nicht ändert. Jedoch könnte es sein, dass sich die Endnachfrage im Jahre $j+1$ ändert. Nehmen wir also an, dass im Jahre $j+1$ eine Endnachfrage y' besteht. Wir wollen nun die Frage untersuchen, ob diese Endnachfrage tatsächlich im Rahmen der vorhandenen Produktionstechnologie befriedigt werden kann. In Formeln ausgedrückt:

Problem 8.1. *Gegeben seien eine Matrix $\overline{X}$ von Inputkoeffizienten und ein Endnachfragevektor y'. Gibt es einen Bruttoproduktionsvektor x' mit*

$$y' = (I - \overline{X})x'?$$

Bevor wir diese Frage allgemein formulieren, wollen wir noch ein paar Bemerkungen zur Definition der Produktionsbereiche machen. Seit einigen Jahren gibt es auf UN-Ebene eine *International Standard Industrial Classifikation of all Economic Activities* (kurz ISIC), durch die Sektoren international auf einheitliche Weise definiert werden. Die *ISIC* wird regelmäßig (in so genannten Revisionen, derzeit Revision 3.1 (siehe: http://unstats.un.org/unsd/cr/registry/regcst.asp?Cl=17) festgeschrieben. Diese Klassifikation wird durch die EU übernommen und angepasst. Hier heißt die ISIC Rev. 3.1, dann NACE Rev. 1. Die *NACE* (Nomenclature générale des activités économiques dans les Communautés européennes) ist detaillierter, aber mit ISIC voll kompatibel. In Deutschland erfolgt dann eine weitere kompatible Anpassung unter dem Kürzel *WZ 93*, siehe Fußnote 3 der I-O-Tabelle des Statistischen Bundesamtes in Abschnitt 6.7.

Eigentlich sollte man erwarten, dass in einem Land alle Sektionen, die in eine I-O-Tabelle aufgenommen werden, tatsächlich auch etwas produzieren. Will man jedoch mit internationalen Standards arbeiten und auch in der Nummerierung vergleichbar bleiben, dann kann es passieren, dass einer der international definierten Sektoren in dem betreffenden Land überhaupt nicht vorhanden ist, dass also die zugehörige Spalte und Zeile jeweils nur Einträge mit dem Wert Null enthält. In der I-O-Tabelle des Statistischen Bundesamtes für 1997 ist das z. B. der Fall fürd en Sektor 6 (Gewinnung von Uran- und Thoriumerzen). Er wird in der I-O-Tabelle aus Vergleichbarkeitsgründen belassen, obwohl in Deutschland keine derartige Erzgewinnung (mehr) stattfindet. Bei der I-O-Analyse, wo man ja z. B. durch den Bruttoproduktionsvektor des betreffenden Sektors teilen muss, werden dann vor der Durchführung der Analyse alle „Nullsektoren" aus der Tabelle entfernt.

Wir gehen also im Weiteren davon aus, dass der Bruttoproduktionsvektor x positiv ist.

Da die Matrix X der Vorleistungsverflechtungen nicht-negativ ist, sind die Elemente der Inputkoeffizientenmatrix $\overline{X} = X \operatorname{diag}(x)^{-1}$ nicht negativ; und folglich sind die Elemente von $I - \overline{X}$, die nicht auf der Hauptdiagonalen stehen nicht positiv. Also können wir Problem 8.1 etwas allgemeiner wie folgt beschreiben.

Problem 8.2. *Sei A eine (n, n)-Matrix mit*

$$a_{ij} \leq 0 \quad \forall i \neq j.$$

Gibt es zu jedem Vektor $y \geq 0$ einen Vektor $x \geq 0$ mit

$$y = Ax?$$

Zur Beantwortung von Problem 8.2 legen wir folgende Bezeichnungen fest.

Definition 8.3. *Sei A eine (n, n)-Matrix, dann heißt jede Untermatrix von A der Form $A_{I,I}$* **Hauptuntermatrix** *von A. Die Determinaten* $\det(A_{I,I})$ *heißen* **Hauptminoren** *von A. Die Determinanten der n Hauptuntermatrizen von A in der linken oberen Ecke von A (d. h. der Matrizen A_{KK} mit $K = \{1, \dots, k\}$, $1 \leq k \leq n$) heißen die* **Hauptabschnittsminoren** *von A. A heißt* **nichtnegativ invertierbar***, wenn A^{-1} existiert und $A^{-1} \geq 0$ gilt.*

Theorem 8.4. *Für jede (n,n)-Matrix $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} \leq 0$, $i \neq j$, sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) Es gibt einen nicht-negativen Vektor x, so dass $y := Ax$ positiv ist.

