

# Diskrete Optimierung

(Algorithmische Diskrete Mathematik II, kurz ADM II)

Skriptum zur Vorlesung im SS 2013

Prof. Dr. Martin Grötschel  
Institut für Mathematik  
Technische Universität Berlin

Version vom 25. April 2013



## Vorwort

Bei dem vorliegenden Skript handelt es sich um die Ausarbeitung der vierstündigen Vorlesung „Algorithmische Diskrete Mathematik II (Diskrete Optimierung)“ (mit zugehörigen Übungen und Tutorien), die die zweite Vorlesung des dreisemestrigen Zyklus „Algorithmische Diskrete Mathematik“ bildet. Diese Vorlesung wurde von mir im Sommersemester 2013 zusammen mit Axel Werner an der TU Berlin gehalten, der auch an der Ausarbeitung des vorliegenden Vorlesungsskripts beteiligt war.

Wir gehen in dieser Vorlesung davon aus, dass die Studierenden die Vorlesung „Algorithmische Mathematik I (Einführung in die Lineare und Kombinatorische Optimierung)“ gehört haben und das zugehörige Vorlesungsskriptum

[http://www.zib.de/groetschel/teaching/WS1213/Skriptum\\_ADM\\_I\\_130326.pdf](http://www.zib.de/groetschel/teaching/WS1213/Skriptum_ADM_I_130326.pdf)

kennen. Wir werden im vorliegenden Skript häufig auf das ADM I Skript Bezug nehmen und übernehmen die Notation aus diesem Skript.

Der Inhalt dieser Vorlesung besteht aus einer (bunten) Mischung von Polyedertheorie, Matroid- und Graphentheorie, linearer, kombinatorischer und gemischt-ganzzahliger Optimierung. Einige Themen aus ADM I (z. B. Polyeder, Simplex-Algorithmus, Approximationsverfahren) werden erneut aufgegriffen und vertieft. Wir versuchen dabei, verschiedene Aspekte der diskreten Mathematik miteinander zu verschränken und Bezüge zwischen den einzelnen Themenbereichen sichtbar zu machen. Die (algorithmische) diskrete Mathematik besteht nicht aus voneinander unabhängigen Einzelthemen und hochspezialisierten Werkzeugkästen, erst die Kombination der vielen Strukturen, Analysemethoden und algorithmischen Ansätzen macht diese sich stark entwickelnde Teildisziplin der Mathematik zu einem Gebiet, das neben schöner Theorie eine große Vielfalt an realen Anwendungen bietet.

Es gibt kein einzelnes Buch, das den gesamten, in dieser Vorlesung abgehandelten Themenkreis abdeckt. Daher sind in die einzelnen Kapitel Literaturhinweise eingearbeitet worden. Hinweise auf aktuelle Lehrbücher, die als Begleittexte zur Vorlesung geeignet sind finden sich auf der zur Vorlesung gehörigen Webseite:

<http://www.zib.de/groetschel/teaching/SS2013/Lecture-SS2013deutsch.html>

Die vorliegende Ausarbeitung ist ein Vorlesungsskript und kein Buch. Obwohl mit der gebotenen Sorgfalt geschrieben, war nicht genügend Zeit für das bei Lehrbüchern notwendige intensive Korrekturlesen und das Einarbeiten umfassender Literaturhinweise. Die daher vermutlich vorhandenen Fehler bitte ich zu entschuldigen (und mir wenn möglich mitzuteilen). Das Thema wird nicht erschöpfend behandelt. Das Manuskript enthält nur die wesentlichen Teile der Vorlesung. Insbesondere sind die in der Vorlesung erfolgten Schilderungen komplexer Anwendungsfälle, der Schwierigkeiten bei der mathematischen Modellierung praktischer Probleme, der Probleme bei der praktischen Umsetzung und die Darstellung der Erfolge, die in den letzten Jahren beim Einsatz der hier vorgestellten Methodik in der Industrie erzielt wurden, nicht in das Skript aufgenommen worden.

Martin Grötschel



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Polyedertheorie</b>	<b>1</b>
1.1	Transformationen von Polyedern . . . . .	1
1.2	Kegelpolarität . . . . .	3
1.3	Darstellungssätze . . . . .	6
1.4	Gültige Ungleichungen, Seitenflächen und Dimension . . . . .	10
1.5	Facetten und Redundanz . . . . .	15
1.6	Rezessionskegel, Linienraum und Homogenisierung . . . . .	20
1.7	Extremalen von spitzen Polyedern . . . . .	24
1.8	Weitere Darstellungssätze . . . . .	27



# 1 Polyedertheorie

Der zweite Teil des Vorlesungszyklus beginnt mit dem Ausbau der Polyedertheorie. Wir werden weitere Darstellungen von Polyedern angeben und neue Operationen mit Polyedern einführen, welche später an verschiedenen Stellen benötigt werden. Wir werden dabei meistens von der geometrischen Anschauung ausgehen und die Begriffe von dieser Sicht aus motivieren. Besonderes Augenmerk wird allerdings auch auf die analytische Beschreibung der geometrischen Konzepte gelegt. Weiterführende Details zur Polyedertheorie finden sich z. B. in Grünbaum (2003), Ziegler (2010) oder auch Matoušek (2002).

Wir erinnern daran, dass ein Polyeder  $P$  die Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems  $Ax \leq b$  ist und benutzen dafür die Bezeichnung  $P = P(A, b)$ . Polyeder der Form  $\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$  bezeichnen wir mit  $P^=(A, b)$ . Ein Polytop ist ein beschränktes Polyeder.

## 1.1 Transformationen von Polyedern

Wir haben in der Vorlesung ADM I bereits Projektionen von Polyedern entlang eines Richtungsvektors  $c$  untersucht und in Satz (10.13) festgestellt, dass eine derartige Projektion wieder ein Polyeder ist. Wenn man mehrfach hintereinander projiziert, bleibt diese Eigenschaft natürlich erhalten. Sind  $A \in \mathbb{K}^{(m,n)}$ ,  $b \in \mathbb{K}^m$  und  $k, r \geq 0$  mit  $k + r = n$ , so nennt man die Menge

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{K}^k \mid \exists y \in \mathbb{K}^r \text{ mit } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in P(\tilde{A}, b) \right\}$$

eine *Projektion von  $P(A, b)$  auf  $\mathbb{K}^k$* . Hierbei ist  $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{(m,n)}$  eine Matrix, die durch Spaltenvertauschung aus  $A$  hervorgeht. Offensichtlich folgt aus Satz (10.13):

**(1.1) Bemerkung.** Jede Projektion eines Polyeders  $P(A, b) \subseteq \mathbb{K}^n$  auf  $\mathbb{K}^k$ ,  $k \leq n$ , ist ein Polyeder.  $\triangle$

Dieser Sachverhalt ist in größerer Allgemeinheit gültig. Erinnern wir uns daran, dass jede *affine Abbildung*  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^k$  gegeben ist durch eine Matrix  $D \in \mathbb{K}^{(k,n)}$  und einen Vektor  $d \in \mathbb{K}^k$ , so dass

$$f(x) = Dx + d \quad \forall x \in \mathbb{K}^n.$$

Für derartige Abbildungen gilt:

**(1.2) Satz.** *Affine Bilder von Polyedern sind Polyeder.*  $\triangle$

**Beweis.** Seien  $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{K}^n$  ein Polyeder und  $f(x) = Dx + d$  eine affine Abbildung von  $\mathbb{K}^n$  in den  $\mathbb{K}^k$ , dann gilt

$$\begin{aligned} f(P) &= \{y \in \mathbb{K}^k \mid \exists x \in \mathbb{K}^n \text{ mit } Ax \leq b \text{ und } y = Dx + d\} \\ &= \{y \in \mathbb{K}^k \mid \exists x \in \mathbb{K}^n \text{ mit } B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \bar{b}\}, \end{aligned}$$

wobei

$$B := \begin{pmatrix} A & 0 \\ D & -I \\ -D & I \end{pmatrix}, \quad \bar{b} := \begin{pmatrix} b \\ -d \\ d \end{pmatrix}.$$

Wenden wir nun das Projektionsverfahren (10.11) aus ADM I iterativ auf  $B, \bar{b}$  und die Richtungsvektoren  $e_1, e_2, \dots, e_n$  an, so erhalten wir nach Satz (10.12) ein System  $C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq c$  mit  $C = (0, \bar{C})$ , und es gilt:

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{K}^k : (\exists x \in \mathbb{K}^n \text{ mit } B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \bar{b}) &\iff \exists x \in \mathbb{K}^n \text{ mit } C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq c \\ &\iff \bar{C}y \leq c. \end{aligned}$$

Daraus folgt  $f(P) = \{y \in \mathbb{K}^k \mid \bar{C}y \leq c\}$  ist ein Polyeder.  $\square$

Man beachte, dass der Beweis von Satz (1.2) durch die Anwendung der Fourier-Motzkin-Elimination sogar ein Verfahren zur expliziten Konstruktion des affinen Bildes von  $P(A, b)$  beinhaltet.

Wir erinnern hier an unsere Konventionen zur Bildung von linearen, affinen, konvexen und konischen Hüllen von Mengen und Matrizen, die in Abschnitt 2.2.3 des ADM I Skripts zu finden sind. Aus Satz (1.2) ergibt sich dann direkt die folgende (auch aus anderen Gründen unmittelbar einsichtige) Beobachtung.

**(1.3) Korollar (Satz von Weyl).** Für jede Matrix  $A \in \mathbb{K}^{(m,n)}$  gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{lin}(A) \\ \text{aff}(A) \\ \text{conv}(A) \\ \text{cone}(A) \end{array} \right\} \text{ ist ein Polyeder.}$$

$\triangle$

**Beweis.** Wir zeigen die Behauptung für die konische Hülle. Alle anderen Fälle beweist man analog.

$$\begin{aligned} \text{cone}(A) &= \{x \in \mathbb{K}^m \mid \exists y \geq 0 \text{ mit } x = Ay\} \\ &= \{x \in \mathbb{K}^m \mid \exists y \in \mathbb{K}^n \text{ mit } \begin{pmatrix} I & -A \\ -I & A \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq 0\}. \end{aligned}$$

Die letzte Menge ist die Projektion eines Polyeders im  $\mathbb{K}^{m+n}$  auf den  $\mathbb{K}^m$ , also nach (1.1) bzw. (1.2) ein Polyeder.  $\square$



Offenbar besagt die obige Folgerung nichts anderes als: Die lineare, affine, konvexe oder konische Hülle einer endlichen Teilmenge des  $\mathbb{K}^n$  ist ein Polyeder. Für die konische Hülle hat dies WEYL (1935) gezeigt (daher der Name für Korollar (1.3)).

**(1.4) Korollar.** *Die Summe  $P = P_1 + P_2$  zweier Polyeder  $P_1, P_2$  ist ein Polyeder.  $\triangle$*

**Beweis.** Es seien  $P_1 = P(A, a)$ ,  $P_2 = P(B, b)$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} P = P_1 + P_2 &= \{x + y \in \mathbb{K}^n \mid Ax \leq a, By \leq b\} \\ &= \{z \in \mathbb{K}^n \mid \exists x, y \in \mathbb{K}^n \text{ mit } Ax \leq a, By \leq b, z = x + y\} \\ &= \{z \in \mathbb{K}^n \mid \exists x, y \in \mathbb{K}^n \text{ mit } A(z - y) \leq a, B(z - x) \leq b, z = x + y\} \\ &= \{z \in \mathbb{K}^n \mid \exists x, y \in \mathbb{K}^n \text{ mit } D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}\} \end{aligned}$$

mit

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -A & A \\ -B & 0 & B \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist  $P$  die Projektion eines Polyeders des  $\mathbb{K}^{3n}$  auf den  $\mathbb{K}^n$ , und somit nach (1.1) ein Polyeder.  $\square$

Verbinden wir nun die Erkenntnis aus (1.3), dass  $\text{conv}(A)$  und  $\text{cone}(B)$  Polyeder sind, mit (1.4), so erhalten wir:

**(1.5) Korollar.** *Es seien  $A \in \mathbb{K}^{(m,n)}$ ,  $B \in \mathbb{K}^{(m,n')}$ , dann gilt*

$$P = \text{conv}(A) + \text{cone}(B)$$

*ist ein Polyeder.*  $\triangle$

Die obige Folgerung erscheint (durch geschickte Vorbereitung) völlig trivial, sie ist jedoch eine durchaus beachtenswerte Erkenntnis, denn wir werden bald zeigen, dass in der Tat alle Polyeder von der Form  $\text{conv}(A) + \text{cone}(B)$  sind.

## 1.2 Kegelpolarität

Es gibt mehrere Möglichkeiten die Umkehrung von (1.5) zu beweisen. Eine besondere elegante, die eine geometrische Version des Farkas-Lemmas benutzt, führt über die Kegelpolarität. Diese Operation mag zunächst nur als technisches Hilfsmittel erscheinen. Sie und ihre Verallgemeinerungen (allgemeine Polaritäten, Blocker, Antiblocker) sind jedoch bedeutende Methoden in der Polyedertheorie und der linearen sowie ganzzahligen Optimierung.

