

Diskrete Optimierung

(Algorithmische Diskrete Mathematik II, kurz ADM II)

Skriptum zur Vorlesung im SS 2013

Prof. Dr. Martin Grötschel
Institut für Mathematik
Technische Universität Berlin

Version vom 15. Mai 2013

Vorwort

Bei dem vorliegenden Skript handelt es sich um die Ausarbeitung der vierstündigen Vorlesung „Algorithmische Diskrete Mathematik II (Diskrete Optimierung)“ (mit zugehörigen Übungen und Tutorien), die die zweite Vorlesung des dreisemestrigen Zyklus „Algorithmische Diskrete Mathematik“ bildet. Diese Vorlesung wurde von mir im Sommersemester 2013 zusammen mit Axel Werner an der TU Berlin gehalten, der auch an der Ausarbeitung des vorliegenden Vorlesungsskripts beteiligt war.

Wir gehen in dieser Vorlesung davon aus, dass die Studierenden die Vorlesung „Algorithmische Mathematik I (Einführung in die Lineare und Kombinatorische Optimierung)“ gehört haben und das zugehörige Vorlesungsskriptum

http://www.zib.de/groetschel/teaching/WS1213/Skriptum_ADM_I_130326.pdf

kennen. Wir werden im vorliegenden Skript häufig auf das ADM I Skript Bezug nehmen und übernehmen die Notation aus diesem Skript.

Der Inhalt dieser Vorlesung besteht aus einer (bunten) Mischung von Polyedertheorie, Matroid- und Graphentheorie, linearer, kombinatorischer und gemischt-ganzzahliger Optimierung. Einige Themen aus ADM I (z. B. Polyeder, Simplex-Algorithmus, Approximationsverfahren) werden erneut aufgegriffen und vertieft. Wir versuchen dabei, verschiedene Aspekte der diskreten Mathematik miteinander zu verschränken und Bezüge zwischen den einzelnen Themenbereichen sichtbar zu machen. Die (algorithmische) diskrete Mathematik besteht nicht aus voneinander unabhängigen Einzelthemen und hochspezialisierten Werkzeugkästen, erst die Kombination der vielen Strukturen, Analysemethoden und algorithmischen Ansätzen macht diese sich stark entwickelnde Teildisziplin der Mathematik zu einem Gebiet, das neben schöner Theorie eine große Vielfalt an realen Anwendungen bietet.

Es gibt kein einzelnes Buch, das den gesamten, in dieser Vorlesung abgehandelten Themenkreis abdeckt. Daher sind in die einzelnen Kapitel Literaturhinweise eingearbeitet worden. Hinweise auf aktuelle Lehrbücher, die als Begleittexte zur Vorlesung geeignet sind finden sich auf der zur Vorlesung gehörigen Webseite:

<http://www.zib.de/groetschel/teaching/SS2013/Lecture-SS2013deutsch.html>

Die vorliegende Ausarbeitung ist ein Vorlesungsskript und kein Buch. Obwohl mit der gebotenen Sorgfalt geschrieben, war nicht genügend Zeit für das bei Lehrbüchern notwendige intensive Korrekturlesen und das Einarbeiten umfassender Literaturhinweise. Die daher vermutlich vorhandenen Fehler bitte ich zu entschuldigen (und mir wenn möglich mitzuteilen). Das Thema wird nicht erschöpfend behandelt. Das Manuskript enthält nur die wesentlichen Teile der Vorlesung. Insbesondere sind die in der Vorlesung erfolgten Schilderungen komplexer Anwendungsfälle, der Schwierigkeiten bei der mathematischen Modellierung praktischer Probleme, der Probleme bei der praktischen Umsetzung und die Darstellung der Erfolge, die in den letzten Jahren beim Einsatz der hier vorgestellten Methodik in der Industrie erzielt wurden, nicht in das Skript aufgenommen worden.

Martin Grötschel

Inhaltsverzeichnis

1	Polyedertheorie	1
1.1	Transformationen von Polyedern	1
1.2	Kegelpolarität	3
1.3	Darstellungssätze	6
1.4	Gültige Ungleichungen, Seitenflächen und Dimension	10
1.5	Facetten und Redundanz	15
1.6	Rezessionskegel, Linienraum und Homogenisierung	20
1.7	Extremalen von spitzen Polyedern	24
1.8	Weitere Darstellungssätze	27
2	Matroide und Unabhängigkeitssysteme	33
2.1	Allgemeine Unabhängigkeitssysteme	33
2.2	Matroide	37
2.3	Orakel	45
2.4	Optimierung über Unabhängigkeitssystemen	48
2.5	Ein primal-dualer Greedy-Algorithmus	53

1 Polyedertheorie

Der zweite Teil des Vorlesungszyklus beginnt mit dem Ausbau der Polyedertheorie. Wir werden weitere Darstellungen von Polyedern angeben und neue Operationen mit Polyedern einführen, welche später an verschiedenen Stellen benötigt werden. Wir werden dabei meistens von der geometrischen Anschauung ausgehen und die Begriffe von dieser Sicht aus motivieren. Besonderes Augenmerk wird allerdings auch auf die analytische Beschreibung der geometrischen Konzepte gelegt. Weiterführende Details zur Polyedertheorie finden sich z. B. in Grünbaum (2003), Ziegler (2010) oder auch Matoušek (2002).