(2) Für jeden nicht-negativen Vektor y gibt es einen nichtnegativen Vektor x, so dass $y = Ax$ gilt.

(3) Für jeden nicht-negativen Vektor y gibt es genau einen nicht-negativen Vektor x, so dass $y = Ax$ gilt.

(4) Alle Hauptabschnittsminoren von A sind positiv.

(5) Alle Hauptminoren von A sind positiv.

(6) A ist nichtnegativ invertierbar.

Beweis. Die folgenden Implikationen sind trivial:
(5) $\Rightarrow$ (4),
(3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1).

Die folgenden Implikationen sind einfach:
(6) $\Rightarrow$ (2). Ist A nichtnegativ invertierbar, so gilt $A^{-1} \geq 0$. Ist also $y \geq 0$, so ist $x := A^{-1}y$ nichtnegativ, und es gilt $y = Ax$.

(3) und (4) $\Rightarrow$ (6). Die Voraussetzung (4) impliziert, dass die Determinante von $A = A_{KK}$ mit $K = \{1, \ldots, n\}$ positiv ist. Also ist A invertierbar. Sei $\mathbf{1}_j$ der (nicht-negative) j-te Einheitsvektor, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Nach (3) gibt es genau einen nichtnegativen Vektor x mit $\mathbf{1}_j = Ax$. Da A invertierbar ist, gilt $x = A^{-1}\mathbf{1}_j$, d. h. x ist die j-te Spalte von A^{-1}. Also sind alle Spalten von A^{-1} nicht-negativ, d. h. A^{-1} ist nicht-negativ.

Etwas mehr Mühe machen die folgenden Beweise.
(1) $\Rightarrow$ (4). Wir führen den Beweis durch Induktion über n. Falls $n = 1$, so lautet unser Gleichungssystem $a_{11}x_1 = y_1$. Nach (1) gibt es ein $x_1 \geq 0$, so dass $y_1 > 0$ gilt. Daraus folgt $a_{11} > 0$, d. h. alle Hauptabschnittsminoren der $(1,1)$-Matrix $A = (a_{11})$ sind positiv. Also gilt (4).

Wir nehmen nun an, dass die Bedingung (1) die Bedingung (4) für alle Systeme mit $n-1$ Variablen und Gleichungen impliziert. Sei $A = (a_{ij})$ eine (n,n)-Matrix die den Voraussetzungen genügt und Bedingung (1) erfüllt. Das heißt, es gibt einen nicht-negativen Vektor $x^T = (x_1, \ldots, x_n)$ und einen positiven Vektor $y^T = (y_1, \ldots, y_n)$, so dass gilt

(i) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = y_i, \quad i = 1, \ldots, n$

Wir schreiben die erste Gleichung von (i) wie folgt um

(ii) $a_{11}x_1 = y_1 - \sum\limits_{j=2}^{n} a_{1j}x_j$.

Da $y_1 > 0$, $a_{1j} \leq 0$ und $x_j \geq 0 \quad j = 2,\ldots,n$, gilt $a_{11}x_1 > 0$. Aus $x_1 \geq 0$ folgt somit $a_{11} > 0$. Wir subtrahieren nun das $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$-fache der ersten Gleichung von der i-ten Gleichung $i = 2,\ldots,n$ und erhalten das folgende Gleichungssystem.

$$\text{(iii)} \quad \begin{array}{rcrcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ y_{22}^*x_2 & +\ldots+ & a_{2n}^*x_n & = & y_2^* \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{2n}^*x_2 & +\ldots+ & a_{nn}^*x_n & = & y_n^* \end{array}$$

Es gilt $a_{ij}^* = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}$ und $y_i^* = y_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}y_1, \quad i,j = 2,\ldots,n$.

Wegen $a_{ij} \leq 0$ für $i \neq j, \quad a_{11} > 0$, folgt

$$\text{(iv)} \quad \begin{array}{l} a_{ij}^* \leq 0 \quad i \neq j, \quad i,j = 2,\ldots,n, \\ y_i^* > 0 \quad i = 2,\ldots,n. \end{array}$$

Die Matrix $A^* = (a_{ij}^*)_{i,j=2,\ldots,n}$ ist eine $(n-1,n-1)$-Matrix mit nicht-positiven Elementen außerhalb der Hauptdiagonalen, und zu dem nicht-negativen Vektor $x^* = (x_2,\ldots,x_n)^T$ gibt es den positiven Vektor $y^* = (y_2^*,\ldots,y_n^*)^T$ mit

(v) $y^* = A^*x^*$.