Wir beginnen mit einer Neuinterpretation des Farkas-Lemmas (11.2)(c) aus ADM I. Dieses besagt

$$\exists x \geq 0, Ax = b \iff \forall u (A^T u \geq 0 \Rightarrow u^T b \geq 0).$$

Durch diese Aussage sind offenbar auch alle rechten Seiten  $b$  charakterisiert, für die  $x \geq 0$ ,  $Ax = b$  eine Lösung hat. Nach Definition gilt  $\text{cone}(A) = \{b \in \mathbb{K}^m \mid \exists x \geq 0 \text{ mit } Ax = b\}$ , also können wir aus der Aussage (11.2)(c) des ADM I Skripts folgern:

**(1.6) Bemerkung.** Für alle Matrizen  $A \in \mathbb{K}^{(m,n)}$  gilt:

$$\text{cone}(A) = \{b \in \mathbb{K}^m \mid u^T b \leq 0 \forall u \in P(A^T, 0)\}. \quad \triangle$$

Bemerkung (1.6) kann man geometrisch wie folgt beschreiben. Die Menge der zulässigen rechten Seiten  $b$  von  $Ax = b$ ,  $x \geq 0$  ist genau die Menge aller Vektoren  $b \in \mathbb{K}^m$ , welche einen stumpfen Winkel mit allen Vektoren des Kegels  $P(A^T, 0)$  bilden. Allgemeiner definieren wir nun für jede beliebige Menge  $S \subseteq \mathbb{K}^n$

$$S^\circ := \{y \in \mathbb{K}^n \mid y^T x \leq 0 \forall x \in S\}.$$

$S^\circ$  ist die Menge aller Vektoren, die einen stumpfen Winkel mit allen Vektoren aus  $S$  bilden.  $S^\circ$  heißt *polarer Kegel* von  $S$ . (Überzeugen Sie sich, dass  $S^\circ$  ein Kegel ist!) Wir erinnern hier an das in der linearen Algebra definierte *orthogonale Komplement*

$$S^\perp := \{y \in \mathbb{K}^n \mid y^T x = 0 \forall x \in S\}.$$

Offensichtlich gilt  $S^\perp \subseteq S^\circ$ . Unter Benutzung der obigen Definition können wir Bemerkung (1.6) nun auch wie folgt aufschreiben.

**(1.7) Korollar.** Für alle Matrizen  $A \in \mathbb{K}^{(m,n)}$  gilt

$$P(A^T, 0)^\circ = \text{cone}(A) \quad \text{und} \quad P(A, 0)^\circ = \text{cone}(A^T). \quad \triangle$$

Korollar (1.7) und die vorher gemachten Beobachtungen wollen wir an einem Beispiel erläutern. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

dann sind die Kegel  $P(A, 0)$  und  $P(A, 0)^\circ$  in Abbildung 1.1 gezeichnet.

$P(A, 0)^\circ$  besteht also aus allen Vektoren, die mit den Elementen des Kegels  $P(A, 0)$  einen stumpfen Winkel bilden, und das sind gerade diejenigen Vektoren, die als konische Kombination der Normalenvektoren  $A_i$  dargestellt werden können, also

$$P(A, 0)^\circ = \text{cone} \left( \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

Ferner gilt:  $Ax = b$ ,  $x \geq 0$  ist genau dann lösbar, wenn  $b \in P(A, 0)^\circ$  gilt. Daraus folgt z. B., dass  $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $x \geq 0$  nicht lösbar ist, während  $Ax = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $x \geq 0$  eine Lösung hat.

Aus der Definition des polaren Kegels und des orthogonalen Komplements ergeben sich unmittelbar einige triviale Beziehungen, deren Beweis wir dem Leser zur Übung überlassen. Wir schreiben im Weiteren

$$S^{\circ\circ} := (S^\circ)^\circ.$$

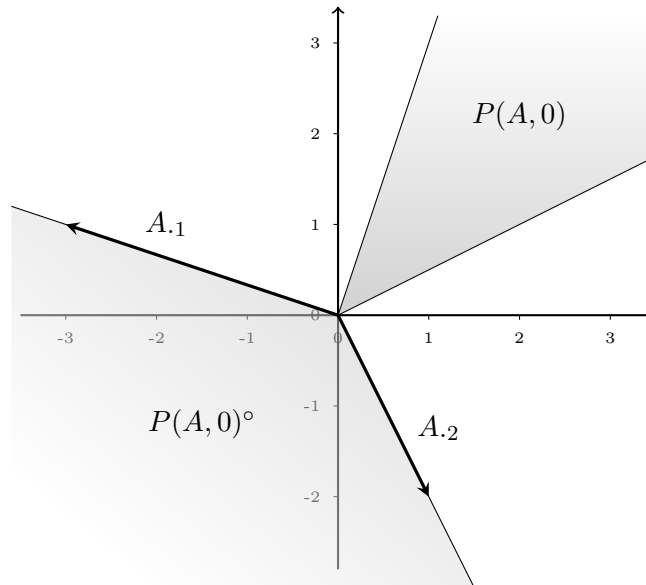


Abbildung 1.1: Kegel und polarer Kegel

**(1.8) Bemerkung (Hausaufgabe).** Für  $S, S_i \subseteq \mathbb{K}^n$ ,  $i = 1, \dots, k$  gilt:

- (a)  $S_i \subseteq S_j \implies S_j^\circ \subseteq S_i^\circ$
- (b)  $S \subseteq S^{\circ\circ}$
- (c)  $\left(\bigcup_{i=1}^k S_i\right)^\circ = \bigcap_{i=1}^k S_i^\circ$
- (d)  $S^\circ = \text{cone}(S^\circ) = (\text{cone}(S))^\circ$
- (e)  $S = \text{lin}(S) \implies S^\circ = S^\perp$ . Gilt die Umkehrung?
- (f) Ersetzen wir in (a), ..., (d) "o" durch " $\perp$ ", sind dann auch noch alle Behauptungen wahr?  $\triangle$

**(1.9) Bemerkung (Hausaufgabe).** Für welche Mengen  $S \subseteq \mathbb{K}^n$  gilt

- (a)  $S^\circ = S^{\circ\circ\circ}$ ,
- (b)  $S = S^\circ$ ?  $\triangle$

Die Aussage (1.8)(d) impliziert insbesondere:

**(1.10) Korollar.**  $\text{cone}(A^T)^\circ = P(A, 0)$ .  $\triangle$

**Beweis.**  $(\text{cone}(A^T))^\circ = \text{cone}((A^T)^\circ) = (A^T)^\circ = \{x \mid Ax \leq 0\} = P(A, 0)$ .  $\square$

Das folgende Korollar aus (1.7) und (1.10) wird in der Literatur häufig mit einem Namen belegt.

**(1.11) Satz (Polarensatz).** Für jede Matrix  $A \in \mathbb{K}^{(m,n)}$  gilt:

$$\begin{aligned} P(A, 0)^{\circ\circ} &= P(A, 0), \\ \text{cone}(A)^{\circ\circ} &= \text{cone}(A). \end{aligned}$$

△

**Beweis.**

$$\begin{aligned} P(A, 0) &\stackrel{(1.10)}{=} \text{cone}(A^T)^\circ \stackrel{(1.7)}{=} P(A, 0)^{\circ\circ}, \\ \text{cone}(A) &\stackrel{(1.7)}{=} P(A^T, 0)^\circ \stackrel{(1.10)}{=} \text{cone}(A)^{\circ\circ}. \end{aligned}$$

□

Unser kurzer Exkurs über Kegelpolarität ist damit beendet.

### 1.3 Darstellungssätze

Wir wollen nun zeigen, dass Polyeder nicht nur in der Form  $P(A, b)$  dargestellt werden können und benutzen dazu die bisher entwickelte Maschinerie.

**(1.12) Satz (Minkowski (1896)).** Eine Teilmenge  $K \subseteq \mathbb{K}^n$  ist genau dann ein polyedrischer Kegel, wenn  $K$  die konische Hülle von endlich vielen Vektoren ist. Mit anderen Worten: Zu jeder Matrix  $A \in \mathbb{K}^{(m,n)}$  gibt es eine Matrix  $B \in \mathbb{K}^{(n,k)}$ , so dass

$$P(A, 0) = \text{cone}(B)$$

gilt und umgekehrt.

△

**Beweis.**  $P(A, 0) \stackrel{(1.10)}{=} \text{cone}(A^T)^\circ \stackrel{(1.3)}{=} P(B^T, 0)^\circ \stackrel{(1.7)}{=} \text{cone}(B).$

□

**(1.13) Satz.** Es seien  $A \in \mathbb{K}^{(m,n)}$ ,  $b \in \mathbb{K}^m$ , dann existieren endliche Mengen  $V, E \subseteq \mathbb{K}^n$  mit

$$P(A, b) = \text{conv}(V) + \text{cone}(E).$$

△

**Beweis.** Setze

$$H := P\left(\begin{pmatrix} A & -b \\ 0^T & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

dann gilt:  $x \in P(A, b) \iff \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in H$ .  $H$  ist nach Definition ein polyedrischer Kegel. Also gibt es nach Satz (1.12) eine Matrix  $B \in \mathbb{K}^{(n+1,k)}$  mit  $H = \text{cone}(B)$ . Aufgrund der Definition von  $H$  hat die letzte Zeile von  $B$  nur nichtnegative Elemente. Durch Skalieren

der Spalten von  $B$  und Vertauschen von Spalten können wir  $B$  in eine Matrix  $\overline{B}$  so umformen, dass gilt

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} V & E \\ \mathbf{1}^T & 0^T \end{pmatrix}, \quad \text{cone}(\overline{B}) = H.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} x \in P(A, b) &\iff \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in H \\ &\iff x = V\lambda + E\mu \text{ mit } \lambda^T \mathbf{1} = 1, \lambda, \mu \geq 0 \\ &\iff x \in \text{conv}(V) + \text{cone}(E). \end{aligned} \quad \square$$

**(1.14) Korollar.** Eine Teilmenge  $P \subseteq \mathbb{K}^n$  ist genau dann ein Polytop, wenn  $P$  die konvexe Hülle endlich vieler Vektoren ist.  $\triangle$

**Beweis.** Sei  $V \subseteq \mathbb{K}^n$  endlich und  $P = \text{conv}(V)$ , dann ist  $P$  nach (1.3) ein Polyeder. Ist  $x \in P$ , so gilt  $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$ ,  $v_i \in V$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ , und somit  $\|x\| \leq \sum_{i=1}^k \|v_i\|$ , d. h.  $P \subseteq \{x \mid \|x\| \leq \sum_{v \in V} \|v\|\}$ . Also ist  $P$  beschränkt, d. h.  $P$  ist ein Polytop.

Ist umgekehrt  $P$  ein Polytop, so gibt es nach Satz (1.13) endliche Mengen  $V, E$  mit  $P = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$ . Gibt es einen Vektor  $e \in E$  mit  $e \neq 0$ , so gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ :  $x + ne \in P$  für alle  $x \in \text{conv}(V)$ . Also ist  $P$  unbeschränkt, falls  $E \setminus \{0\} \neq \emptyset$ . Daraus folgt  $E \in \{\emptyset, \{0\}\}$ , und dann gilt trivialerweise  $\text{conv}(V) = \text{conv}(V) + \text{cone}(E) = P$ .  $\square$

**(1.15) Satz (Darstellungssatz).** Eine Teilmenge  $P \subseteq \mathbb{K}^n$  ist genau dann ein Polyeder, wenn  $P$  die Summe eines Polytops und eines polyedrischen Kegels ist, d. h. wenn es endliche Mengen  $V, E \subseteq \mathbb{K}^n$  gibt mit

$$P = \text{conv}(V) + \text{cone}(E). \quad \triangle$$

**Beweis.** Kombiniere (1.12), (1.13), (1.14) und (1.5).  $\square$

Ist  $P \subseteq \mathbb{K}^n$  ein Polyeder, so wissen wir nunmehr, dass es für  $P$  zwei mögliche Darstellungen gibt. Es gilt nämlich

$$P = P(A, b) = \text{conv}(V) + \text{cone}(E),$$

wobei  $A$  eine  $(m, n)$ -Matrix,  $b \in \mathbb{K}^m$  und  $V, E$  endliche Mengen sind. Diese beiden Darstellungen sind grundsätzlich verschieden, was natürlich in vielerlei Hinsicht nützlich sein kann. Manche Aussagen über Polyeder sind völlig trivial, wenn man von der einen Beschreibung ausgeht, während sie aus der anderen Beschreibung nicht unmittelbar folgen.

Die Darstellung  $P(A, b)$  nennt man auch *äußere Beschreibung* von  $P$ . Der Grund für diese Bezeichnung liegt darin, dass man wegen

$$P = \bigcap_{i=1}^m \{x \mid A_i x \leq b_i\} \subseteq \{x \mid A_i x \leq b_i\},$$

das Polyeder  $P$  als Durchschnitt von größeren Mengen betrachten kann.  $P$  wird sozusagen „von außen“ durch sukzessives Hinzufügen von Ungleichungen (bzw. Halbräumen) konstruiert.

Hingegen nennt man  $\text{conv}(V) + \text{cone}(E)$  eine *innere Beschreibung* von  $P$ . Ist  $E = \emptyset$ , so ist die Bezeichnung offensichtlich, denn  $V \subseteq P$  und somit wird  $P$  durch konvexe Hüllenbildung von Elementen von sich selbst erzeugt. Analoges gilt, wenn  $P$  ein polyedrischer Kegel ist. Sind jedoch  $V$  und  $E$  nicht leer, dann ist  $E$  nicht notwendigerweise eine Teilmenge von  $P$ , jedoch gelingt es eben aus den Vektoren  $v \in V$  zusammen mit den Vektoren  $e \in E$  das Polyeder  $P$  „von innen her“ zu konstruieren.

Die Sätze (1.12), (1.14) und (1.15) beinhalten weitere wichtige Charakterisierungen von polyedrischen Kegeln, Polytopen und Polyedern. Wir erinnern uns aus der linearen Algebra daran, dass jeder lineare Teilraum  $L$  des  $\mathbb{K}^n$  eine endliche Basis hat, d. h. eine endliche Teilmenge  $B$  besitzt, so dass  $B$  linear unabhängig ist und  $L = \text{lin}(B)$  gilt. Die linearen Teilräume des  $\mathbb{K}^n$  sind also diejenigen Teilmengen des  $\mathbb{K}^n$ , deren Elemente durch Linearkombinationen einer endlichen Menge erzeugt werden können. Nach (1.14) sind Polytope genau diejenigen Teilmengen des  $\mathbb{K}^n$ , die durch Konvexkombinationen einer endlichen Menge erzeugt werden können.