Wir erinnern daran, dass ein Polyeder P die Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems $Ax \leq b$ ist und benutzen dafür die Bezeichnung $P = P(A, b)$. Polyeder der Form $\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ bezeichnen wir mit $P^=(A, b)$. Ein Polytop ist ein beschränktes Polyeder.

1.1 Transformationen von Polyedern

Wir haben in der Vorlesung ADM I bereits Projektionen von Polyedern entlang eines Richtungsvektors c untersucht und in Satz (10.13) festgestellt, dass eine derartige Projektion wieder ein Polyeder ist. Wenn man mehrfach hintereinander projiziert, bleibt diese Eigenschaft natürlich erhalten. Sind $A \in \mathbb{K}^{(m,n)}$, $b \in \mathbb{K}^m$ und $k, r \geq 0$ mit $k + r = n$, so nennt man die Menge

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{K}^k \mid \exists y \in \mathbb{K}^r \text{ mit } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in P(\tilde{A}, b) \right\}$$

eine *Projektion von $P(A, b)$ auf $\mathbb{K}^k$* . Hierbei ist $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{(m,n)}$ eine Matrix, die durch Spaltenvertauschung aus A hervorgeht. Offensichtlich folgt aus Satz (10.13):

(1.1) Bemerkung. Jede Projektion eines Polyeders $P(A, b) \subseteq \mathbb{K}^n$ auf $\mathbb{K}^k$, $k \leq n$, ist ein Polyeder. $\triangle$

Dieser Sachverhalt ist in größerer Allgemeinheit gültig. Erinnern wir uns daran, dass jede *affine Abbildung* $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^k$ gegeben ist durch eine Matrix $D \in \mathbb{K}^{(k,n)}$ und einen Vektor $d \in \mathbb{K}^k$, so dass

$$f(x) = Dx + d \quad \forall x \in \mathbb{K}^n.$$

Für derartige Abbildungen gilt:

(1.2) Satz. *Affine Bilder von Polyedern sind Polyeder.* $\triangle$

Beweis. Seien $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{K}^n$ ein Polyeder und $f(x) = Dx + d$ eine affine Abbildung von $\mathbb{K}^n$ in den $\mathbb{K}^k$, dann gilt

$$\begin{aligned} f(P) &= \{y \in \mathbb{K}^k \mid \exists x \in \mathbb{K}^n \text{ mit } Ax \leq b \text{ und } y = Dx + d\} \\ &= \{y \in \mathbb{K}^k \mid \exists x \in \mathbb{K}^n \text{ mit } B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \bar{b}\}, \end{aligned}$$

wobei

$$B := \begin{pmatrix} A & 0 \\ D & -I \\ -D & I \end{pmatrix}, \quad \bar{b} := \begin{pmatrix} b \\ -d \\ d \end{pmatrix}.$$

Wenden wir nun das Projektionsverfahren (10.11) aus ADM I iterativ auf $B, \bar{b}$ und die Richtungsvektoren $e_1, e_2, \dots, e_n$ an, so erhalten wir nach Satz (10.12) ein System $C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq c$ mit $C = (0, \bar{C})$, und es gilt:

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{K}^k : (\exists x \in \mathbb{K}^n \text{ mit } B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \bar{b}) &\iff \exists x \in \mathbb{K}^n \text{ mit } C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq c \\ &\iff \bar{C}y \leq c. \end{aligned}$$

Daraus folgt $f(P) = \{y \in \mathbb{K}^k \mid \bar{C}y \leq c\}$ ist ein Polyeder. $\square$

Man beachte, dass der Beweis von Satz (1.2) durch die Anwendung der Fourier-Motzkin-Elimination sogar ein Verfahren zur expliziten Konstruktion des affinen Bildes von $P(A, b)$ beinhaltet.

Wir erinnern hier an unsere Konventionen zur Bildung von linearen, affinen, konvexen und konischen Hüllen von Mengen und Matrizen, die in Abschnitt 2.2.3 des ADM I Skripts zu finden sind. Aus Satz (1.2) ergibt sich dann direkt die folgende (auch aus anderen Gründen unmittelbar einsichtige) Beobachtung.

(1.3) Korollar (Satz von Weyl). Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{(m,n)}$ gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{lin}(A) \\ \text{aff}(A) \\ \text{conv}(A) \\ \text{cone}(A) \end{array} \right\} \text{ ist ein Polyeder.}$$

$\triangle$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung für die konische Hülle. Alle anderen Fälle beweist man analog.

$$\begin{aligned} \text{cone}(A) &= \{x \in \mathbb{K}^m \mid \exists y \geq 0 \text{ mit } x = Ay\} \\ &= \{x \in \mathbb{K}^m \mid \exists y \in \mathbb{K}^n \text{ mit } \begin{pmatrix} I & -A \\ -I & A \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq 0\}. \end{aligned}$$

Die letzte Menge ist die Projektion eines Polyeders im $\mathbb{K}^{m+n}$ auf den $\mathbb{K}^m$, also nach (1.1) bzw. (1.2) ein Polyeder. $\square$

Offenbar besagt die obige Folgerung nichts anderes als: Die lineare, affine, konvexe oder konische Hülle einer endlichen Teilmenge des $\mathbb{K}^n$ ist ein Polyeder. Für die konische Hülle hat dies WEYL (1935) gezeigt (daher der Name für Korollar (1.3)).