Das bedeutet, dass A^* die Bedingung (1) erfüllt und somit nach Induktionsvoraussetzung auf die Bedingung (4). Insbesondere gilt $\det(A^*) > 0$, und aus $\det(A) = a_{11}\det(A^*)$ folgt, $\det(A) > 0$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\det(A_{KK}) > 0$ für $K = \{1,\ldots,k\}$ und $k = 1,\ldots,n-1$, also können wir schließen, dass A die Bedingung (4) erfüllt.

(4) $\Rightarrow$ (3). Bedingung (4) impliziert $\det(A) > 0$, also hat für jeden nicht-negativen Vektor y das Gleichungssystem $y = Ax$ genau eine Lösung x. Wir müssen $x \geq 0$ zeigen und führen den Beweis durch Induktion über n.

Der Fall $n = 1$ ist trivial.

Wir nehmen nun an, dass (4) $\Rightarrow$ (3) für $n-1$ gilt und betrachten eine (n,n)-Matrix A. (4) impliziert $a_{11} > 0$. Wir können also $Ax = y$ in das oben angegebene System (iii) transformieren, wobei allerdings y ein beliebiger nicht-negativer Vektor ist. Die dabei erhaltene Matrix A^* erfüllt $a_{ij}^* \leq 0, \quad i \neq j$. Offenbar gilt

$$\det\begin{pmatrix} a_{22}^* & \cdots & a_{2k}^* \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k2}^* & & a_{kk}^* \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}}\det\begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k2} & & a_{kk} \end{pmatrix} > 0,$$

d. h. Bedingung (4) ist für A^* erfüllt, da sie für A nach Voraussetzung erfüllt ist.

(iv) impliziert $y_i^* \geq 0 \quad i = 2, \ldots, n$ für alle $y \geq 0$.

Nach Induktionsvoraussetzung hat für den Vektor $y^* = (y_2^*, \ldots, y_n^*)^T$ das System (v) genau eine nicht-negative Lösung x^*. Wir setzen

$$x_1 := \frac{1}{a_{11}} \left(y_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j^* \right)$$

$$x_j = x_j^*, \quad j = 2, \ldots, n,$$

dann gilt $Ax = y$ und $x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$, was zu zeigen war.

(2) $\Rightarrow$ (5). Sei $A_{I,I}$ eine Hauptuntermatrix von A. Wir ordnen die Spalten und Zeilen von A so um, dass die Hauptabschnittsmatrix $A'_{K,K}$, $K = \{1, \ldots, |I|\}$ der umgeordneten Matrix A' genau die Matrix $A_{I,I}$ ist. Offenbar gilt: zu jedem $y \geq 0$ gibt es $x \geq 0$ mit $y = Ax$ genau dann, wenn es zu jedem $y \geq 0$ ein $x \geq 0$ mit $y = A'x$ gibt. Aus den bisherigen Beweisschriften folgt die Äquivalenz von (2) und (4), und daraus erhalten wir: $\det(A'_{K,K}) = \det(A_{I,I}) > 0$. Also ist jeder Hauptminor von A positiv, woraus (5) folgt. $\square$

Folgerung 8.5. *Sei* $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})$ *eine nicht-negative* (n,n)*-Matrix, und seien* $r_i := \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}$, $i = 1, \ldots, n$, *und* $s_j := \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_{ij}$, $j = 1, \ldots, n$. *Gilt*

$$\lambda > r_i, \quad i = 1, \ldots, n \qquad \textit{oder}$$
$$\lambda > s_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

dann erfüllt die Matrix $\lambda I - \overline{A}$ *alle Bedingungen* $(1), \ldots, (6)$ *von Satz 8.4.*

Beweis. Offensichtlich sind die Elemente von $\lambda I - \overline{A}$, die nicht auf der Hauptdiagonalen stehen, nicht-positiv. Es genügt zu zeigen, dass $\lambda I - \overline{A}$ eine der (äquivalenten) Bedingungen $(1), \ldots, (6)$ erfüllt.

(a) Sei $\lambda > r_i$, $i = 1, \ldots, n$. Wähle $y_i := \lambda - r_i$, dann ist $y_i > 0$ und der Vektor $x = (x_i)$ mit $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ ist eine Lösung von $(\lambda I - \overline{A})x = y$. Also ist die Bedingung (1) erfüllt.

(b) Sei $\lambda > s_j$, $j = 1, \ldots, n$. Transponieren von $\overline{A}$ führt Spaltensummen in Zeilensummen über. Also erfüllt die Matrix $\lambda I - \overline{A}^T$ die Bedingung (1) nach (a); nach Satz 8.4 somit auch die Bedingung (4). Die Hauptabschnittsminoren von $\lambda I - \overline{A}^T$ sind identisch mit den Hauptabschnittsminoren von $\lambda I - \overline{A}$, woraus folgt, dass $\lambda I - \overline{A}$ die Bedingung (4) und somit auch alle anderen erfüllt.