Wir werden später sehen, dass es sogar eine eindeutig bestimmte minimale (im Sinne der Mengeninklusion) endliche Menge  $V \subseteq \mathbb{K}^n$  gibt mit  $P = \text{conv}(V)$ , d. h. Polytope haben sogar eine eindeutig bestimmte „konvexe Basis“. Nach (1.12) sind polyedrische Kegel genau diejenigen Teilmengen des  $\mathbb{K}^n$ , die ein endliches „Kegelerzeugendensystem“ haben. Auch hier gibt es natürlich minimale endliche Mengen, die die Kegel konisch erzeugen. Aber nur unter zusätzlichen Voraussetzungen haben zwei minimale konische Erzeugendensysteme auch gleiche Kardinalität, und Eindeutigkeit gilt lediglich bis auf Multiplikation mit positiven Skalaren. Häufig nennt man eine Teilmenge  $T$  des  $\mathbb{K}^n$  *endlich erzeugt*, falls  $T = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$  für endliche Mengen  $V, E$  gilt. Nach (1.15) sind also die Polyeder gerade die endlich erzeugten Teilmengen des  $\mathbb{K}^n$ . Fassen wir zusammen, so gilt:

**(1.16) Bemerkung.** Ist  $T \subseteq \mathbb{K}^n$ , so gilt

- (a)  $T$  ist ein linearer Teilraum  $\iff T$  ist die lineare Hülle einer endlichen Menge.
- (b)  $T$  ist ein affiner Teilraum  $\iff T$  ist die affine Hülle einer endlichen Menge.
- (c)  $T$  ist ein polyedrischer Kegel  $\iff T$  ist die konische Hülle einer endlichen Menge.
- (d)  $T$  ist ein Polytop  $\iff T$  ist die konvexe Hülle einer endlichen Menge.
- (e)  $T$  ist ein Polyeder  $\iff T$  ist endlich erzeugt. △

## Exkurs: Andere Darstellungsformen von Polyedern

Satz (1.15) und Bemerkung (1.16) zeigen, dass Polyeder auch durch Hüllenbildungsprozesse (linear, affin, konisch, konvex) und nicht nur durch Durchschnitte (Halbräume,

Hyperebenen), die uns in ADM I (siehe (2.1)) zur Definition gedient haben, charakterisiert werden können. Dies sind jedoch nicht die einzigen Möglichkeiten, Polyeder zu beschreiben. Wir können hierauf nicht vertieft eingehen, sondern erwähnen nur zwei Beispiele.

Der harmlos aussehende absolute Betrag  $|\cdot|$  ermöglicht in manchen Fällen enorm kompakte Darstellungen. Wir betrachten als Beispiel

$$K(n) := \text{conv}\{e_1, \dots, e_n, -e_1, \dots, -e_n\},$$

wobei  $e_i$  den  $i$ -ten Einheitsvektor im  $\mathbb{K}^n$  bezeichnet.  $K(n)$  wird in der Literatur *Kreuzpolytop* genannt. Zur Definition des Kreuzpolytops  $K(n)$  durch Hüllenbildung benötigt man also  $2n$  Vektoren. Will man  $K(n)$  als Durchschnitt von Halbräumen darstellen, so sind (beweisbar)  $2^n$  Ungleichungen erforderlich:

$$K(n) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid a^T x \leq 1 \ \forall a \in \{-1, 1\}^n\}.$$

Erlaubt man die Benutzung des Absolutbetrages, so ergibt sich

$$K(n) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1\}.$$

Eine einzige Ungleichung genügt in diesem Falle also zur Darstellung des Kreuzpolytops. Das Kreuzpolytop  $K(3)$  im dreidimensionalen Raum ist das bekannte Oktaeder.

Tiefliegende Sätze der reellen algebraischen Geometrie, die auf Bröcker (1991) und Scheiderer (1989) zurückgehen, siehe hierzu Bochnak et al. (1998), zeigen, dass der *Stabilitätsindex* jeder „basic closed semi-algebraic set“ im Raum  $\mathbb{R}^n$  den Wert  $m := \frac{n(n+1)}{2}$  hat.

Polyeder sind spezielle „basic closed semi-algebraic sets“. Übersetzt in „unsere“ Sprache und bezogen auf Polyeder besagt das Resultat von Bröcker und Scheiderer, dass es zu jedem Polyeder  $P$  Polynome  $p_1, \dots, p_m$  in  $n$  reellen Variablen mit reellen Koeffizienten gibt, so dass

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, \frac{n(n+1)}{2}\}$$

gilt. Der Beweis ist rein „existenziell“ und liefert kein Konstruktionsverfahren für diese  $m$  Polynome. Es gibt allgemeine semi-algebraische Mengen, bei denen man auch beweisbar  $m$  Polynome braucht.

Für den Spezialfall von Polyedern wurde in Bosse et al. (2005) gezeigt, dass man im  $\mathbb{R}^n$  die benötigten Polynome algorithmisch bestimmen kann und dass man sogar mit  $2n$  Polynomen auskommt. Es wird vermutet, dass sogar  $n$  Polynome zur Darstellung von Polyedern ausreichen (und dass diese auch konstruiert werden können). Für einen wichtigen Spezialfall haben dies Averkov und Henk bewiesen, der allgemeine Fall ist noch offen.

Eine Konsequenz der oben geschilderten Ergebnisse ist, dass das Kreuzpolytop  $K(n)$  statt mit  $2^n$  linearen Ungleichungen mit lediglich  $2n$  Polynomialgleichungen beschrieben werden kann.

## 1.4 Gültige Ungleichungen, Seitenflächen und Dimension

In Abschnitt 1.2 haben wir bereits einen Polarentyp, die Kegelpolare, zur Beweisvereinfachung eingeführt. Hier wollen wir eine weitere Polare betrachten, die es uns ermöglichen wird, eine Charakterisierung bezüglich  $P(A, b)$  in eine Charakterisierung bezüglich  $\text{conv}(V) + \text{cone}(E)$  zu übertragen.

**(1.17) Definition.** Es seien  $S \subseteq \mathbb{K}^n$ ,  $a \in \mathbb{K}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Die Menge

$$S^\gamma := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1} \mid a^T x \leq \alpha \ \forall x \in S \right\}$$

heißt  $\gamma$ -Polare von  $S$ .  $\triangle$

Die  $\gamma$ -Polare  $S^\gamma$  kann als die „Menge aller gültigen Ungleichungen bezüglich  $S$ “ betrachtet werden. Wir wollen nun die  $\gamma$ -Polare eines Polyeders charakterisieren.

**(1.18) Satz.** Es sei  $P \subseteq \mathbb{K}^n$ ,  $P \neq \emptyset$ , ein Polyeder mit den Darstellungen  $P = P(A, b) = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$ , dann gilt:

$$(a) \ P^\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1} \mid \exists u \geq 0, u^T A = a^T, u^T b \leq \alpha \right\} = \text{cone} \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ b^T & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \ P^\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1} \mid \begin{pmatrix} V^T & -\mathbf{1} \\ E^T & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \leq 0 \right\} = P \left( \begin{pmatrix} V^T & -\mathbf{1} \\ E^T & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right). \quad \triangle$$

**Beweis.**

$$(a) \quad \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \in P^\gamma \iff Ax \leq b, a^T x > \alpha \text{ inkonsistent}$$

$$\iff \exists u \geq 0, v > 0 \text{ mit } u^T A - v a^T = 0, u^T b - v \alpha \leq 0 \text{ (ADM I, (11.5))}$$

$$\iff \exists u \geq 0 \text{ mit } u^T A = a^T, u^T b \leq \alpha$$

$$\iff \exists u \geq 0, \lambda \geq 0 \text{ mit } \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ b^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \in \text{cone} \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ b^T & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \quad \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \in P^\gamma \implies a^T v \leq \alpha \ \forall v \in V \text{ und } a^T(v + \lambda e) \leq \alpha \ \forall v \in V, e \in E, \lambda \geq 0$$

$$\implies a^T e \leq 0 \text{ (andernfalls wäre } a^T(v + \lambda e) > \alpha \text{ für genügend großes } \lambda)$$

$$\implies \begin{pmatrix} V^T & -\mathbf{1} \\ E^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \leq 0.$$

Gilt umgekehrt das letztere Ungleichungssystem, und ist  $x \in P$ , so existieren  $v_1, \dots, v_p \in V$  und  $e_1, \dots, e_q \in E$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ ,  $\mu_1, \dots, \mu_q \geq 0$ , so dass

$$x = \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^q \mu_j e_j.$$



Und daraus folgt

$$a^T x = \sum_{i=1}^p \lambda_i a^T v_i + \sum_{j=1}^q \mu_j a^T e_j \leq \sum_{i=1}^q \lambda_i \alpha + \sum_{j=1}^q \mu_j 0 = \alpha,$$

also gilt  $\begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \in P^\gamma$ . □

**(1.19) Korollar.** Die  $\gamma$ -Polare eines Polyeders  $\emptyset \neq P \subseteq \mathbb{K}^n$  ist ein polyedrischer Kegel im  $\mathbb{K}^{n+1}$ . △

**(1.20) Korollar.** Ist  $\emptyset \neq P = P(A, b) = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$  ein Polyeder und  $a^T x \leq \alpha$  eine Ungleichung, dann sind äquivalent:

- (i)  $a^T x \leq \alpha$  ist gültig bezüglich  $P$ .
- (ii)  $\exists u \geq 0$  mit  $u^T A = a^T$ ,  $u^T b \leq \alpha$ .
- (iii)  $a^T v \leq \alpha \forall v \in V$  und  $a^T e \leq 0 \forall e \in E$ .

(iv)  $\begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \in P^\gamma$ . △

Wir erinnern an einige Begriffsbildungen aus der ADM I (siehe Definitionen (8.2) und (8.6) des ADM I Skripts): Eine Teilmenge  $F \subseteq P$  eines Polyeders  $P$  ist eine *Seitenfläche* von  $P$ , wenn es eine gültige Ungleichung  $c^T x \leq c_0$  bezüglich  $P$  gibt mit  $F = P \cap \{x \mid c^T x = c_0\}$ . Ist  $P = P(A, b)$  und  $M$  die Zeilenindexmenge von  $A$ , dann ist für eine Teilmenge  $F \subseteq P$  die *Gleichheitsmenge*  $\text{eq}(F) := \{i \in M \mid A_i \cdot x = b_i \forall x \in F\}$ , die Menge der für alle  $x \in F$  bindenden Restriktionen. Für  $I \subseteq M$  ist  $\text{fa}(I) := \{x \in P \mid A_I \cdot x = b_I\}$  die *von  $I$  induzierte Seitenfläche*.

Wir zeigen nun, dass man die Gleichheitsmenge einer Seitenfläche explizit berechnen kann.

**(1.21) Satz.** Seien  $P = P(A, b)$  ein Polyeder und  $\emptyset \neq F = \{x \in P \mid c^T x = c_0\}$  eine Seitenfläche von  $P$ . Dann gilt

$$\text{eq}(F) = \{i \in M \mid \exists u \geq 0 \text{ mit } u_i > 0 \text{ und } u^T A = c^T, u^T b = c_0\}. \quad \triangle$$

**Beweis.** Nach Voraussetzung und Folgerung (11.19) aus ADM I haben die beiden linearen Programme

$$(P) \quad \max_{Ax \leq b} c^T x \quad \text{und} \quad (D) \quad \begin{array}{l} \min u^T b \\ u^T A = c^T \\ u \geq 0 \end{array}$$

optimale Lösungen mit gleichem Zielfunktionswert  $c_0$ , und  $F$  ist die Menge der Optimallösungen von (P). Sei nun  $i \in \text{eq}(F)$ . Aufgrund des Satzes (11.26) vom starken komplementären Schlupf existieren Optimallösungen  $\bar{x}, \bar{u}$  von (P), (D) mit  $\bar{u}_j > 0 \Leftrightarrow A_j \cdot \bar{x} = b_j$ . Wegen  $\bar{x} \in F$  gilt  $A_i \cdot \bar{x} = b_i$ , also gibt es einen Vektor  $u$  mit den geforderten Eigenschaften.

Gibt es umgekehrt einen Vektor  $u \geq 0$  mit  $u_i > 0$  und  $u^T A = c^T$ ,  $u^T b = c_0$ , so ist  $u$  optimal für (D), und aus dem Satz vom schwachen komplementären Schlupf (11.25) folgt  $A_i \cdot x = b_i$  für alle  $x \in F$ , d. h.  $i \in \text{eq}(F)$ .  $\square$

**(1.22) Satz.** Seien  $P = P(A, b)$  ein Polyeder und  $F \neq \emptyset$  eine Teilmenge von  $P$ , dann sind äquivalent:

- (i)  $F$  ist eine Seitenfläche von  $P$ .
- (ii)  $\exists I \subseteq M$  mit  $F = \text{fa}(I) = \{x \in P \mid A_I \cdot x = b_I\}$ .
- (iii)  $F = \text{fa}(\text{eq}(F))$ .  $\triangle$

**Beweis.** Gelten (ii) oder (iii), dann ist  $F$  offenbar eine Seitenfläche von  $P$ .

(i)  $\implies$  (ii): Sei  $F = \{x \in P \mid c^T x = c_0\}$  eine Seitenfläche. Setzen wir  $I := \text{eq}(F)$ , dann gilt nach Definition  $F \subseteq \{x \in P \mid A_I \cdot x = b_I\} =: F'$ . Ist  $x \in F'$ , so gilt  $x \in P$ ; es bleibt zu zeigen, dass  $c^T x = c_0$  gilt. Zu jedem  $i \in I$  gibt es nach (1.21) einen Vektor  $u^{(i)}$  mit  $u^{(i)} \geq 0$ ,  $u_i^{(i)} > 0$ ,  $(u^{(i)})^T A = c^T$  und  $(u^{(i)})^T b = c_0$ . Setze

$$u := \sum_{i \in I} \frac{1}{|I|} u^{(i)},$$

dann gilt nach Konstruktion  $u_i > 0 \forall i \in I$  und ferner  $u_i = 0 \forall i \in M \setminus I$  (andernfalls wäre  $i \in I$  nach (1.21)). Die Vektoren  $x$  und  $u$  sind zulässig für die linearen Programme (P), (D) des Beweises von (1.21). Aus dem Satz vom schwachen komplementären Schlupf (11.25) aus ADM I folgt, dass sie auch optimal sind. Daraus folgt  $c^T x = c_0$  und somit  $x \in F$ .