(1.4) Korollar. *Die Summe $P = P_1 + P_2$ zweier Polyeder P_1, P_2 ist ein Polyeder. $\triangle$*

Beweis. Es seien $P_1 = P(A, a)$, $P_2 = P(B, b)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} P = P_1 + P_2 &= \{x + y \in \mathbb{K}^n \mid Ax \leq a, By \leq b\} \\ &= \{z \in \mathbb{K}^n \mid \exists x, y \in \mathbb{K}^n \text{ mit } Ax \leq a, By \leq b, z = x + y\} \\ &= \{z \in \mathbb{K}^n \mid \exists x, y \in \mathbb{K}^n \text{ mit } A(z - y) \leq a, B(z - x) \leq b, z = x + y\} \\ &= \{z \in \mathbb{K}^n \mid \exists x, y \in \mathbb{K}^n \text{ mit } D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}\} \end{aligned}$$

mit

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -A & A \\ -B & 0 & B \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist P die Projektion eines Polyeders des $\mathbb{K}^{3n}$ auf den $\mathbb{K}^n$, und somit nach (1.1) ein Polyeder. $\square$

Verbinden wir nun die Erkenntnis aus (1.3), dass $\text{conv}(A)$ und $\text{cone}(B)$ Polyeder sind, mit (1.4), so erhalten wir:

(1.5) Korollar. *Es seien $A \in \mathbb{K}^{(m,n)}$, $B \in \mathbb{K}^{(m,n')}$, dann gilt*

$$P = \text{conv}(A) + \text{cone}(B)$$

ist ein Polyeder. $\triangle$

Die obige Folgerung erscheint (durch geschickte Vorbereitung) völlig trivial, sie ist jedoch eine durchaus beachtenswerte Erkenntnis, denn wir werden bald zeigen, dass in der Tat alle Polyeder von der Form $\text{conv}(A) + \text{cone}(B)$ sind.

1.2 Kegelpolarität

Es gibt mehrere Möglichkeiten die Umkehrung von (1.5) zu beweisen. Eine besondere elegante, die eine geometrische Version des Farkas-Lemmas benutzt, führt über die Kegelpolarität. Diese Operation mag zunächst nur als technisches Hilfsmittel erscheinen. Sie und ihre Verallgemeinerungen (allgemeine Polaritäten, Blocker, Antiblocker) sind jedoch bedeutende Methoden in der Polyedertheorie und der linearen sowie ganzzahligen Optimierung.

Wir beginnen mit einer Neuinterpretation des Farkas-Lemmas (11.2)(c) aus ADM I. Dieses besagt

$$\exists x \geq 0, Ax = b \iff \forall u (A^T u \geq 0 \Rightarrow u^T b \geq 0).$$

Durch diese Aussage sind offenbar auch alle rechten Seiten b charakterisiert, für die $x \geq 0$, $Ax = b$ eine Lösung hat. Nach Definition gilt $\text{cone}(A) = \{b \in \mathbb{K}^m \mid \exists x \geq 0 \text{ mit } Ax = b\}$, also können wir aus der Aussage (11.2)(c) des ADM I Skripts folgern:

(1.6) Bemerkung. Für alle Matrizen $A \in \mathbb{K}^{(m,n)}$ gilt:

$$\text{cone}(A) = \{b \in \mathbb{K}^m \mid u^T b \leq 0 \forall u \in P(A^T, 0)\}. \quad \triangle$$

Bemerkung (1.6) kann man geometrisch wie folgt beschreiben. Die Menge der zulässigen rechten Seiten b von $Ax = b$, $x \geq 0$ ist genau die Menge aller Vektoren $b \in \mathbb{K}^m$, welche einen stumpfen Winkel mit allen Vektoren des Kegels $P(A^T, 0)$ bilden. Allgemeiner definieren wir nun für jede beliebige Menge $S \subseteq \mathbb{K}^n$

$$S^\circ := \{y \in \mathbb{K}^n \mid y^T x \leq 0 \forall x \in S\}.$$

S° ist die Menge aller Vektoren, die einen stumpfen Winkel mit allen Vektoren aus S bilden. S° heißt *polarer Kegel* von S . (Überzeugen Sie sich, dass S° ein Kegel ist!) Wir erinnern hier an das in der linearen Algebra definierte *orthogonale Komplement*

$$S^\perp := \{y \in \mathbb{K}^n \mid y^T x = 0 \forall x \in S\}.$$

Offensichtlich gilt $S^\perp \subseteq S^\circ$. Unter Benutzung der obigen Definition können wir Bemerkung (1.6) nun auch wie folgt aufschreiben.