$\square$

Folgerung 8.6. *Ist $\overline{X}$ die Matrix der Inputkoeffizienten einer Input-Output-Tabelle, dann ist $I - \overline{X}$ invertierbar, und $I - \overline{X}$ erfüllt die Bedingungen $(1), \dots, (6)$ aus Satz 8.4.*

Beweis. Es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{x}_{ij} + \sum_{i=1}^{l} \overline{z}_{ij} = 1,$$

siehe (7.1.23). Da bei der Produktion jedes beliebigen Gutes j positiver Primärinput benötigt wird, z. B. Arbeit, gilt

$$\sum_{i=1}^{l} \overline{z}_{ij} > 0,$$

also sind die Spaltensummen

$$s_j = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_{ij}$$

strikt kleiner als 1. Nach Folgerung 8.5 hat dann die Matrix $\lambda I - \overline{X}$ mit $\lambda = 1$ die gewünschten Eigenschaften. □

Satz 8.4 gibt eine Antwort auf Problem 8.2; und für den uns speziell interessierenden Fall der Input-Output-Rechnung, folgt die Antwort auf die Frage in Problem 8.1 direkt aus Folgerung 8.6. Nämlich, ist $\overline{X}$ eine Matrix von Input-Koeffizienten, dann ist nach Problem 8.2 (6) $(I - \overline{X})$ invertierbar, sogar nicht-negativ invertierbar, und zu jedem beliebigen Endnachfragevektor $y \geq 0$ gibt es einen Bruttoproduktionsvektor $x \geq 0$ mit $(I - \overline{X})x = y$. Das heißt also, dass jede beliebige Endnachfrage in der betrachteten Ökonomie tatsächlich befriedigt werden kann.

In (7.1.30) und (7.1.31) haben wir behauptet, dass die inversen Matrizen der Leontief-Matrizen $(I - \overline{X})$ und $(I - \underline{X})$ eine (für Interpretationen besonders nützliche) Potenzreihendarstellung haben. Wir werden hier wiederum eine etwas allgemeinere Analyse dieser Fragestellung geben.

Theorem 8.7. *Seien $\overline{A}$ eine nicht-negative quadratische Matrix und ρ eine reelle Zahl. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) $\rho I - \overline{A}$ ist nichtnegativ invertierbar.

(2) $\rho > 0$ und die Reihe $\frac{1}{\rho} \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^i} \overline{A}^i$ konvergiert.

Ist eine der Aussagen (1), (2) erfüllt, so gilt

$$(\rho I - \overline{A})^{-1} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^i} \overline{A}^i$$

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Es gilt offenbar

$$(\rho I - \overline{A}) \frac{1}{\rho} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^i} \overline{A}^i = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\rho^i} \overline{A}^i - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^{i+1}} \overline{A}^{i+1} = I.$$

Nach Voraussetzung ist $(\rho I - \overline{A})$ invertierbar, also muss

$$\frac{1}{\rho}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^i}\overline{A}^i$$

die Inverse von $(\rho I - \overline{A})$ sein. Daraus folgt, dass

$$\frac{1}{\rho}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^i}\overline{A}^i$$

konvergiert. Nach Voraussetzung erfüllt $(\rho I - \overline{A})$ die Bedingung (6) von Satz 8.4 und somit auch die Bedingung (4). Daraus folgt, dass $\rho - \overline{a}_{11} > 0$ gelten muss. Aus $\overline{a}_{11} \geq 0$ folgt somit $\rho > 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Wenn die Reihe

$$\frac{1}{\rho}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^i}\overline{A}^i$$

konvergiert, ist der Limes – wie wir oben gesehen haben – notwendigerweise die Inverse von $(\rho I - A)$. Also ist $\rho I - A$ invertierbar. Da $\overline{A} \geq 0$ und $\rho > 0$ ist

$$(\rho I - \overline{A})^{-1} = \frac{1}{\rho}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^i}\overline{A}^i \geq 0.$$

□

Lemma 8.8. *Sei $\overline{A}$ eine nicht-negative quadratische Matrix, und sei*

$$M(\overline{A}) := \{\rho \in \mathbb{R} | \rho I - \overline{A} \textit{ ist nichtnegativ invertierbar}\}.$$

Dann gibt es ein $\lambda \geq 0$, so dass

$$M(\overline{A}) = (\lambda, \infty). \textit{ (Hier bezeichnet } (\lambda,\infty) \textit{ das offene Intervall von } \lambda \textit{ bis } \infty)$$