(ii)  $\implies$  (iii) folgt direkt aus dem obigen Beweis.  $\square$

Aus Satz (1.22) folgt, dass zur Darstellung einer Seitenfläche von  $P(A, b)$  keine zusätzliche Ungleichung benötigt wird. Man braucht lediglich in einigen der Ungleichungen des Systems  $Ax \leq b$  Gleichheit zu fordern. Da jede nichtleere Seitenfläche auf diese Weise erzeugt werden kann, folgt:

**(1.23) Korollar.** Sind  $A \in \mathbb{K}^{(m,n)}$ ,  $b \in \mathbb{K}^m$ , dann hat das Polyeder  $P(A, b)$  höchstens  $2^m + 1$  Seitenflächen.  $\triangle$

**Beweis.**  $M = \{1, \dots, m\}$  hat  $2^m$  Teilmengen. Für jede Teilmenge  $I \subseteq M$  ist  $P \cap \{x \mid A_I \cdot x = b_I\}$  eine Seitenfläche von  $P$ . Dazu kommt u. U. noch die leere Seitenfläche.  $\square$

## 1.4 Gültige Ungleichungen, Seitenflächen und Dimension

Man kann Seitenflächen auf ähnliche Weise durch Einführung von Abbildungen analog zu eq bzw. fa bezüglich der Darstellung  $P = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$  charakterisieren. Diese Kennzeichnungen von Seitenflächen sind jedoch technisch aufwendiger. Der interessierte Leser sei dazu auf Bachem and Grötschel (1982) verwiesen.

Wir wollen nun zeigen, dass man auch die Dimension einer Seitenfläche eines Polyeders explizit berechnen kann. Zunächst führen wir einen Hilfsbegriff ein.

**(1.24) Definition.** Ein Element  $x$  eines Polyeders  $P$  heißt innerer Punkt von  $P$ , wenn  $x$  in keiner echten Seitenfläche von  $P$  enthalten ist.  $\triangle$

**Achtung!** Innere Punkte eines Polyeders  $P$  sind nicht notwendig auch topologisch innere Punkte im Sinne der natürlichen Topologie des  $\mathbb{K}^n$ . Unsere inneren Punkte sind topologisch innere Punkte im Sinne der Relativtopologie auf  $P$ .

**(1.25) Satz.** Jedes nichtleere Polyeder besitzt innere Punkte.  $\triangle$

**Beweis.** Sei  $P = P(A, b)$  und  $I = \text{eq}(P(A, b))$ ,  $J = M \setminus I$ . Gilt  $I = M$ , so hat  $P$  keine echten Seitenflächen, also ist jedes Element von  $P$  ein innerer Punkt. Andernfalls ist das System  $Ax \leq b$  äquivalent zu

$$\begin{aligned} A_I x &= b_I, \\ A_J x &\leq b_J. \end{aligned}$$

$P$  hat innere Punkte heißt dann, dass es ein  $x$  gibt mit  $A_I x = b_I$  und  $A_J x < b_J$ . Zu jedem  $i \in J$  existiert nach Definition ein Vektor  $y^{(i)} \in P$  mit  $A_i y^{(i)} < b_i$ . Setze  $y := \frac{1}{|J|} \sum_{i \in J} y^{(i)}$ , dann ist  $y$  Konvexkombination von Elementen von  $P$ , also  $y \in P$ , und es gilt  $A_J y < b_J$ . Mithin ist  $y$  ein innerer Punkt von  $P$ .  $\square$

**(1.26) Satz.** Sei  $F$  Seitenfläche eines Polyeders  $P(A, b)$  und  $\bar{x} \in F$ . Der Vektor  $\bar{x}$  ist ein innerer Punkt von  $F$  genau dann, wenn  $\text{eq}(\{\bar{x}\}) = \text{eq}(F)$ .  $\triangle$

**Beweis.**  $\bar{x}$  ist genau dann ein innerer Punkt von  $F$ , wenn die kleinste (im Sinne der Mengeninklusion) Seitenfläche von  $F$ , die  $\bar{x}$  enthält,  $F$  selbst ist. Offenbar ist  $\text{fa}(\text{eq}(\{\bar{x}\}))$  die minimale Seitenfläche von  $P$ , die  $\bar{x}$  enthält. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**(1.27) Satz.** Ist  $F \neq \emptyset$  eine Seitenfläche des Polyeders  $P(A, b) \subseteq \mathbb{K}^n$ , dann gilt

$$\dim(F) = n - \text{rang}(A_{\text{eq}(F)}). \quad \triangle$$

**Beweis.** Sei  $I := \text{eq}(F)$ . Aus der linearen Algebra wissen wir, dass  $n = \text{rang}(A_I) + \dim(\text{kern}(A_I))$  gilt. Zu zeigen ist also:  $\dim(F) = \dim(\text{kern}(A_I))$ . Seien

$$r := \dim(\text{kern}(A_I)) \quad \text{und} \quad s := \dim(F).$$

„ $r \geq s$ “: Da  $\dim(F) = s$ , gibt es  $s + 1$  affin unabhängige Vektoren  $x_0, x_1, \dots, x_s \in F$ . Dann sind die Vektoren  $x_1 - x_0, \dots, x_s - x_0$  linear unabhängig und erfüllen  $A_I(x_i - x_0) = 0$ .  $\text{kern}(A_I)$  enthält also mindestens  $s$  linear unabhängige Vektoren, also gilt  $r \geq s$ .

## 1 Polyedertheorie

„ $s \geq r$ “: Nach (1.25) besitzt  $F$  einen inneren Punkt  $\bar{x} \in F$ . Nach (1.26) gilt  $\text{eq}(\{\bar{x}\}) = \text{eq}(F) = I$ , und daraus folgt für  $J := M \setminus I$ :

$$\begin{aligned} A_I \bar{x} &= b_I, \\ A_J \bar{x} &< b_J. \end{aligned}$$

Ist  $r = 0$ , so gilt  $s \geq 0$  wegen  $\bar{x} \in F$ . Sei also  $r \geq 1$ , und  $\{x_1, \dots, x_r\}$  sei eine Basis von  $\text{kern}(A_I)$ . Für  $p = 1, \dots, r$  und  $j \in J$  setze:

$$\begin{aligned} \delta_{jp} &:= \begin{cases} \infty, & \text{falls } A_j x_p = 0 \\ \frac{b_j - A_j \bar{x}}{A_j x_p} & \text{andernfalls,} \end{cases} \\ \varepsilon &:= \min\{\delta_{jp} \mid j \in J, p \in \{1, \dots, r\}\}. \end{aligned}$$

(Setze  $\varepsilon \neq 0$  beliebig, falls  $\delta_{jp} = \infty$  für alle  $j, p$ .) Für  $i \in I$  und alle  $p \in \{1, \dots, r\}$  gilt nun

$$A_i(\bar{x} + \varepsilon x_p) = A_i \bar{x} + \varepsilon A_i x_p = A_i \bar{x} = b_i,$$

da  $A_i x_p = 0$ . Für  $j \in J$  gilt

$$\begin{aligned} A_j(\bar{x} + \varepsilon x_p) &= A_j \bar{x} + \varepsilon A_j x_p \\ &\leq A_j \bar{x} + \delta_{jp} A_j x_p \\ &= A_j \bar{x} + b_j - A_j \bar{x} \\ &= b_j. \end{aligned}$$

Daraus folgt  $\bar{x} + \varepsilon x_p \in F$  für alle  $p \in \{1, \dots, r\}$ . Da die Vektoren  $\varepsilon x_1, \dots, \varepsilon x_r$  linear unabhängig sind, sind die Vektoren  $\bar{x}, \bar{x} + \varepsilon x_1, \dots, \bar{x} + \varepsilon x_r$  affin unabhängig. Das heißt,  $F$  enthält mindestens  $r + 1$  affin unabhängige Vektoren, und somit gilt  $\dim(F) = s \geq r$ .  $\square$

**(1.28) Korollar.**  $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{K}^n$  sei ein nichtleeres Polyeder, dann gilt:

(a)  $\dim(P) = n - \text{rang}(A_{\text{eq}(P)})$ .

(b) Ist  $\text{eq}(P) = \emptyset$ , dann ist  $P$  volldimensional (d. h.  $\dim(P) = n$ ).

(c) Ist  $F$  eine echte Seitenfläche von  $P$ , dann gilt  $\dim(F) \leq \dim(P) - 1$ .  $\triangle$

Mit Hilfe von Satz (1.27) kann man auch die affine Hülle einer Seitenfläche auf einfache Weise bestimmen.

**(1.29) Satz.** Sei  $F \neq \emptyset$  eine Seitenfläche des Polyeders  $P(A, b)$ , dann gilt

$$\text{aff}(F) = \{x \mid A_{\text{eq}(F)} x = b_{\text{eq}(F)}\}. \quad \triangle$$

**Beweis.** Es seien  $I := \text{eq}(F)$  und  $T := \{x \mid A_I x = b_I\}$ . Offenbar ist  $T$  ein affiner Raum und wegen  $F \subseteq T$  gilt  $\text{aff}(F) \subseteq \text{aff}(T) = T$ . Sei  $s = \dim(F)$ , dann folgt aus Satz (1.27), dass  $\dim(\text{kern}(A_I)) = s$  und somit  $\dim(T) = s$  gilt. Aus  $\dim(\text{aff}(F)) = \dim T$  und  $\text{aff}(F) \subseteq T$  folgt  $\text{aff}(F) = T$ .  $\square$

## 1.5 Facetten und Redundanz

Wie wir bereits bemerkt haben, kann man zu einem Ungleichungssystem  $Ax \leq b$  beliebig viele Ungleichungen hinzufügen, ohne die Lösungsmenge des Systems zu ändern. Wir wollen nun untersuchen, wie man ein gegebenes Polyeder mit möglichst wenigen Ungleichungen darstellen kann. Dies ist speziell für die lineare Optimierung wichtig, da der Rechenaufwand zur Auffindung einer Optimallösung in der Regel von der Anzahl der vorgelegten Ungleichungen abhängt. Gesucht wird also eine Minimaldarstellung eines Polyeders, um rechentechnische Vorteile zu haben. Es wird sich zeigen, dass hierbei diejenigen Ungleichungen, die maximale echte Seitenflächen eines Polyeders definieren, eine wesentliche Rolle spielen. Deshalb wollen wir derartige Seitenflächen untersuchen.

**(1.30) Definition.**  $Ax \leq b$  sei ein Ungleichungssystem, und  $M$  sei die Zeilenindexmenge von  $A$ .

- (a) Sei  $I \subseteq M$ , dann heißt das System  $A_I x \leq b_I$  unwesentlich oder redundant bezüglich  $Ax \leq b$ , wenn  $P(A, b) = P(A_{M \setminus I}, b_{M \setminus I})$  gilt.
- (b) Enthält  $Ax \leq b$  ein unwesentliches Teilsystem  $A_I x \leq b_I$ , dann heißt  $Ax \leq b$  redundant, andernfalls irredundant.
- (c) Eine Ungleichung  $A_i x \leq b_i$  heißt wesentlich oder nicht redundant bezüglich  $Ax \leq b$ , wenn  $P(A, b) \neq P(A_{M \setminus \{i\}}, b_{M \setminus \{i\}})$  gilt.
- (d) Eine Ungleichung  $A_i x \leq b_i$  heißt implizite Gleichung bezüglich  $Ax \leq b$ , wenn  $i \in \text{eq}(P(A, b))$  gilt.
- (e) Ein System  $Ax \leq a$ ,  $Bx = b$  heißt irredundant, wenn  $Ax \leq a$  keine unwesentliche Ungleichung bezüglich des Systems  $Ax \leq a$ ,  $Bx \leq b$ ,  $-Bx \leq -b$  enthält und  $B$  vollen Zeilenrang hat.
- (f) Eine nichttriviale Seitenfläche  $F$  von  $P(A, b)$  heißt Facette von  $P(A, b)$ , falls  $F$  in keiner anderen echten Seitenfläche von  $P(A, b)$  enthalten ist.  $\triangle$

Wir weisen ausdrücklich darauf hin, dass Redundanz bzw. Irredundanz keine Eigenschaft des Polyeders  $P(A, b)$  ist, sondern eine Eigenschaft des Ungleichungssystems  $Ax \leq b$ . Wir werden sehen, dass ein Polyeder viele irredundante Beschreibungen haben kann. Ferner ist auch die Annahme falsch, dass man immer durch das gleichzeitige Weglassen aller unwesentlichen Ungleichungen eines Systems  $Ax \leq b$  eine irredundante Beschreibung von  $P(A, b)$  erhält. Wir wollen nun zunächst unwesentliche Ungleichungen charakterisieren.

**(1.31) Satz.** Ein Ungleichungssystem  $A_I x \leq b_I$  ist unwesentlich bezüglich  $Ax \leq b$  genau dann, wenn es eine Matrix  $U \in \mathbb{K}_+^{(|I|, m)}$  gibt mit  $UA = A_I$ ,  $Ub \leq b_I$  und  $U_I = 0$ .  $\triangle$

**Beweis.** Für jedes  $i \in I$  ist nach (1.20) die Ungleichung  $A_i x \leq b_i$  gültig bezüglich  $P(A_{M \setminus I}, b_{M \setminus I})$  genau dann, wenn es einen Vektor  $\bar{u}_i \geq 0$  gibt mit  $\bar{u}_i^T A_{M \setminus I} = A_i$ . und

$\bar{u}_i^T b \leq b_i$ . Dies ist genau dann der Fall, wenn es eine Matrix  $U \in \mathbb{K}_+^{(|I|, m)}$  gibt mit  $UA = A_I$ ,  $Ub \leq b_I$  und  $U_{\cdot I} = 0$ .  $\square$

**(1.32) Korollar.**  $A_i.x \leq b_i$  ist genau dann redundant bezüglich  $Ax \leq b$ , wenn es einen Vektor  $u \in \mathbb{K}_+^m$  gibt mit  $u^T A = A_i$ ,  $u^T b \leq b_i$ ,  $u_i = 0$ .  $\triangle$

Der nächste Satz zeigt, wann man Ungleichungen nicht mehr weglassen kann, ohne das Polyeder zu ändern.