(1.7) Korollar. Für alle Matrizen $A \in \mathbb{K}^{(m,n)}$ gilt

$$P(A^T, 0)^\circ = \text{cone}(A) \quad \text{und} \quad P(A, 0)^\circ = \text{cone}(A^T). \quad \triangle$$

Korollar (1.7) und die vorher gemachten Beobachtungen wollen wir an einem Beispiel erläutern. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

dann sind die Kegel $P(A, 0)$ und $P(A, 0)^\circ$ in Abbildung 1.1 gezeichnet.

$P(A, 0)^\circ$ besteht also aus allen Vektoren, die mit den Elementen des Kegels $P(A, 0)$ einen stumpfen Winkel bilden, und das sind gerade diejenigen Vektoren, die als konische Kombination der Normalenvektoren A_i dargestellt werden können, also

$$P(A, 0)^\circ = \text{cone} \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

Ferner gilt: $Ax = b$, $x \geq 0$ ist genau dann lösbar, wenn $b \in P(A, 0)^\circ$ gilt. Daraus folgt z. B., dass $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x \geq 0$ nicht lösbar ist, während $Ax = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x \geq 0$ eine Lösung hat.

Aus der Definition des polaren Kegels und des orthogonalen Komplements ergeben sich unmittelbar einige triviale Beziehungen, deren Beweis wir dem Leser zur Übung überlassen. Wir schreiben im Weiteren

$$S^{\circ\circ} := (S^\circ)^\circ.$$

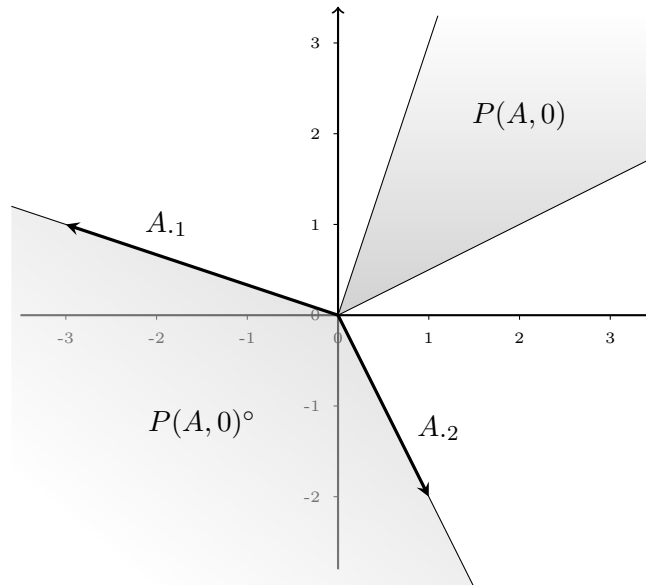


Abbildung 1.1: Kegel und polarer Kegel

(1.8) Bemerkung (Hausaufgabe). Für $S, S_i \subseteq \mathbb{K}^n$, $i = 1, \dots, k$ gilt:

- (a) $S_i \subseteq S_j \implies S_j^\circ \subseteq S_i^\circ$
- (b) $S \subseteq S^{\circ\circ}$
- (c) $\left(\bigcup_{i=1}^k S_i\right)^\circ = \bigcap_{i=1}^k S_i^\circ$
- (d) $S^\circ = \text{cone}(S^\circ) = (\text{cone}(S))^\circ$
- (e) $S = \text{lin}(S) \implies S^\circ = S^\perp$. Gilt die Umkehrung?
- (f) Ersetzen wir in (a), ..., (d) "o" durch " $\perp$ ", sind dann auch noch alle Behauptungen wahr? $\triangle$

(1.9) Bemerkung (Hausaufgabe). Für welche Mengen $S \subseteq \mathbb{K}^n$ gilt

- (a) $S^\circ = S^{\circ\circ\circ}$,
- (b) $S = S^\circ$? $\triangle$

Die Aussage (1.8)(d) impliziert insbesondere:

(1.10) Korollar. $\text{cone}(A^T)^\circ = P(A, 0)$. $\triangle$

Beweis. $(\text{cone}(A^T))^\circ = \text{cone}((A^T)^\circ) = (A^T)^\circ = \{x \mid Ax \leq 0\} = P(A, 0)$. $\square$

Das folgende Korollar aus (1.7) und (1.10) wird in der Literatur häufig mit einem Namen belegt.

(1.11) Satz (Polarensatz). Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{(m,n)}$ gilt:

$$\begin{aligned} P(A, 0)^{\circ\circ} &= P(A, 0), \\ \text{cone}(A)^{\circ\circ} &= \text{cone}(A). \end{aligned}$$

△

Beweis.

$$\begin{aligned} P(A, 0) &\stackrel{(1.10)}{=} \text{cone}(A^T)^\circ \stackrel{(1.7)}{=} P(A, 0)^{\circ\circ}, \\ \text{cone}(A) &\stackrel{(1.7)}{=} P(A^T, 0)^\circ \stackrel{(1.10)}{=} \text{cone}(A)^{\circ\circ}. \end{aligned}$$

□

Unser kurzer Exkurs über Kegelpolarität ist damit beendet.