Beweis. Sei x ein beliebiger positiver Vektor. Setzen wir

$$\rho := n(\max\{\overline{a}_{ij} | i,j = 1,\ldots,n\} + 1),$$

so gilt offenbar $\rho x > \overline{A}x$, bzw. $(\rho I - \overline{A})x > 0$. Also erfüllt die Matrix $\rho I - \overline{A}$ die Bedingung (1) von Satz 8.4 und somit auch die Bedingung (6). D. h. $\rho I - \overline{A}$ ist nichtnegativ invertierbar, woraus folgt, dass $M(\overline{A}) \neq \emptyset$.

Ist $\rho \in M(\overline{A})$ und $\rho' > \rho$, dann folgt mit derselben Begründung wie oben, dass $\rho' \in M(\overline{A})$. Ist $\rho \in M(\overline{A})$, dann folgt aus (8.4) (4) $\rho - \overline{a}_{11} > 0$ und daraus $\rho > 0$, das heißt $M(\overline{A})$ ist ein Intervall, das in den nicht-negativen reellen Zahlen enthalten ist.

Sei

$$\lambda := \inf\{\rho \in M(\overline{A})\}.$$

Aus den bisher gemachten Beobachtungen folgt $\lambda \geq 0$. Es bleibt zu zeigen, dass $\lambda \notin M(\overline{A})$ gilt.

Angenommen $\lambda \in M(\overline{A})$, dann gibt es nach Satz 8.4 (1) ein $x \geq 0$ so dass $y := (\lambda I - \overline{A})x > 0$ bzw. $\lambda x > \overline{A}x$. Dann aber gibt es offensichtlich ein $\varepsilon > 0$ mit $(\lambda - \varepsilon)x > \overline{A}x$, d. h. $\lambda - \varepsilon \in M(\overline{A})$. Dies aber widerspricht der Definition von λ. □

Lemma 8.9. *Ist $\overline{A}$ eine nicht-negative quadratische Matrix und $M(\overline{A}) = (\lambda, \infty)$, siehe Lemma 8.8, dann ist λ ein Eigenwert von $\overline{A}$, und es gibt einen semipositiven Eigenvektor x zu λ, d. h. einen Vektor $x \geq 0, x \neq 0$, mit $\overline{A}x = \lambda x$.*

Beweis. Aus dem Alternativsatz 3.3 folgt, dass entweder das Gleichungssystem $(\lambda I - \overline{A})x = 0$ eine semipositive Lösung x oder das strikte Ungleichungssystem $y^T(\lambda I - \overline{A}) > 0$ eine Lösung y hat.

Angenommen, es gibt einen Vektor y mit $y^T(\lambda I - \overline{A}) > 0$ (bzw. $\lambda y > \overline{A}^T y$). Wir wählen nun eine reelle Zahl $\rho > \lambda$, so dass $\rho y > \overline{A}^T y$ gilt. (Offensichtlich gibt es eine solche Zahl ρ.) Da $\rho \in M(\overline{A})$, sind nach (Satz 8.4 (4) alle Hauptabschnittsminoren von $(\rho I - \overline{A})$ positiv. Dann sind natürlich auch die von $(\rho I - \overline{A}^T)$ positiv, also existiert nach Satz 8.4 (6) die Inverse von $(\rho I - \overline{A}^T)$ und ist nicht-negativ. Daraus und aus $0 < (\rho I - \overline{A}^T)y$ folgt $0 \leq (\rho I - \overline{A}^T)^{-1}(\rho I - \overline{A}^T)y = y$.

Also gibt es zur Matrix $(\lambda I - \overline{A}^T)$ einen Vektor $y \geq 0$ mit $(\lambda I - \overline{A}^T)y > 0$. Folglich erfüllt $(\lambda I - \overline{A}^T)$ die Bedingung (1) von Satz 8.4. Aus Symmetriegründen gilt dann das Gleiche für die Matrix $(\lambda I - \overline{A})$. Das aber heißt nach Satz 8.4 (6), dass $(\lambda I - \overline{A})$ nichtnegativ invertierbar ist. Dies widerspricht jedoch der Tatsache, dass $\lambda \notin M(\overline{A})$.

Daraus folgt, dass die zweite der beiden Alternativen des Satzes 3.3 niemals gilt. Daraus folgt, dass $(\lambda I - \overline{A})x = 0$ eine semipositive Lösung x hat. Folglich ist dieser Vektor x ein semipositiver Eigenvektor zum Eigenwert λ von $(I - \overline{A})$. □

Der folgende Satz beschreibt sehr wichtige Eigenschaften nicht-negativer Matrizen.