**(1.33) Satz.**  $P = P(A, b) \neq \emptyset$  sei ein Polyeder. Sei  $\emptyset \neq I \subseteq M \setminus \text{eq}(P)$  und  $P' := P(A_{M \setminus I}, b_{M \setminus I})$ . Dann gilt

$$P \neq P' \iff \exists \text{ nichttriviale Seitenfläche } F \subseteq P \text{ mit } \text{eq}(F) \subseteq I \cup \text{eq}(P). \quad \triangle$$

**Beweis.** Im Weiteren bezeichnen wir mit  $\text{eq}_{P'}$  die „equality set“-Abbildung bezüglich  $P'$ . Es gilt offenbar  $\text{eq}_{P'}(F) \subseteq \text{eq}(F)$ .

„ $\Leftarrow$ “ Angenommen, es gilt  $P = P'$ , und  $F$  sei eine beliebige nichttriviale Seitenfläche von  $P$  (und somit auch von  $P'$ ). Da  $F$  eine nichttriviale Seitenfläche von  $P'$  ist, gibt es ein  $i \in (M \setminus I) \setminus \text{eq}_{P'}(P')$  mit  $i \in \text{eq}_{P'}(F)$ . Daraus folgt  $\text{eq}(F) \not\subseteq I \cup \text{eq}(P)$ .

„ $\Rightarrow$ “ Angenommen, es gilt  $P \neq P'$ . Wegen  $P \subseteq P'$  heißt dies, es existiert ein Vektor  $v \in P' \setminus P$ , und somit gibt es eine Indexmenge  $\emptyset \neq K \subseteq I$  mit der Eigenschaft  $A_i.v \leq b_i \forall i \in M \setminus K$  und  $A_i.v > b_i \forall i \in K$ . Nach Satz (1.25) hat  $P$  einen inneren Punkt, sagen wir  $w$ , d. h. es gilt  $A_i.w = b_i \forall i \in \text{eq}(P)$  und  $A_i.w < b_i \forall i \in M \setminus \text{eq}(P)$ .

Wir betrachten nun einen Punkt  $y$  auf der Strecke zwischen  $v$  und  $w$ , d. h.  $y = \lambda w + (1 - \lambda)v$  mit  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Aufgrund der Voraussetzungen gilt:

$$\begin{aligned} A_i.y &= b_i \quad \forall i \in \text{eq}(P) \\ A_i.y &< b_i \quad \forall i \in M \setminus (\text{eq}(P) \cup K), \text{ falls } \lambda > 0. \end{aligned}$$

Ist  $i \in K$ , so gilt

$$\begin{aligned} A_i.y \leq b_i &\iff \lambda A_i.w + (1 - \lambda)A_i.v \leq b_i \\ &\iff \lambda A_i.(w - v) \leq b_i - A_i.v \\ &\iff \lambda \geq \frac{b_i - A_i.v}{A_i.(w - v)} \quad (\text{da } A_i.(w - v) < 0). \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} \mu &:= \max \left\{ \frac{b_i - A_i.v}{A_i.(w - v)} \mid i \in K \right\}, \\ L &:= \left\{ i \in K \mid \mu = \frac{b_i - A_i.v}{A_i.(w - v)} \right\}, \end{aligned}$$

dann gilt  $z := \mu w + (1 - \mu)v \in P$ ,  $\emptyset \neq L \subseteq K \subseteq I$  und

$$\begin{aligned} A_i.z &= b_i \quad \forall i \in L \\ A_i.z &< b_i \quad \forall i \in K \setminus L. \end{aligned}$$

Daraus folgt,  $z$  ist ein innerer Punkt von  $F := \text{fa}(L \cup \text{eq}(P))$ . Nach (1.26) gilt dann  $\text{eq}(F) = \text{eq}(\{z\}) = L \cup \text{eq}(P)$ , und das bedeutet, dass  $F$  eine nichttriviale Seitenfläche von  $P$  mit  $\text{eq}(F) \subseteq I \cup \text{eq}(P)$  ist.  $\square$

Wir werden nun wichtige Eigenschaften von Facetten bestimmen, Nichtredundanz kennzeichnen und Facetten charakterisieren.

**(1.34) Satz.** *Sei  $F$  eine Facette von  $P = P(A, b)$ , dann gilt:*

(a)  $\text{eq}(P) \subset \text{eq}(F)$ .

(b) Für alle  $i \in \text{eq}(F) \setminus \text{eq}(P)$  gilt

$$F = \text{fa}(\{i\}) = \{x \in P \mid A_i \cdot x = b_i\}. \quad \triangle$$

**Beweis.** (a) gilt offensichtlich für alle nichttrivialen Seitenflächen von  $P$ .

(b) Die Abbildung  $\text{fa}$  ist inklusionsumkehrend, d. h.

$$I \subseteq J \implies \text{fa}(I) \supseteq \text{fa}(J).$$

Daraus folgt  $F = \text{fa}(\text{eq}(F)) \subseteq \text{fa}(\{i\})$ . Da  $i \notin \text{eq}(P)$ , muss  $\text{fa}(\{i\})$  eine echte Seitenfläche von  $P$  sein. Aus der Maximalität von  $F$  folgt die Behauptung.  $\square$

**(1.35) Korollar.** *Sei  $P = P(A, b)$  ein Polyeder und  $\mathcal{F}$  die Menge der Facetten von  $P$ . Dann gilt:*

(a)  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}, F_1 \neq F_2 \implies \text{eq}(F_1) \cap \text{eq}(F_2) = \text{eq}(P)$ .

(b)  $|\mathcal{F}| \leq m - |\text{eq}(P)|$ .

(c) Es gibt eine Menge  $I \subseteq M$  mit folgenden Eigenschaften

(c<sub>1</sub>)  $I \subseteq M \setminus \text{eq}(P)$ ,

(c<sub>2</sub>)  $|I| = |\mathcal{F}|$ ,

(c<sub>3</sub>)  $F \in \mathcal{F} \iff \exists \text{ genau ein } i \in I \text{ mit } F = \text{fa}(\{i\})$ .  $\triangle$

Jede Menge  $I \subseteq M$  mit den Eigenschaften (c<sub>1</sub>), (c<sub>2</sub>), (c<sub>3</sub>) wollen wir *Facetten-Indexmenge* nennen. Satz (1.34)(b) zeigt, dass man Facetten von  $P$  dadurch erhält, dass man in nur einer Ungleichung  $A_i \cdot x \leq b_i$  des Systems  $Ax \leq b$  Gleichheit fordert. Jedoch ist es keineswegs so, dass für alle  $i \in M$  die Menge  $\text{fa}(\{i\})$  eine Facette von  $P$  ist! Dies gilt nur für solche  $i \in M$ , die in einer Facettenindexmenge enthalten sind.

**(1.36) Satz.** *Seien  $P = P(A, b) \neq \emptyset$  ein Polyeder und  $\mathcal{F}$  die Menge der Facetten von  $P$ . Seien  $M$  die Zeilenindexmenge von  $A$ ,  $I \subseteq M \setminus \text{eq}(P)$  und  $J \subseteq \text{eq}(P)$ . Sei  $P' := \{x \mid A_J \cdot x = b_J, A_I \cdot x \leq b_I\}$ , dann gilt:*

(a)  $P = P' \iff$  (a<sub>1</sub>)  $\forall F \in \mathcal{F} \text{ gilt } I \cap \text{eq}(F) \neq \emptyset$  und  
(a<sub>2</sub>)  $\text{rang}(A_J) = \text{rang}(A_{\text{eq}(P)})$ .

$$(b) \ P = P(A_{I \cup \text{eq}(P)}, b_{I \cup \text{eq}(P)}) \iff \forall F \in \mathcal{F} \text{ gilt } I \cap \text{eq}(F) \neq \emptyset. \quad \triangle$$

**Beweis.** Mit  $J = \text{eq}(P)$  folgt (b) direkt aus (a). Wir beweisen (a).

„ $\implies$ “ Nach Definition gilt offenbar  $J = \text{eq}_{P'}(P')$ . Angenommen (a<sub>2</sub>) ist nicht erfüllt, d. h.  $\text{rang}(A_J) < \text{rang}(A_{\text{eq}(P)})$ . Dann folgt aus der Dimensionsformel (1.28)(a)  $\dim(P') > \dim(P)$  und somit muss  $P \neq P'$  gelten. Widerspruch!

Angenommen (a<sub>1</sub>) ist nicht erfüllt. Dann gibt es eine Facette  $F$  von  $P$  mit  $\text{eq}(F) \subseteq M \setminus I = (M \setminus I) \cup \text{eq}(P)$ . Folglich gilt  $P \neq P'$  nach Satz (1.33). Widerspruch!

„ $\impliedby$ “ Wir zeigen zunächst, dass unter der Voraussetzung (a<sub>2</sub>) gilt:

$$A_J x = b_J \implies A_{\text{eq}(P)} x = b_{\text{eq}(P)}.$$

Da  $P' \neq \emptyset$ , gilt  $\text{rang}(A_J, b_J) = \text{rang}(A_J) = \text{rang}(A_{\text{eq}(P)}) = \text{rang}(A_{\text{eq}(P)}, b_{\text{eq}(P)})$ . Das heißt, für alle  $i \in \text{eq}(P)$  existieren  $K \subseteq J$  und  $\lambda_k, k \in K$ , mit  $A_i = \sum_{k \in K} \lambda_k A_k$ ,  $b_i = \sum_{k \in K} \lambda_k b_k$ . Erfüllt also der Vektor  $x$  das System  $A_J x = b_J$ , so gilt für alle  $i \in \text{eq}(P)$

$$A_i x = \sum_{k \in K} \lambda_k A_k x = \sum_{k \in K} \lambda_k b_k = b_i.$$

Nach (a<sub>1</sub>) gilt für jede Facette  $F$  von  $P$ :  $\text{eq}(F) \not\subseteq M \setminus I$ , und da Facetten maximale echte Seitenflächen sind und  $\text{eq}$  inklusionsumkehrend ist, folgt daraus  $\text{eq}(G) \not\subseteq M \setminus I$  für alle echten Seitenflächen  $G$  von  $P$ . Aus Satz (1.33) folgt daher  $P = P'$ .  $\square$

**(1.37) Korollar.** Seien  $P = P(A, b) \neq \emptyset$  ein Polyeder,  $I \subseteq M \setminus \text{eq}(P)$ ,  $J \subseteq \text{eq}(P)$  und  $P = \{x \mid A_J x = b_J, A_I x \leq b_I\}$ . Diese Darstellung von  $P$  ist genau dann irredundant, wenn gilt:

(a)  $I$  ist eine Facetten-Indexmenge von  $P$ .

(b)  $A_J$  ist eine  $(\text{rang}(A_{\text{eq}(P)}), n)$ -Matrix mit vollem Zeilenrang.  $\triangle$

**(1.38) Korollar.** Sei  $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{K}^n$  ein volldimensionales Polyeder (also  $\text{eq}(P) = \emptyset$ , bzw.  $\dim(P) = n$ ), dann gilt für alle  $I \subseteq M$

$P(A_I, b_I)$  ist eine irredundante Beschreibung von  $P$

$\iff I$  ist Facetten-Indexmenge von  $P$ .  $\triangle$

**(1.39) Satz.** Sei  $P = P(A, b)$  ein Polyeder, und  $F$  sei eine nichttriviale Seitenfläche von  $P$ . Dann sind äquivalent:

(i)  $F$  ist eine Facette von  $P$ .

(ii)  $F$  ist eine maximale echte Seitenfläche von  $P$ .

(iii)  $\dim(F) = \dim(P) - 1$ .



- (iv)  $F$  enthält  $\dim(P)$  affin unabhängige Vektoren.
- (v) Sei  $c^T x \leq c_0$  eine bezüglich  $P$  gültige Ungleichung mit  $F = \{x \in P \mid c^T x = c_0\}$ , dann gilt für alle gültigen Ungleichungen  $d^T x \leq \delta$  mit  $F \subseteq \{x \in P \mid d^T x = \delta\}$ : Es gibt einen Vektor  $u \in \mathbb{K}^{\text{eq}(P)}$  und  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $\alpha \geq 0$  mit

$$\begin{aligned} d^T &= \alpha c^T + u^T A_{\text{eq}(P).}, \\ \delta &= \alpha c_0 + u^T b_{\text{eq}(P)}. \end{aligned} \quad \triangle$$

**Beweis.** (i)  $\iff$  (ii): nach Definition.

(iv)  $\iff$  (iii): trivial.

(iii)  $\implies$  (ii): Angenommen  $F$  ist keine Facette, dann existiert eine echte Seitenfläche  $G$  von  $P$  mit  $F \subset G \subset P$ . Aus (1.28)(c) folgt dann  $\dim(F) \leq \dim(G) - 1 \leq \dim(P) - 2$ , Widerspruch!