1.3 Darstellungssätze

Wir wollen nun zeigen, dass Polyeder nicht nur in der Form $P(A, b)$ dargestellt werden können und benutzen dazu die bisher entwickelte Maschinerie.

(1.12) Satz (Minkowski (1896)). Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{K}^n$ ist genau dann ein polyedrischer Kegel, wenn K die konische Hülle von endlich vielen Vektoren ist. Mit anderen Worten: Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{K}^{(m,n)}$ gibt es eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{(n,k)}$, so dass

$$P(A, 0) = \text{cone}(B)$$

gilt und umgekehrt.

△

Beweis. $P(A, 0) \stackrel{(1.10)}{=} \text{cone}(A^T)^\circ \stackrel{(1.3)}{=} P(B^T, 0)^\circ \stackrel{(1.7)}{=} \text{cone}(B).$

□

(1.13) Satz. Es seien $A \in \mathbb{K}^{(m,n)}$, $b \in \mathbb{K}^m$, dann existieren endliche Mengen $V, E \subseteq \mathbb{K}^n$ mit

$$P(A, b) = \text{conv}(V) + \text{cone}(E).$$

△

Beweis. Setze

$$H := P\left(\begin{pmatrix} A & -b \\ 0^T & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

dann gilt: $x \in P(A, b) \iff \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in H$. H ist nach Definition ein polyedrischer Kegel. Also gibt es nach Satz (1.12) eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{(n+1,k)}$ mit $H = \text{cone}(B)$. Aufgrund der Definition von H hat die letzte Zeile von B nur nichtnegative Elemente. Durch Skalieren

der Spalten von B und Vertauschen von Spalten können wir B in eine Matrix $\overline{B}$ so umformen, dass gilt

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} V & E \\ \mathbf{1}^T & 0^T \end{pmatrix}, \quad \text{cone}(\overline{B}) = H.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} x \in P(A, b) &\iff \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in H \\ &\iff x = V\lambda + E\mu \text{ mit } \lambda^T \mathbf{1} = 1, \lambda, \mu \geq 0 \\ &\iff x \in \text{conv}(V) + \text{cone}(E). \end{aligned} \quad \square$$

(1.14) Korollar. Eine Teilmenge $P \subseteq \mathbb{K}^n$ ist genau dann ein Polytop, wenn P die konvexe Hülle endlich vieler Vektoren ist. $\triangle$

Beweis. Sei $V \subseteq \mathbb{K}^n$ endlich und $P = \text{conv}(V)$, dann ist P nach (1.3) ein Polyeder. Ist $x \in P$, so gilt $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$, $v_i \in V$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, und somit $\|x\| \leq \sum_{i=1}^k \|v_i\|$, d. h. $P \subseteq \{x \mid \|x\| \leq \sum_{v \in V} \|v\|\}$. Also ist P beschränkt, d. h. P ist ein Polytop.

Ist umgekehrt P ein Polytop, so gibt es nach Satz (1.13) endliche Mengen V, E mit $P = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$. Gibt es einen Vektor $e \in E$ mit $e \neq 0$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $x + ne \in P$ für alle $x \in \text{conv}(V)$. Also ist P unbeschränkt, falls $E \setminus \{0\} \neq \emptyset$. Daraus folgt $E \in \{\emptyset, \{0\}\}$, und dann gilt trivialerweise $\text{conv}(V) = \text{conv}(V) + \text{cone}(E) = P$. $\square$

(1.15) Satz (Darstellungssatz). Eine Teilmenge $P \subseteq \mathbb{K}^n$ ist genau dann ein Polyeder, wenn P die Summe eines Polytops und eines polyedrischen Kegels ist, d. h. wenn es endliche Mengen $V, E \subseteq \mathbb{K}^n$ gibt mit

$$P = \text{conv}(V) + \text{cone}(E). \quad \triangle$$

Beweis. Kombiniere (1.12), (1.13), (1.14) und (1.5). $\square$

Ist $P \subseteq \mathbb{K}^n$ ein Polyeder, so wissen wir nunmehr, dass es für P zwei mögliche Darstellungen gibt. Es gilt nämlich

$$P = P(A, b) = \text{conv}(V) + \text{cone}(E),$$

wobei A eine (m, n) -Matrix, $b \in \mathbb{K}^m$ und V, E endliche Mengen sind. Diese beiden Darstellungen sind grundsätzlich verschieden, was natürlich in vielerlei Hinsicht nützlich sein kann. Manche Aussagen über Polyeder sind völlig trivial, wenn man von der einen Beschreibung ausgeht, während sie aus der anderen Beschreibung nicht unmittelbar folgen.

Die Darstellung $P(A, b)$ nennt man auch *äußere Beschreibung* von P . Der Grund für diese Bezeichnung liegt darin, dass man wegen

$$P = \bigcap_{i=1}^m \{x \mid A_i x \leq b_i\} \subseteq \{x \mid A_i x \leq b_i\},$$

das Polyeder P als Durchschnitt von größeren Mengen betrachten kann. P wird sozusagen „von außen“ durch sukzessives Hinzufügen von Ungleichungen (bzw. Halbräumen) konstruiert.