Theorem 8.10. *(Frobenius-Perron) Sei $\overline{A}$ eine nicht-negative quadratische Matrix, und Λ sei ihr größter Eigenwert. Dann gilt*

- *(a) $\overline{A}$ hat einen nicht-negativen Eigenwert, d. h. $\Lambda \geq 0$.*
- *(b) Es gibt einen semipositiven Eigenvektor zu Λ.*
- *(c) $(\rho I - \overline{A})$ ist nichtnegativ invertierbar genau dann, wenn $\rho > \Lambda$.*
- *(d) Sind x ein semipositiver Vektor und $\mu \in I\!R$ mit $\overline{A}x \geq \mu x$, dann gilt $\mu \leq \Lambda$.*
- *(e) Ist ω ein Eigenwert von $\overline{A}$, dann gilt $|\omega| \leq \Lambda$.*

Beweis. Nach Lemma 8.9 ist die reelle Zahl Λ mit $M(\overline{A}) = (\Lambda, \infty)$ ein Eigenwert von $\overline{A}$. Nach Lemma 8.8 gilt $\Lambda \geq 0$. Daraus folgt (a).

Jede reelle Zahl $\rho > \Lambda$ ist in $M(\overline{A})$ enthalten, d. h. $(\rho I - \overline{A})$ ist invertierbar, also gibt es keinen von Null verschiedenen Vektor x mit $\rho x = \overline{A}x$. Daraus folgt, dass die Zahl Λ mit $M(\overline{A}) = (\Lambda, \infty)$ tatsächlich der größßte nicht-negative Eigenwert von $\overline{A}$ ist.

Damit folgt (c) sofort aus der Definition von $M(\overline{A})$, und (b) folgt aus Lemma 8.9.

Um (d) zu zeigen, nehmen wir an dass $\mu > \Lambda$ gilt. Dann ist $\mu \in M(\overline{A})$ und folglich $(\mu I - \overline{A})^{-1} \geq 0$. Ist $\overline{A}x \geq \mu x$, d. h. $0 \geq (\mu I - \overline{A})x$, dann gilt $0 \geq (\mu I - \overline{A})^{-1}(\mu I - \overline{A})x = x$. Also gibt es zu einer Zahl $\mu > \Lambda$ keinen semi-positiven Vektor x mit $\underline{A}x \geq \mu x$.

Sei ω ein beliebiger Eigenwert von $\underline{A}$, und sei z ein Eigenvektor zu ω, d. h. $\underline{A}z = \omega z$. Schreiben wir dieses Gleichungssystem explizit, so erhalten wir

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} z_j = \omega z_i \quad i = 1, \ldots, n.$$

Daraus folgt

$$\sum_{j=1}^{n} |\overline{a}_{ij}||z_j| \geq |\omega||z_i| \quad i = 1, \ldots, n.$$

Setzen wir $w := (|z_1|, \ldots, |z_n|)$, so erhalten wir wegen $\overline{a}_{ij} \geq 0$

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} w_j \geq |\omega| w_i \quad i = 1, \ldots, n, \text{ bzw.}$$

$$\overline{A}w \geq |\omega| w.$$

Da w semipositiv ist, folgt aus (d) $|\omega| \leq \Lambda$, womit (e) gezeigt wäre. $\square$

Der größte nicht-negative Eigenwert $\Lambda(\overline{A})$ einer nicht-negativen Matrix $\overline{A}$ wird häufig *Frobenius-Perron-Wurzel* von $\overline{A}$ genannt.

Damit ist es uns also gelungen, scharfe Schranken für die Werte ρ anzugeben, für die $(\rho I - \overline{A})$ nichtnegativ invertierbar ist. Darüber hinaus haben die inversen Matrizen von solchen Matrizen $\rho I - A$ eine sehr nützliche Potenzreihendarstellung, siehe Satz 8.7.

Leider ist es nicht so einfach, die Frobenius-Perron-Wurzel $\lambda(\overline{A})$ zu berechnen. Wir werden daher im folgenden eine Methode beschreiben, mit der man gute obere Schranken für $\lambda(\overline{A})$ bestimmen kann, und somit gute untere Schranken für Werte ρ, so dass $\rho I - A$ nichtnegativ invertierbar ist.