(i)  $\implies$  (v): Sei  $F$  eine beliebige Facette von  $P$ . Wir nehmen zunächst an, dass  $A_I.x \leq b_I$ ,  $A_J.x = b_J$  eine irredundante Darstellung von  $P(A, b)$  ist mit  $1 \in I$  und dass  $F = \{x \in P \mid A_1.x = b_1\}$  gilt. Sei nun  $d^T x \leq \delta$  eine gültige Ungleichung mit  $F \subseteq \{x \in P \mid d^T x = \delta\}$ . Aufgrund von Folgerung (1.20) gibt es Vektoren  $v \geq 0$  und  $w$  mit  $v^T A_I. + w^T A_J. = d^T$  und  $v^T b_I + w^T b_J \leq \delta$  (in der Tat gilt hier Gleichheit, da  $\{x \mid d^T x = \delta\}$  eine Stützhyperebene ist). Angenommen, es gibt einen Index  $i \in I \setminus \{1\}$  mit  $v_i > 0$ , dann gilt nach (1.21)  $i \in \text{eq}(F)$ . Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass  $I$  eine Facettenindexmenge ist. Hieraus folgt (v).

(v)  $\implies$  (iii): Da  $F$  eine echte Seitenfläche von  $P$  ist, gilt  $\dim(F) \leq \dim(P) - 1$ . Angenommen  $\dim(F) \leq \dim(P) - 2$ . O. B. d. A. können wir annehmen, dass  $F = \{x \in P \mid A_1.x = b_1\}$  gilt. Aus (1.27) folgt

$$\text{rang}(A_{\text{eq}(F).}) \geq \text{rang}(A_{\text{eq}(P).}) + 2.$$

Mithin gibt es einen Index  $i \in \text{eq}(F) \setminus (\text{eq}(P) \cup \{1\})$ , so dass der Zeilenvektor  $A_i.$  linear unabhängig von den Zeilenvektoren  $A_j.$ ,  $j \in \text{eq}(P) \cup \{1\}$ , ist. Das aber heißt, dass das System

$$A_i. = \alpha A_1. + u^T A_{\text{eq}(P).}$$

keine Lösung  $\alpha, u$  hat. Wegen  $F \subseteq \{x \in P \mid A_i.x = b_i\}$  ist dies ein Widerspruch zu (v).  $\square$

**(1.40) Korollar.** Seien  $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{K}^n$  ein volldimensionales Polyeder und  $F = \{x \in P \mid c^T x = c_0\}$  eine Seitenfläche von  $P$ . Dann sind äquivalent:

- (i)  $F$  ist Facette von  $P$ .
- (ii)  $\dim(F) = n - 1$ .

- (iii) Für alle gültigen Ungleichungen  $d^T x \leq \delta$ ,  $d \neq 0$ , mit  $F \subseteq \{x \in P \mid d^T x = \delta\}$  gilt:  
Es existiert ein  $\alpha > 0$  mit

$$\begin{aligned} d^T &= \alpha c^T, \\ \delta &= \alpha c_0. \end{aligned} \quad \triangle$$

**(1.41) Beispiel.** Wir betrachten das Polyeder  $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{R}^2$ , das wie folgt gegeben ist (siehe Abbildung 1.2).

$$A = \begin{pmatrix} A_1. \\ A_2. \\ A_3. \\ A_4. \\ A_5. \\ A_6. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

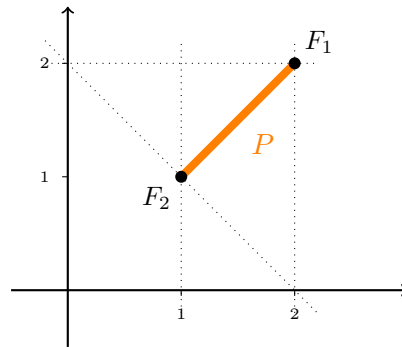


Abbildung 1.2: Ein 1-dimensionales Polyeder in  $\mathbb{R}^2$

$P$  hat 4 Seitenflächen, nämlich  $\emptyset$ ,  $P$  und  $F_1 = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ ,  $F_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ .  $F_1$  und  $F_2$  sind Facetten von  $P$ . Es gilt  $\text{eq}(P) = \{1, 2\}$ ,  $\text{eq}(F_1) = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\text{eq}(F_2) = \{1, 2, 5, 6\}$ ,  $\text{eq}(\emptyset) = \{1, \dots, 6\}$ . Die Mengen  $\{3, 5\}$ ,  $\{3, 6\}$ ,  $\{4, 5\}$ ,  $\{4, 6\}$  sind die Facettenindexmengen von  $P$ . Eine irredundante Beschreibung von  $P$  ist z. B. gegeben durch

$$P = \{x \mid A_1.x = 0, A_3.x \leq b_3, A_5.x \leq b_5\}.$$

Übrigens sind die Ungleichungen  $A_i.x \leq b_i$ ,  $i = 3, 4, 5, 6$  redundant bezüglich  $P(A, b)$ . Die Ungleichungssysteme  $A_I.x \leq b_I$  mit  $I = \{3, 5\}$  oder  $I = \{4, 6\}$  sind z. B. ebenfalls redundant. Aber  $A_I.x \leq b_I$  ist nicht redundant bezüglich  $P(A, b)$ , falls  $I = \{3, 4, 5\}$ .  $\triangle$

## 1.6 Rezessionskegel, Linienraum und Homogenisierung

An dieser Stelle ist es nützlich einige weitere Objekte einzuführen, die man Polyedern (bzw. allgemeinen Mengen) zuordnen kann. Das Studium dieser Objekte ist für sich

selbst betrachtet sehr interessant. Wir wollen diese Mengen jedoch nur als Hilfsmittel zur Vereinfachung von Beweisen verwenden, weswegen wir nicht weiter auf theoretische Untersuchungen dieser Mengen eingehen werden.

**(1.42) Definition.** Sei  $S \subseteq \mathbb{K}^n$  eine beliebige Menge. Wir definieren

(a)  $\text{rec}(S) := \{y \in \mathbb{K}^n \mid \exists x \in S, \text{ so dass } \forall \lambda \geq 0 \text{ gilt } x + \lambda y \in S\}$ ,

(b)  $\text{lineal}(S) := \{y \in \mathbb{K}^n \mid \exists x \in S, \text{ so dass } \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ gilt } x + \lambda y \in S\}$ ,

(c)  $\text{hog}(S) := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x \in S \right\}^{\circ\circ}$ .

Die Menge  $\text{rec}(S)$  heißt Rezessionskegel von  $S$ ,  $\text{lineal}(S)$  heißt Linearitätsraum oder Linienraum von  $S$ , und  $\text{hog}(S)$  heißt Homogenisierung von  $S$ .  $\triangle$

Wir wollen nun die oben eingeführten Mengen bezüglich Polyedern charakterisieren. Nennen wir einen Vektor  $y$  mit  $x + \lambda y \in S$  für alle  $\lambda \geq 0$  eine „Richtung nach Unendlich“, so besteht der Rezessionskegel einer Menge  $S$  aus allen Richtungen nach Unendlich. Für Polyeder gilt Folgendes:

**(1.43) Satz.** Sei  $P = P(A, b) = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$  ein nichtleeres Polyeder, dann gilt

$$\text{rec}(P) = P(A, 0) = \text{cone}(E). \quad \triangle$$

**Beweis.** (a)  $\text{rec}(P) = P(A, 0)$ .

Ist  $y \in \text{rec}(P)$ , so existiert ein  $x \in P$  mit  $x + \lambda y \in P \forall \lambda \geq 0$ . Daraus folgt  $b \geq A(x + \lambda y) = Ax + \lambda Ay$ . Gäbe es eine Komponente von  $Ay$ , die größer als Null ist, sagen wir  $(Ay)_i > 0$ , so wäre der Vektor  $x + \lambda_0 y$  mit

$$\lambda_0 = \frac{b_i - (Ax)_i}{(Ay)_i} + 1$$

nicht in  $P(A, b)$ , Widerspruch!

Ist  $y \in P(A, 0)$ , so gilt für alle  $x \in P(A, b)$  und  $\lambda \geq 0$ ,  $A(x + \lambda y) = Ax + \lambda Ay \leq b + 0 = b$ , also ist  $y \in \text{rec}(P)$ .

(b)  $\text{rec}(P) = \text{cone}(E)$ .

Die Inklusion  $\text{cone}(E) \subseteq \{y \in \mathbb{K}^n \mid \forall x \in S, \forall \lambda \geq 0 : x + \lambda y \in S\} \subseteq \text{rec}(P)$  ist offensichtlich. Umgekehrt sei  $y \in \text{rec}(P)$ , dann existiert wieder ein  $x \in P$  wie oben. Angenommen  $y \notin \text{cone}(E)$ , dann gibt es nach dem Farkas-Lemma (ADM I Skript (11.2)(c)) ein  $u$  mit  $u^T E \leq 0$  und  $u^T y > 0$ . Für jedes  $z \in P$  folgt dann mit gewissen  $\lambda_i$ ,  $0 \leq \lambda_i \leq 1$ ,  $\sum_i \lambda_i = 1$  und  $\mu_i \geq 0$ :

$$\begin{aligned} u^T z &= u^T \sum_i \lambda_i V_{\cdot i} + u^T \sum_i \mu_i E_{\cdot i} = \sum_i \lambda_i u^T V_{\cdot i} + u^T E \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{|E|} \end{pmatrix} \leq \sum_i \lambda_i u^T V_{\cdot i} \\ &\leq \max_i u^T V_{\cdot i} \end{aligned}$$

Andererseits gilt aber  $u^T(x + \lambda y) = u^T x + \lambda u^T y \rightarrow \infty$ , für  $\lambda \rightarrow \infty$ , ein Widerspruch zu  $x + \lambda y \in P$  für alle  $\lambda \geq 0$ .  $\square$

## 1 Polyedertheorie

Insbesondere folgt aus dem Beweis auch, dass  $\text{rec}(P) = \{y \in \mathbb{K}^n \mid \forall x \in P \text{ und } \forall \lambda \geq 0 \text{ gilt } x + \lambda y \in P\}$  für Polyeder  $P$  gilt. Ist  $P$  ein Kegel, so gilt natürlich  $P = \text{rec}(P)$ , und offenbar ist ein Polyeder  $P$  genau dann ein Polytop, wenn  $\text{rec}(P) = \{0\}$ . Abbildung 1.3 zeigt ein Polyeder und seinen Rezessionskegel.

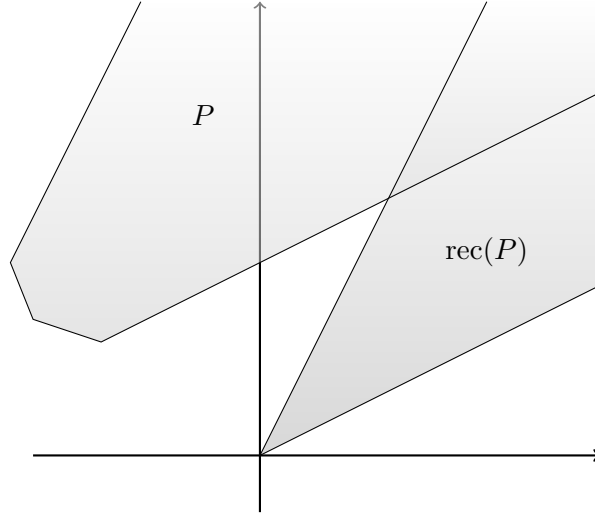


Abbildung 1.3: Ein Polyeder und sein Rezessionskegel

Aus Definition (1.42) folgt  $\text{lineal}(P) = \text{rec}(P) \cap (-\text{rec}(P))$ . Offenbar ist  $\text{lineal}(P)$  ein linearer Teilraum des  $\mathbb{K}^n$ , und zwar ist es der größte lineare Teilraum  $L \subseteq \mathbb{K}^n$ , so dass  $x + L \subseteq P$  für alle  $x \in P$  gilt. Analytisch können wir  $\text{lineal}(P)$  wie folgt darstellen.

**(1.44) Satz.** Sei  $P = P(A, b) = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$  ein nichtleeres Polyeder, dann gilt

$$\text{lineal}(P) = \{x \mid Ax = 0\} = \text{cone}(\{e \in E \mid -e \in \text{cone}(E)\}). \quad \triangle$$

**Beweis.** Wegen  $\text{lineal}(P) = \text{rec}(P) \cap (-\text{rec}(P))$  folgt die Behauptung direkt aus (1.43).  $\square$

Wir kommen nun zur Homogenisierung. Die Definition der Homogenisierung erscheint etwas kompliziert: Man wende zweimal die Kegelpolarität auf die Menge  $S$  an! Geometrisch betrachtet ist  $\text{hog}(S)$  der Durchschnitt aller Ungleichungen mit rechter Seite 0, die gültig bezüglich  $\{\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in S\}$  sind.

**(1.45) Satz.** Sei  $P = P(A, b) = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$  ein nichtleeres Polyeder. Sei

$$B = \begin{pmatrix} A & -b \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

dann gilt

$$\text{hog}(P) = P(B, 0) = \text{cone}(\{\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \mid v \in V\}) + \text{cone}(\{\begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} \mid e \in E\}). \quad \triangle$$

**Beweis.** Setzen wir  $P_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x \in P \right\}$ , so gilt offensichtlich

$$P_1 = \text{conv}(\left\{ \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \mid v \in V \right\} + \text{cone}(\left\{ \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} \mid e \in E \right\}).$$

Aus Folgerung (1.20)(iii) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} P_1^\circ &= \{z \in \mathbb{K}^{n+1} \mid z^T u \leq 0 \ \forall u \in P_1\} \\ &= \{z \in \mathbb{K}^{n+1} \mid z^T \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0 \ \forall v \in V, z^T \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} \leq 0 \ \forall e \in E\} \\ &= \left\{ z \mid \begin{pmatrix} V^T & \mathbf{1} \\ E^T & 0 \end{pmatrix} z \leq 0 \right\} = P \left( \begin{pmatrix} V^T & \mathbf{1} \\ E^T & 0 \end{pmatrix}, 0 \right). \end{aligned}$$

Mit Folgerung (1.7)  $P(A, 0)^\circ = \text{cone}(A^T)$  erhalten wir nun

$$\text{hog}(P) = P_1^{\circ\circ} = P \left( \begin{pmatrix} V^T & \mathbf{1} \\ E^T & 0 \end{pmatrix}, 0 \right)^\circ = \text{cone} \begin{pmatrix} V & E \\ \mathbf{1}^T & 0^T \end{pmatrix}.$$

Die zweite Charakterisierung von  $\text{hog}(P)$  folgt aus einer anderen Darstellung von  $P_1^\circ$ . Es gilt nämlich mit Satz (1.18):

$$\begin{aligned} P_1^\circ &= \left\{ \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1} \mid y^T x + \lambda \mathbf{1} \leq 0 \ \forall x \in P \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1} \mid y^T x \leq -\lambda \ \forall x \in P \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1} \mid \begin{pmatrix} y \\ -\lambda \end{pmatrix} \in P^\gamma \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1} \mid \begin{pmatrix} y \\ -\lambda \end{pmatrix} \in \text{cone} \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ b^T & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \text{cone} \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ -b^T & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Folgerung (1.10) impliziert nun

$$\text{hog}(P) = P_1^{\circ\circ} = \left( \text{cone} \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ -b^T & -1 \end{pmatrix} \right)^\circ = P \left( \begin{pmatrix} A & -b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, 0 \right). \quad \square$$

In Abbildung 1.4 sind ein Polyeder  $P \subseteq \mathbb{R}^1$ , die im obigen Beweis definierte Menge  $P_1$  und  $\text{hog}(P)$  dargestellt.