Hingegen nennt man $\text{conv}(V) + \text{cone}(E)$ eine *innere Beschreibung* von P . Ist $E = \emptyset$, so ist die Bezeichnung offensichtlich, denn $V \subseteq P$ und somit wird P durch konvexe Hüllenbildung von Elementen von sich selbst erzeugt. Analoges gilt, wenn P ein polyedrischer Kegel ist. Sind jedoch V und E nicht leer, dann ist E nicht notwendigerweise eine Teilmenge von P , jedoch gelingt es eben aus den Vektoren $v \in V$ zusammen mit den Vektoren $e \in E$ das Polyeder P „von innen her“ zu konstruieren.

Die Sätze (1.12), (1.14) und (1.15) beinhalten weitere wichtige Charakterisierungen von polyedrischen Kegeln, Polytopen und Polyedern. Wir erinnern uns aus der linearen Algebra daran, dass jeder lineare Teilraum L des $\mathbb{K}^n$ eine endliche Basis hat, d. h. eine endliche Teilmenge B besitzt, so dass B linear unabhängig ist und $L = \text{lin}(B)$ gilt. Die linearen Teilräume des $\mathbb{K}^n$ sind also diejenigen Teilmengen des $\mathbb{K}^n$, deren Elemente durch Linearkombinationen einer endlichen Menge erzeugt werden können. Nach (1.14) sind Polytope genau diejenigen Teilmengen des $\mathbb{K}^n$, die durch Konvexkombinationen einer endlichen Menge erzeugt werden können.

Wir werden später sehen, dass es sogar eine eindeutig bestimmte minimale (im Sinne der Mengeninklusion) endliche Menge $V \subseteq \mathbb{K}^n$ gibt mit $P = \text{conv}(V)$, d. h. Polytope haben sogar eine eindeutig bestimmte „konvexe Basis“. Nach (1.12) sind polyedrische Kegel genau diejenigen Teilmengen des $\mathbb{K}^n$, die ein endliches „Kegelerzeugendensystem“ haben. Auch hier gibt es natürlich minimale endliche Mengen, die die Kegel konisch erzeugen. Aber nur unter zusätzlichen Voraussetzungen haben zwei minimale konische Erzeugendensysteme auch gleiche Kardinalität, und Eindeutigkeit gilt lediglich bis auf Multiplikation mit positiven Skalaren. Häufig nennt man eine Teilmenge T des $\mathbb{K}^n$ *endlich erzeugt*, falls $T = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$ für endliche Mengen V, E gilt. Nach (1.15) sind also die Polyeder gerade die endlich erzeugten Teilmengen des $\mathbb{K}^n$. Fassen wir zusammen, so gilt:

(1.16) Bemerkung. Ist $T \subseteq \mathbb{K}^n$, so gilt

(a) T ist ein linearer Teilraum $\iff T$ ist die lineare Hülle einer endlichen Menge.

(b) T ist ein affiner Teilraum $\iff T$ ist die affine Hülle einer endlichen Menge.

(c) T ist ein polyedrischer Kegel $\iff T$ ist die konische Hülle einer endlichen Menge.

(d) T ist ein Polytop $\iff T$ ist die konvexe Hülle einer endlichen Menge.

(e) T ist ein Polyeder $\iff T$ ist endlich erzeugt. △

Exkurs: Andere Darstellungsformen von Polyedern

Satz (1.15) und Bemerkung (1.16) zeigen, dass Polyeder auch durch Hüllenbildungsprozesse (linear, affin, konisch, konvex) und nicht nur durch Durchschnitte (Halbräume,

Hyperebenen), die uns in ADM I (siehe (2.1)) zur Definition gedient haben, charakterisiert werden können. Dies sind jedoch nicht die einzigen Möglichkeiten, Polyeder zu beschreiben. Wir können hierauf nicht vertieft eingehen, sondern erwähnen nur zwei Beispiele.

Der harmlos aussehende absolute Betrag $|\cdot|$ ermöglicht in manchen Fällen enorm kompakte Darstellungen. Wir betrachten als Beispiel

$$K(n) := \text{conv}\{e_1, \dots, e_n, -e_1, \dots, -e_n\},$$

wobei e_i den i -ten Einheitsvektor im $\mathbb{K}^n$ bezeichnet. $K(n)$ wird in der Literatur *Kreuzpolytop* genannt. Zur Definition des Kreuzpolytops $K(n)$ durch Hüllenbildung benötigt man also $2n$ Vektoren. Will man $K(n)$ als Durchschnitt von Halbräumen darstellen, so sind (beweisbar) 2^n Ungleichungen erforderlich:

$$K(n) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid a^T x \leq 1 \ \forall a \in \{-1, 1\}^n\}.$$

Erlaubt man die Benutzung des Absolutbetrages, so ergibt sich

$$K(n) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1\}.$$

Eine einzige Ungleichung genügt in diesem Falle also zur Darstellung des Kreuzpolytops. Das Kreuzpolytop $K(3)$ im dreidimensionalen Raum ist das bekannte Oktaeder.