Wir erinnern daran, dass eine *Vektornorm* eine Abbildung $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist mit den Eigenschaften

$$\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{8.1.1}$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{8.1.2}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{8.1.3}$$

Für (n, n)-Matrizen A ist eine *Matrixnorm* eine Vektornorm (A wird als Vektor des $\mathbb{R}^{n^2}$ aufgefasst), so dass zusätzlich gilt:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad \forall \text{ Matrizen } A, B. \tag{8.1.4}$$

Eine Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{n^2}$ heißt *induziert* durch eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$, falls gilt

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} (= \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|) \tag{8.1.5}$$

Jede Norm von Matrizen, die durch (8.1.5) definiert ist, erfüllt automatisch die Bedingung (8.1.4), d. h. induzierte Matrixnormen sind in der Tat Matrixnormen. Für induzierte Matrixnormen gilt offensichtlich

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|. \tag{8.1.6}$$

Beispiele von induzierten Matrixnormen sind: Hölder-Normen:

$$(\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}, x \in \mathbb{R}^n)$$

Spaltensummen-Norm:

$$\|A\|_1 := \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \text{ induziert von}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Zeilensummen-Norm:

$$\|A\|_\infty := \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \text{ induziert von}$$

$$\|x\|_\infty = \max_j |x_j|$$

Spektral-Norm:

$$\|A\|_2 := \sqrt{\lambda(A^T A)}, \text{ wobei } \lambda(A^T A) \text{ der größte Eigenwert von } A^T A \text{ ist,}$$

$$\text{induziert von } \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$$

Zwischen den Eigenwerten von A und den Matrixnormen von A besteht folgende Beziehung:

Theorem 8.11. *Seien A eine (n,n)-Matrix, λ ein beliebiger Eigenwert von A. $\|.\|$ eine beliebige Matrixnorm, so dass* (8.1.6) *für eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$ erfüllt ist (dies ist z. B. für jede induzierte Matrixnorm der Fall), dann gilt*

$$|\lambda| \leq \|A\|.$$

Beweis. Seien λ ein Eigenvektor und x ein Eigenvektor von A zu λ, dann gilt $Ax = \lambda x$ und deshalb

$$|\lambda|\|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|.$$

$\square$

Satz 8.11 kann wie folgt verschärft werden

Theorem 8.12. *Für jede (n,n)-Matrix A und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine induzierte Matrixnorm $\| \, \|$, so dass für $\mu = \max\{|\lambda| : \lambda$ Eigenwert von $A\}$ gilt*

$$\mu \leq \|A\| \leq \mu + \varepsilon.$$

Beweis. siehe STOER, BULIRSCH (1973), [30], Seite 71. □

Damit haben wir noch weitere Kriterien kennengelernt, aus denen zum Beispiel folgt, dass die Input-Leontief-Matrix $(I - \overline{X})$ invertierbar ist.

Bisher haben wir noch nichts über die Invertierbarkeit der Output-Leontief-Matrix $(I - \underline{X})$ gesagt. Aus Folgerung 8.5 könnte man dies z. B. schließen, wenn für jede Zeile von $\underline{X}$ die Summe der Elemente der Zeile kleiner als 1 wäre. Wegen

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{x}_{ij} + \sum_{j=1}^{m} \underline{y}_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n$$

ist dies gleichbedeutend mit der Feststellung, dass jeder Sektor einen positiven Teil seiner Produktion an die Endnachfrage liefert. Dies lässt sich jedoch ökonomisch nicht ohne weiteres begründen, denn es konnte durchaus sein, dass ein Gut nur als Zwischenprodukt genutzt und nicht an die Endnachfrage geliefert wird.

Jedoch impliziert die Invertierbarkeit von $(I - \overline{X})$ trivialerweise die Invertierbarkeit von $(I - \underline{X})$, da nach (7.1.37) gilt

$$(I - \underline{X})^{-1} = \operatorname{diag}(x)^{-1}(I - \overline{X})^{-1} \operatorname{diag}(x).$$

Und analog folgt, dass $(I - \underline{X})^{-1}$ all die schönen Eigenschaften wie $(I - \overline{X})^{-1}$ hat (z. B. Potenzreihendarstellung, Nichtnegativität etc.).

Literaturverzeichnis

[1] A. V. Aho, J. E. Hopcroft & J. D. Ullman, *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley, Reading, 1974.

[2] A. Bachem, L. Butz, M. Grötschel, R. Schrader (Bearb.), B. Korte (Wiss. Leitung), *Input-Output-Analyse bei unternehmensgrößenspezifischen Fragestellungen*, Institut für Mittelstandsforschung, Bonn, 1981.

[3] A. Bermann & R. J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Science*, Academic Press, New York, 1979.

[4] A. S. Deif, *Advanced Matrix Theory for Scientists and Engineers*, Abacus Press, Tunbridge Wells, 1982.