**(1.46) Bemerkung.** Sei  $P \subseteq \mathbb{K}^n$  ein Polyeder, dann gilt:

$$(a) \ x \in P \iff \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{hog}(P).$$

$$(b) \ x \in \text{rec}(P) \iff \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{hog}(P). \quad \triangle$$

**Beweis.** (a) ist trivial.

(b) Sei  $P = P(A, b)$  eine Darstellung von  $P$ , dann gilt  $\text{hog}(P) = P(B, 0)$  mit  $B = \begin{pmatrix} A & -b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Folglich gilt nach (1.45) und (1.43)

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{hog}(P) \iff \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in P(B, 0) \iff Ax \leq 0 \iff x \in \text{rec}(P). \quad \square$$

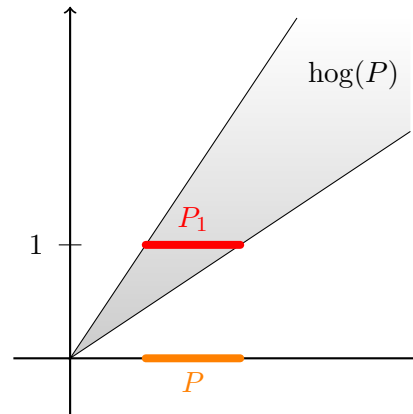


Abbildung 1.4: 1-dimensionaler Polyeder und seine Homogenisierung

## 1.7 Extremalen von spitzen Polyedern

Wir wollen nachfolgend einige Aussagen über spitze Polyeder beweisen, die sich – entsprechend modifiziert – auch für allgemeine Polyeder zeigen lassen. Dabei treten jedoch einige unschöne technische Komplikationen auf, so dass wir hier auf die Behandlung dieser Verallgemeinerung verzichten.

Wir erinnern daran, dass ein Polyeder spitz genannt wird, wenn es eine Ecke (null-dimensionale Seitenfläche) besitzt. Die folgende Aussage erweitert Satz (8.11) aus dem ADM I Skript.

**(1.47) Satz.** Sei  $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{K}^n$  ein nichtleeres Polyeder, dann sind äquivalent:

- (1)  $P$  ist spitz.
- (2)  $\text{rang}(A) = n$ .
- (3)  $\text{rec}(P)$  ist spitz, d. h.  $0$  ist eine Ecke von  $\text{rec}(P)$ .
- (4) Jede nichtleere Seitenfläche von  $P$  ist spitz.
- (5)  $\text{hog}(P)$  ist spitz.
- (6)  $P$  enthält keine Gerade.
- (7)  $\text{rec}(P)$  enthält keine Gerade.
- (8)  $\text{lineal}(P) = \{0\}$ . △

**Beweis.** Die Äquivalenz von (1), (2) und (4) wurde schon in ADM I in Satz (8.11) gezeigt.

Aus der Äquivalenz von (1) und (2) folgt direkt die Äquivalenz der Aussagen (2), (3) und (4), da

$$\text{rec}(P) = P(A, 0), \text{ nach (1.43),}$$

$$\text{hog}(P) = P\left(\begin{pmatrix} A & -b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, 0\right), \text{ nach (1.45).}$$

(3)  $\implies$  (6). Angenommen  $P$  enthält eine Gerade  $G = \{u + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ ,  $v \neq 0$ , dann gilt  $b \geq A(u + \lambda v) = Au + \lambda Av$  für alle  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Daraus folgt  $A(\lambda v) \leq 0$  für alle  $\lambda \in \mathbb{K}$  und somit  $v, -v \in \text{rec}(P)$ , d. h.  $0 = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}(-v)$  ist eine Konvexkombination. Also ist 0 keine Ecke von  $\text{rec}(P)$ .

(6)  $\implies$  (3). Ist  $\text{rec}(P)$  nicht spitz, so ist 0 echte Konvexkombination von Vektoren aus  $\text{rec}(P)$ , sagen wir  $0 = \lambda u + (1 - \lambda)v$ ,  $u \neq 0 \neq v$ ,  $0 < \lambda < 1$ . Dann aber ist neben  $u$  auch  $-\lambda u = (1 - \lambda)v \in \text{rec}(P)$  und folglich ist  $G = \{\mu u \mid \mu \in \mathbb{K}\}$  eine Gerade in  $\text{rec}(P)$ , und für alle  $x \in P$  ist  $x + G$  eine Gerade in  $P$ .

Die Äquivalenz von (7) und (8) zu den übrigen Aussagen ist nun offensichtlich.  $\square$

Der folgende Hilfssatz über innere Punkte wird im Weiteren benötigt.

**(1.48) Lemma.** *Ist  $F$  eine nichtleere Seitenfläche von  $P = P(A, b)$ , gilt  $I = \text{eq}(F)$ , und ist  $B = \{y^1, \dots, y^k\}$  eine Basis des Kerns von  $A_I$ , dann gibt es zu jedem inneren Punkt  $x \in F$  von  $F$  ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $x \pm \varepsilon y^j \in P$  für alle  $j = 1, \dots, k$  gilt.*  $\triangle$

**Beweis.** Übungsaufgabe.  $\square$

**(1.49) Definition.** *Sei  $P$  ein Polyeder. Ein Vektor  $z \in \text{rec}(P) \setminus \{0\}$  heißt Extremale (oder Extremalvektor) von  $P$ , wenn  $\text{cone}(\{z\})$  ein Extremalstrahl von  $\text{rec}(P)$  ist.*  $\triangle$

Nur spitze Polyeder haben Extremalen. Denn ist  $P$  nicht spitz, so ist nach (1.47)  $\text{rec}(P)$  nicht spitz, also ist der Nullvektor eine echte Konvexkombination zweier von Null verschiedener Vektoren, sagen wir  $0 = \lambda u + (1 - \lambda)v$ ,  $0 < \lambda < 1$ . Ist  $F = \text{cone}(\{z\})$  ein Extremalstrahl von  $\text{rec}(P)$ , so gibt es eine bezüglich  $\text{rec}(P)$  gültige Ungleichung  $c^T x \leq 0$  mit  $F = \{x \in \text{rec}(P) \mid c^T x = 0\}$ . Nun gilt  $0 = c^T 0 = c^T(\lambda u + (1 - \lambda)v) = \lambda c^T u + (1 - \lambda)c^T v \leq 0$ . Aus  $c^T u \leq 0$ ,  $c^T v \leq 0$  folgt  $c^T u = c^T v = 0$  und somit  $u, v \in F$ , ein Widerspruch. Aussagen über Extremalen machen also nur für spitze Polyeder Sinn.

Ist  $K$  speziell ein spitzer polyedrischer Kegel, so ist (wegen  $\text{rec}(K) = K$ ) eine Extremale von  $K$  ein Vektor  $z \in K$ , so dass  $\text{cone}(\{z\})$  ein Extremalstrahl von  $K$  ist. Das heißt, jeder auf einem Extremalstrahl von  $K$  gelegener und von Null verschiedener Vektor ist eine Extremale von  $K$ .

**(1.50) Satz.** *Seien  $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{K}^n$  ein spitzen Polyeder und  $z \in \text{rec}(P) \setminus \{0\}$ . Dann sind äquivalent:*

(1)  $z$  ist eine Extremale von  $P$ .

(2)  $\text{cone}(\{z\})$  ist ein Extremalstrahl von  $\text{rec}(P)$ .

- (3)  $z$  lässt sich nicht als echte konische Kombination zweier linear unabhängiger Elemente von  $\text{rec}(P)$  darstellen.
- (4)  $(\text{rec}(P) \setminus \text{cone}\{z\}) \cup \{0\}$  ist ein Kegel.
- (5)  $\text{rang}(A_{\text{eq}(\{z\})}) = n - 1$  (wobei sich  $\text{eq}$  auf das System  $Ax \leq 0$  bezieht).  $\triangle$

**Beweis.** (1)  $\iff$  (2). Definition.

(2)  $\implies$  (3). Ist  $F := \text{cone}(\{z\})$  ein Extremalstrahl von  $\text{rec}(P)$ , so ist  $F$  eine eindimensionale Seitenfläche von  $\text{rec}(P)$ , d. h.  $F$  kann keine zwei linear unabhängigen Vektoren enthalten. Insbesondere gibt es eine bezüglich  $\text{rec}(P)$  gültige Ungleichung  $c^T x \leq 0$  mit  $F = \{x \in \text{rec}(P) \mid c^T x = 0\}$ . Gibt es zwei linear unabhängige Vektoren  $u, v \in \text{rec}(P)$  und  $\lambda, \mu > 0$  mit  $z = \lambda u + \mu v$ , so gilt  $0 = c^T z = c^T(\lambda u + \mu v) = \lambda c^T u + \mu c^T v \leq 0$ . Daraus folgt  $c^T u = c^T v = 0$ , d. h.  $u, v \in F$ , ein Widerspruch.

(3)  $\iff$  (4). Trivial.

(3)  $\implies$  (5). Sei  $I = \text{eq}(\{z\})$ , dann ist  $z$  innerer Punkt von  $F := \{x \in \text{rec}(P) \mid A_I x = 0\}$ . Ist  $\text{rang}(A_I) < n - 1$ , dann enthält der Kern von  $A_I$  einen von  $z$  linear unabhängigen Vektor  $u$ . Nach Lemma (1.48) gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $z \pm \varepsilon u \in \text{rec}(P)$  gilt. Dann aber gilt  $z = \frac{1}{2}(z + \varepsilon u) + \frac{1}{2}(z - \varepsilon u)$ , d. h.  $z$  ist echte konische Kombination von zwei linear unabhängigen Elementen von  $\text{rec}(P)$ , Widerspruch. Offenbar ist  $\text{rang}(A_I) \neq n$ .

(5)  $\implies$  (2). Sei  $I = \text{eq}(\{z\})$ , dann folgt für  $F = \{x \in \text{rec}(P) \mid A_I x = 0\}$  aus der Voraussetzung, dass  $\dim(F) = 1$  gilt. Da  $\text{rec}(P)$  spitz ist, enthält nach (1.47)  $\text{rec}(P)$  keine Gerade, also muss die eindimensionale Seitenfläche  $F$  der Strahl  $\text{cone}(\{z\})$  sein.  $\square$

Wir wollen nun noch eine Beziehung zwischen den Ecken und Extremalen eines spitzen Polyeders und den Extremalen seiner Homogenisierung aufzeigen.

**(1.51) Satz.** Sei  $P \subseteq \mathbb{K}^n$  ein spitzes Polyeder, dann gilt:

(a)  $x$  ist Ecke von  $P \iff \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$  ist Extremale von  $\text{hog}(P)$ .

(b)  $z$  ist Extremale von  $P \iff \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}$  ist Extremale von  $\text{hog}(P)$ .  $\triangle$

**Beweis.** Sei  $P = P(A, b)$ , dann gilt nach Satz (1.45)  $\text{hog}(P) = P(B, 0)$  mit

$$B = \begin{pmatrix} A & -b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Sei  $I = \text{eq}(\{x\})$  bezüglich  $P(A, b)$ .  $x$  ist Ecke von  $P \iff \text{rang}(A_I) = n$  (nach Satz (8.8) aus dem ADM I Skript)  $\iff \text{rang}(B_{\text{eq}(\{\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\})}) = n$  (denn die neu hinzugekommene Ungleichung ist nicht mit Gleichheit erfüllt)  $\stackrel{(1.50)}{\iff} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$  ist Extremale von  $\text{hog}(P)$ .



$$(b) \quad z \text{ ist Extremale von } P \iff z \text{ ist Extremale von } \text{rec}(P) \stackrel{(1.50)}{\iff} \text{rang}(A_{\text{eq}(\{z\})}) = n - 1 \iff \text{rang}(B_{\text{eq}(\{z\})}) = n \stackrel{(1.50)}{\iff} \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist Extremale von } \text{hog}(P). \quad \square$$

## 1.8 Weitere Darstellungssätze

Wir knüpfen hier an Abschnitt 1.3 an, wo wir bereits verschiedene Darstellungssätze bewiesen haben. Einige dieser Sätze können wir mit Hilfe der nun gewonnenen Erkenntnisse verschärfen.

Ist  $K$  ein polyedrischer Kegel und gilt  $K = \text{cone}(E)$ , dann nennen wir  $E$  eine *Kegelbasis von  $K$* , wenn es keine echte Teilmenge  $E'$  von  $E$  gibt mit  $K = \text{cone}(E')$  und wenn jede andere minimale Menge  $F$  mit  $K = \text{cone}(F)$  dieselbe Kardinalität wie  $E$  hat. Ist  $P$  ein Polytop, dann heißt eine Menge  $V$  mit  $P = \text{conv}(V)$  *konvexe Basis von  $P$* , wenn  $V$  keine echte Teilmenge besitzt, deren konvexe Hülle  $P$  ist, und wenn jede andere minimale Menge  $W$  mit  $P = \text{conv}(W)$  dieselbe Kardinalität wie  $V$  hat.