Tiefliegende Sätze der reellen algebraischen Geometrie, die auf Bröcker (1991) und Scheiderer (1989) zurückgehen, siehe hierzu Bochnak et al. (1998), zeigen, dass der *Stabilitätsindex* jeder „basic closed semi-algebraic set“ im Raum $\mathbb{R}^n$ den Wert $m := \frac{n(n+1)}{2}$ hat.

Polyeder sind spezielle „basic closed semi-algebraic sets“. Übersetzt in „unsere“ Sprache und bezogen auf Polyeder besagt das Resultat von Bröcker und Scheiderer, dass es zu jedem Polyeder P Polynome $p_1, \dots, p_m$ in n reellen Variablen mit reellen Koeffizienten gibt, so dass

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, \frac{n(n+1)}{2}\}$$

gilt. Der Beweis ist rein „existenziell“ und liefert kein Konstruktionsverfahren für diese m Polynome. Es gibt allgemeine semi-algebraische Mengen, bei denen man auch beweisbar m Polynome braucht.

Für den Spezialfall von Polyedern wurde in Bosse et al. (2005) gezeigt, dass man im $\mathbb{R}^n$ die benötigten Polynome algorithmisch bestimmen kann und dass man sogar mit $2n$ Polynomen auskommt. Es wird vermutet, dass sogar n Polynome zur Darstellung von Polyedern ausreichen (und dass diese auch konstruiert werden können). Für einen wichtigen Spezialfall haben dies Averkov und Henk bewiesen, der allgemeine Fall ist noch offen.

Eine Konsequenz der oben geschilderten Ergebnisse ist, dass das Kreuzpolytop $K(n)$ statt mit 2^n linearen Ungleichungen mit lediglich $2n$ Polynomialgleichungen beschrieben werden kann.

1.4 Gültige Ungleichungen, Seitenflächen und Dimension

In Abschnitt 1.2 haben wir bereits einen Polarentyp, die Kegelpolare, zur Beweisvereinfachung eingeführt. Hier wollen wir eine weitere Polare betrachten, die es uns ermöglichen wird, eine Charakterisierung bezüglich $P(A, b)$ in eine Charakterisierung bezüglich $\text{conv}(V) + \text{cone}(E)$ zu übertragen.

(1.17) Definition. Es seien $S \subseteq \mathbb{K}^n$, $a \in \mathbb{K}^n$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Die Menge

$$S^\gamma := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1} \mid a^T x \leq \alpha \ \forall x \in S \right\}$$

heißt γ -Polare von S . $\triangle$

Die γ -Polare S^γ kann als die „Menge aller gültigen Ungleichungen bezüglich S “ betrachtet werden. Wir wollen nun die γ -Polare eines Polyeders charakterisieren.

(1.18) Satz. Es sei $P \subseteq \mathbb{K}^n$, $P \neq \emptyset$, ein Polyeder mit den Darstellungen $P = P(A, b) = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$, dann gilt:

$$(a) \ P^\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1} \mid \exists u \geq 0, u^T A = a^T, u^T b \leq \alpha \right\} = \text{cone} \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ b^T & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \ P^\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1} \mid \begin{pmatrix} V^T & -\mathbf{1} \\ E^T & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \leq 0 \right\} = P \left(\begin{pmatrix} V^T & -\mathbf{1} \\ E^T & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right). \quad \triangle$$

Beweis.

$$(a) \quad \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \in P^\gamma \iff Ax \leq b, a^T x > \alpha \text{ inkonsistent}$$

$$\iff \exists u \geq 0, v > 0 \text{ mit } u^T A - v a^T = 0, u^T b - v \alpha \leq 0 \text{ (ADM I, (11.5))}$$

$$\iff \exists u \geq 0 \text{ mit } u^T A = a^T, u^T b \leq \alpha$$

$$\iff \exists u \geq 0, \lambda \geq 0 \text{ mit } \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ b^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \in \text{cone} \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ b^T & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \quad \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \in P^\gamma \implies a^T v \leq \alpha \ \forall v \in V \text{ und } a^T(v + \lambda e) \leq \alpha \ \forall v \in V, e \in E, \lambda \geq 0$$

$$\implies a^T e \leq 0 \text{ (andernfalls wäre } a^T(v + \lambda e) > \alpha \text{ für genügend großes } \lambda)$$

$$\implies \begin{pmatrix} V^T & -\mathbf{1} \\ E^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \leq 0.$$

Gilt umgekehrt das letztere Ungleichungssystem, und ist $x \in P$, so existieren $v_1, \dots, v_p \in V$ und $e_1, \dots, e_q \in E$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p \geq 0$, $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$, $\mu_1, \dots, \mu_q \geq 0$, so dass

$$x = \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^q \mu_j e_j.$$

Und daraus folgt

$$a^T x = \sum_{i=1}^p \lambda_i a^T v_i + \sum_{j=1}^q \mu_j a^T e_j \leq \sum_{i=1}^q \lambda_i \alpha + \sum_{j=1}^q \mu_j 0 = \alpha,$$

also gilt $\begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \in P^\gamma$. □

(1.19) Korollar. Die γ -Polare eines Polyeders $\emptyset \neq P \subseteq \mathbb{K}^n$ ist ein polyedrischer Kegel im $\mathbb{K}^{n+1}$. △

(1.20) Korollar. Ist $\emptyset \neq P = P(A, b) = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$ ein Polyeder und $a^T x \leq \alpha$ eine Ungleichung, dann sind äquivalent:

- (i) $a^T x \leq \alpha$ ist gültig bezüglich P .
- (ii) $\exists u \geq 0$ mit $u^T A = a^T$, $u^T b \leq \alpha$.
- (iii) $a^T v \leq \alpha \forall v \in V$ und $a^T e \leq 0 \forall e \in E$.