[5] R. Dorfnan, P. Samuelson & R. Solow, *Linear Programming and Economic Analysis*, Mc Graw-Hill, New York, 1958.

[6] D. Gale, *The Theory of Linear Economic Models*, Mc Graw Hill, New York, 1960.

[7] G. Gelwig, *Bericht über die Erstellung einer Input-Output-Tabelle für die Bundesrepublik Deutschland mit vorläufigen Zahlen für 1961*, IFO-Institut München, 1964.

[8] K. Hildenbrand & W. Hildenbrand, *Lineare ökonomische Modelle*, Springer, Berlin, 1975.

[9] M.C. Kemp & Y. Kimura, *Introductions to Mathematical Economias*, Springer, Berlin, 1978.

[10] B. Korte, *Input-Output-Analyse*, Vorlesungsmanuskript, Universität Bonn, 1974.

[11] R. Krengel, *Aufstellung und Analyse von Input-Output-Tabellen*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1973, (Sonderheft zum allgemeinen statistischen Archiv, Heft 5).

[12] R. Krengel, J. Schintke, R. Stäglin, u. a., *Jährliche nominale Input-Output-Tabellen und Importmatrizen für die Bundesrepublik Deutschland 1954–1967*, DIW-Beiträge zur Strukturforschung 21, Duncker & Humblot, Berlin, 1972.

[13] P. Lancaster, *Theory of Matrices*, Academic Press, New York, 1969.

[14] W. Leontief, *Quantitative Input and Output Relations in the Economic System of the United States*, The Review of Economic Statistics, Vol. XVIII, no. 3, 105 - 125 (1936).

[15] W. Leontief, *The Structure of American Economy, 1919 - 1936*, 2nd Edition, Oxford University Press, New York, 1951.

[16] W. Leontief (ed.), *Studies in the Structure of American Economy*, Oxford University Press, New York, 1953.

[17] Udo Ludwig, Reiner Stäglin, Carsten Stahmer, Karl Heinz Siehndel, *Verflechtungsbilanzen für die Volkswirtschaft der DDR am Vorabend der deutschen Vereinigung*, Duncker & Humblot, Berlin, 1996.

[18] W. Münzenmaier, *Die Input-Output-Tabelle für Baden-Württemberg*, Statistisches Landesamt, Stuttgart, 1982.

[19] H. Nikaido, *Convex Structures and Economic Theory*, Academic Press, New York, 1968.

[20] W. Pfähler, *Regional Input-Output Analysis*, HWWA Studies of the Hamburg Institute of International Economics, vol. 66, Nomos Verlagsgesellschaft, Baden-Baden, 2001, ISBN 3-7890-7597-3.

[21] N. J. Pullman, *Matrix Theory and its Applications*, Dekker, New York, 1976.

[22] *Die Input-Output-Tabelle für Norddeutschland*, Dissertation, Universität Hamburg, 1975.

[23] J. Schumann, *Input-Output-Analyse*, Springer, Berlin, 1968.

[24] J. Skolka, *Anwendung der Input-Output-Analyse: Berechnungen am Beispiel der österreichischen Wirtschaftsstruktur*, Fischer, Stuttgart, 1974.

[25] R. Stäglin, *Input-Output-Rechnung: Aufstellung von Input-Output-Tabellen, Konzeptionelle und empirisch statistische Probleme*, DIW-Beiträge zur Strukturforschung, Heft 4, Duncker & Humblot, Berlin, 1968.

[26] Reiner Stäglin (Mitautoren: S. M. Kapunda, J. M. Komba and Input-Output Table Working Group), *Input-Output Table of Tanzania for 1992, Results of the Input-Output Table Construction, Research Papers and Report No. 1*, National Bureau of Statistics, Dar es Salaam, Dec. 1999.

[27] R. Stäglin & H. Wessels, *Input-Output-Tabellen und Input-Output-Analysen für die Bundesrepublik Deutschland*, DIW-Beiträge zur Strukturforschung, Heft 6, Duncker & Humblot, Berlin, 1969.

[28] Statistisches Bundesamt, III C, *Ergebnisse der Input-Output-Rechnung 1975*, Sonderdruck, 1981

[29] J. Stoer, *Einführung in die Numerische Mathematik I*, Springer, Berlin, 1972.

[30] J. Stoer, R. Bulirsch, *Einführung in die Numerische Mathematik II*, Springer, Berlin, 1973.

[31] C. Stahmer, P. Bleses, B. Meyer, *INPUT-OUTPUT-RECHNUNG: Elemente zur Politikberatung*, Statistisches Bundesamt, 2000.
(siehe: http://www.destatis.de/presse/deutsch/pm2000/input-output-rechnung.pdf)