Trivialerweise sind die Elemente einer Kegelbasis  $E$  *konisch unabhängig*, d. h. kein  $e \in E$  ist konische Kombination der übrigen Elemente von  $E$ ; und die Elemente einer konvexen Basis sind *konvex unabhängig*, d. h. kein Element von  $V$  ist Konvexkombination der übrigen Elemente von  $V$ . Es gilt aber keineswegs, dass jeder Vektor  $x \in \text{cone}(E)$  bzw.  $x \in \text{conv}(V)$  eine eindeutige konische bzw. konvexe Darstellung durch Vektoren aus  $E$  bzw.  $V$  hat. In dieser Hinsicht unterscheiden sich also Kegelbasen und konvexe Basen von Vektorraumbasen.

**(1.52) Satz.** Sei  $\{0\} \neq K \subseteq \mathbb{K}^n$  ein spitzer polyedrischer Kegel, dann sind äquivalent:

- (1)  $E$  ist eine Kegelbasis von  $K$ .
- (2)  $E$  ist eine Menge, die man dadurch erhält, dass man aus jedem Extremalstrahl von  $K$  genau einen von Null verschiedenen Vektor (also eine Extremale von  $K$ ) auswählt.  $\triangle$

**Beweis.** Ist  $z$  Extremale von  $K$ , so ist  $K' := (K \setminus \text{cone}(\{z\})) \cup \{0\}$  nach (1.50) ein Kegel. Folglich gilt  $\text{cone}(E) \subseteq K'$  für alle Teilmengen  $E$  von  $K'$ . Also muss jede Kegelbasis von  $K$  mindestens ein (aus der Basiseigenschaft folgt sofort „genau ein“) Element von  $\text{cone}(\{z\}) \setminus \{0\}$  enthalten.

Zum Beweis, dass jede wie in (2) spezifizierte Menge eine Kegelbasis ist, benutzen wir Induktion über  $d = \dim K$ . Für Kegel der Dimension 1 ist die Behauptung trivial. Sei die Behauptung für Kegel der Dimension  $d$  richtig und  $K$  ein Kegel mit  $\dim K = d + 1$ . Sei  $y \in K \setminus \{0\}$  beliebig und  $c \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$  ein Vektor, so dass die Ecke 0 von  $K$  die eindeutig bestimmte Lösung von  $\max\{c^T x \mid x \in K\}$  ist ( $c$  existiert nach Satz (8.8) aus dem ADM I Skript). Sei  $z \in \{x \mid c^T x = 0\} \setminus \{0\}$ . Dann ist für die Gerade

$$G = \{y + \lambda z \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

die Menge  $K \cap G$  ein endliches Streckenstück (andernfalls wäre  $z \in \text{rec}(K) = K$ , und wegen  $c^T z = 0$  wäre 0 nicht der eindeutige Maximalpunkt). Folglich gibt es zwei Punkte

$z_1$  und  $z_2$ , die auf echten Seitenflächen, sagen wir  $F_1$  und  $F_2$ , von  $K$  liegen, so dass  $K \cap G = \text{conv}(\{z_0, z_1\})$ . Die Dimensionen der Seitenflächen  $F_1, F_2$  sind höchstens  $d$ ,  $F_1$  und  $F_2$  sind Kegel, und die Extremalstrahlen von  $F_1$  und  $F_2$  sind Extremalstrahlen von  $K$ . Nach Induktionsvoraussetzung werden  $z_1$  und  $z_2$  durch die in (2) festgelegten Mengen bezüglich  $F_1$  und  $F_2$  konisch erzeugt. Daraus folgt, dass  $y$  durch jede Menge des Typs (2) konisch erzeugt werden kann. Dies impliziert die Behauptung.  $\square$

**(1.53) Korollar.** *Jeder spitze polyedrische Kegel besitzt eine – bis auf positive Skalierung der einzelnen Elemente – eindeutige Kegelbasis.*  $\triangle$

**(1.54) Korollar.** *Jeder spitze polyedrische Kegel  $K \neq \{0\}$  ist die Summe seiner Extremalstrahlen, d. h. sind  $\text{cone}(\{e_i\})$ ,  $i = 1, \dots, k$  die Extremalstrahlen von  $K$ , so gilt*

$$K = \text{cone}(\{e_1, \dots, e_k\}) = \sum_{i=1}^k \text{cone}(\{e_i\}). \quad \triangle$$

Der folgende Satz verschärft (1.13) für spitze Polyeder.

**(1.55) Satz.** *Jedes spitze Polyeder  $P$  lässt sich darstellen als die Summe der konvexen Hülle seiner Ecken und der konischen Hülle seiner Extremalen, d. h. sind  $V$  die Eckenmenge von  $P$  und  $\text{cone}(\{e\})$ ,  $e \in E$ , die Extremalstrahlen von  $\text{rec}(P)$  (bzw. ist  $E$  eine Kegelbasis von  $\text{rec}(P)$ ), so gilt*

$$P = \text{conv}(V) + \text{cone}(E). \quad \triangle$$

**Beweis.** Sei  $\text{hog}(P)$  die Homogenisierung von  $P$ . Da  $P$  spitz ist, ist  $\text{hog}(P)$  nach (1.47) ein spitzer Kegel. Nach (1.54) ist  $\text{hog}(P)$  die Summe seiner Extremalstrahlen  $\text{cone}(\{e'_i\})$ ,  $i = 1, \dots, k$ . O. B. d. A. können wir annehmen, dass  $e'_i = \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , und  $e'_i = \begin{pmatrix} e_i \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $i = p+1, \dots, k$  gilt. Aus (1.51) folgt:  $V = \{v_1, \dots, v_p\}$  ist die Eckenmenge von  $P$  und  $E = \{e_{p+1}, \dots, e_k\}$  ist die Extremalenmenge von  $P$ . Nach (1.46) gilt  $x \in P \iff \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{hog}(P)$  und somit folgt  $x \in P \iff x = \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i + \sum_{i=p+1}^k \mu_i e_i$ ,  $\lambda_i, \mu_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ , d. h.  $x \in \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$ .  $\square$

**(1.56) Korollar (Satz von Krein-Milman).** *Sei  $P$  ein Polyeder und  $V$  die Menge seiner Ecken, dann gilt*

$$P \text{ ist ein Polytop} \iff P = \text{conv}(V). \quad \triangle$$

**(1.57) Korollar.** *Polytope haben eine eindeutige konvexe Basis.*  $\triangle$

Für die lineare Optimierung ist die folgende Beobachtung wichtig.

**(1.58) Satz.** *Seien  $P \subseteq \mathbb{K}^n$  ein spitzes Polyeder und  $c \in \mathbb{K}^n$ . Das lineare Programm  $\max c^T x$ ,  $x \in P$  ist genau dann unbeschränkt, wenn es eine Extremale  $e$  von  $P$  gibt mit  $c^T e > 0$ .*  $\triangle$

**Beweis.** Seien  $V$  die Eckenmenge von  $P$  und  $E$  eine Kegelbasis von  $\text{rec}(P)$ , dann gilt nach (1.55)  $P = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$ . Es ist  $\gamma := \max\{c^T v \mid v \in V\} < \infty$ , da  $V$  endlich und  $\gamma = \max\{c^T x \mid x \in \text{conv}(V)\}$ . Gilt  $c^T e \leq 0 \ \forall e \in E$ , so ist  $\gamma = \max\{c^T x \mid x \in P\} < \infty$ . Falls also  $\max\{c^T x \mid x \in P\}$  unbeschränkt ist, muss für mindestens ein  $e \in E$  gelten  $c^T e > 0$ . Die umgekehrte Richtung ist trivial.  $\square$

Wie bereits bemerkt, haben Elemente von spitzen Polyedern  $P$  i. A. keine eindeutige Darstellung als konvexe und konische Kombination von Ecken und Extremalen. Man kann jedoch zeigen, dass zu einer derartigen Darstellung von Elementen von  $P$  nicht allzu viele Ecken und Extremalen benötigt werden.

**(1.59) Satz.** *Es seien  $K \subseteq \mathbb{K}^n$  ein spitzer Kegel und  $0 \neq x \in K$ . Dann gibt es Extremalen  $y_1, \dots, y_d$  von  $K$ , wobei  $d \leq \dim(K) \leq n$  gilt, mit*

$$x = \sum_{i=1}^d y_i. \quad \triangle$$

**Beweis.** Es seien  $\text{cone}(\{e_i\})$  die Extremalstrahlen von  $K$ ,  $i = 1, \dots, k$ , dann gibt es nach (1.54) Skalare  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ , mit

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i.$$

Unter allen möglichen Darstellungen von  $x$  dieser Art sei die obige eine, so dass  $I = \{i \in \{1, \dots, k\} \mid \lambda_i > 0\}$  minimal ist. Sagen wir, es gilt  $I = \{1, \dots, d\}$ . Angenommen die Vektoren  $e_i$ ,  $i \in I$  sind linear abhängig, dann gibt es  $\mu_1, \dots, \mu_d \in \mathbb{K}$ , nicht alle  $\mu_i$  Null, so dass gilt

$$\sum_{i=1}^d \mu_i e_i = 0.$$

Angenommen  $\mu_i \geq 0$  für  $i = 1, \dots, d$ , und o. B. d. A. sei  $\mu_1 > 0$ . Dann ist  $-e_1 = \sum_{i=2}^d \frac{\mu_i}{\mu_1} e_i$  eine konische Kombination, und nach Satz (1.44) gilt  $e_1 \in \text{lineal}(K)$ . Dies widerspricht nach (1.47) der Voraussetzung  $K$  ist spitz.

O. B. d. A. können wir daher annehmen, dass gilt  $\mu_1 < 0$  und

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \max \left\{ \frac{\lambda_i}{\mu_i} \mid \mu_i < 0 \right\}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} e_1 &= - \sum_{i=2}^d \frac{\mu_i}{\mu_1} e_i, \\ x &= \sum_{i=2}^d \left( \lambda_i - \frac{\lambda_1}{\mu_1} \mu_i \right) e_i. \end{aligned}$$

## Literaturverzeichnis

Diese Darstellung von  $x$  ist eine konische Kombination, denn

$$\begin{aligned}\mu_i \geq 0 &\implies \lambda_i - \frac{\lambda_1}{\mu_1} \mu_i \geq 0, \\ \mu_i < 0 &\implies \frac{\lambda_i}{\mu_i} \leq \frac{\lambda_1}{\mu_1} \implies \lambda_i \geq \frac{\lambda_1}{\mu_1} \mu_i,\end{aligned}$$

also kann  $x$  mit weniger als  $d$  Extremalen konisch dargestellt werden, Widerspruch zur Minimalität! Da ein Kegel höchstens  $\dim(K)$  linear unabhängige Vektoren enthält, folgt  $d \leq \dim(K)$ . Setzen wir  $y_i = \lambda_i e_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , so sind die Vektoren  $y_i$  Extremalen von  $K$  mit der gewünschten Eigenschaft.  $\square$

**(1.60) Korollar.** *Ist  $P \subseteq \mathbb{K}^n$  ein spitzes Polyeder und ist  $x \in P$ , dann gibt es Ecken  $v_0, v_1, \dots, v_k$  und Extremalen  $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_d$  von  $P$  mit  $d \leq \dim(P)$  und nichtnegative Skalare  $\lambda_0, \dots, \lambda_k$  mit  $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$ , so dass gilt*

$$x = \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i + \sum_{i=k+1}^d e_i.$$

$\triangle$

**Beweis.** Nach (1.47) ist  $\text{hog}(P)$  ein spitzer Kegel, und die Dimension von  $\text{hog}(P)$  ist  $\dim(P) + 1$ . Nach (1.46) gilt  $x \in P \iff \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{hog}(P)$ . Nach Satz (1.59) ist  $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$  konische Kombination von  $d + 1 \leq \dim(P) + 1$  Extremalen von  $\text{hog}(P)$ . O. B. d. A. können wir annehmen, dass gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^k \begin{pmatrix} y_i \\ \lambda_i \end{pmatrix} + \sum_{i=k+1}^d \begin{pmatrix} e_i \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 0, \dots, k$ . Für  $v_i := \frac{1}{\lambda_i} y_i$  gilt dann

$$x = \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i + \sum_{i=k+1}^d e_i, \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1.$$

Ferner sind nach (1.51) die Vektoren  $v_i$  Ecken von  $P$  und die Vektoren  $e_i$  Extremalen von  $P$ . Also haben wir die gewünschte Kombination von  $x$  gefunden.  $\square$

Das folgende direkte Korollar von (1.60) wird in der Literatur häufig **Satz von Caratheodory** genannt.

**(1.61) Korollar.** *Ist  $P \subseteq \mathbb{K}^n$  ein Polytop, dann ist jedes Element von  $P$  Konvexkombination von höchstens  $\dim(P) + 1$  Ecken von  $P$ .*  $\triangle$

## Literaturverzeichnis

A. Bachem and M. Grötschel. New aspects of polyhedral theory. In B. Korte, editor, *Modern Applied Mathematics – Optimization and Operations Research*. North-Holland, Amsterdam, 1982.

- J. Bochnak, M. Coste, and M.-F. Roy. *Real algebraic geometry*. Springer, 1998.
- H. Bosse, M. Grötschel, and M. Henk. Polynomial inequalities representing polyhedra. *Mathematical Programming*, 103(1):35–44, May 2005.
- B. Grünbaum. *Convex Polytopes*, volume 221 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2nd edition, 2003.
- J. Matoušek. *Lectures on Discrete Geometry*, volume 212 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2002.
- G. M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*, volume 152 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2010.