(iv) $\begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \in P^\gamma$. △

Wir erinnern an einige Begriffsbildungen aus der ADM I (siehe Definitionen (8.2) und (8.6) des ADM I Skripts): Eine Teilmenge $F \subseteq P$ eines Polyeders P ist eine *Seitenfläche von P* , wenn es eine gültige Ungleichung $c^T x \leq c_0$ bezüglich P gibt mit $F = P \cap \{x \mid c^T x = c_0\}$. Ist $P = P(A, b)$ und M die Zeilenindexmenge von A , dann ist für eine Teilmenge $F \subseteq P$ die *Gleichheitsmenge* $\text{eq}(F) := \{i \in M \mid A_i \cdot x = b_i \forall x \in F\}$, die Menge der für alle $x \in F$ bindenden Restriktionen. Für $I \subseteq M$ ist $\text{fa}(I) := \{x \in P \mid A_I \cdot x = b_I\}$ die *von I induzierte Seitenfläche*.

Wir zeigen nun, dass man die Gleichheitsmenge einer Seitenfläche explizit berechnen kann.

(1.21) Satz. Seien $P = P(A, b)$ ein Polyeder und $\emptyset \neq F = \{x \in P \mid c^T x = c_0\}$ eine Seitenfläche von P . Dann gilt

$$\text{eq}(F) = \{i \in M \mid \exists u \geq 0 \text{ mit } u_i > 0 \text{ und } u^T A = c^T, u^T b = c_0\}. \quad \triangle$$

Beweis. Nach Voraussetzung und Folgerung (11.19) aus ADM I haben die beiden linearen Programme

$$(P) \quad \max_{Ax \leq b} c^T x \quad \text{und} \quad (D) \quad \begin{array}{l} \min u^T b \\ u^T A = c^T \\ u \geq 0 \end{array}$$

optimale Lösungen mit gleichem Zielfunktionswert c_0 , und F ist die Menge der Optimallösungen von (P). Sei nun $i \in \text{eq}(F)$. Aufgrund des Satzes (11.26) vom starken komplementären Schlupf existieren Optimallösungen $\bar{x}, \bar{u}$ von (P), (D) mit $\bar{u}_j > 0 \Leftrightarrow A_j \cdot \bar{x} = b_j$. Wegen $\bar{x} \in F$ gilt $A_i \cdot \bar{x} = b_i$, also gibt es einen Vektor u mit den geforderten Eigenschaften.

Gibt es umgekehrt einen Vektor $u \geq 0$ mit $u_i > 0$ und $u^T A = c^T$, $u^T b = c_0$, so ist u optimal für (D), und aus dem Satz vom schwachen komplementären Schlupf (11.25) folgt $A_i \cdot x = b_i$ für alle $x \in F$, d. h. $i \in \text{eq}(F)$. $\square$

(1.22) Satz. Seien $P = P(A, b)$ ein Polyeder und $F \neq \emptyset$ eine Teilmenge von P , dann sind äquivalent:

- (i) F ist eine Seitenfläche von P .
- (ii) $\exists I \subseteq M$ mit $F = \text{fa}(I) = \{x \in P \mid A_I \cdot x = b_I\}$.
- (iii) $F = \text{fa}(\text{eq}(F))$. $\triangle$

Beweis. Gelten (ii) oder (iii), dann ist F offenbar eine Seitenfläche von P .

(i) $\implies$ (ii): Sei $F = \{x \in P \mid c^T x = c_0\}$ eine Seitenfläche. Setzen wir $I := \text{eq}(F)$, dann gilt nach Definition $F \subseteq \{x \in P \mid A_I \cdot x = b_I\} =: F'$. Ist $x \in F'$, so gilt $x \in P$; es bleibt zu zeigen, dass $c^T x = c_0$ gilt. Zu jedem $i \in I$ gibt es nach (1.21) einen Vektor $u^{(i)}$ mit $u^{(i)} \geq 0$, $u_i^{(i)} > 0$, $(u^{(i)})^T A = c^T$ und $(u^{(i)})^T b = c_0$. Setze

$$u := \sum_{i \in I} \frac{1}{|I|} u^{(i)},$$

dann gilt nach Konstruktion $u_i > 0 \forall i \in I$ und ferner $u_i = 0 \forall i \in M \setminus I$ (andernfalls wäre $i \in I$ nach (1.21)). Die Vektoren x und u sind zulässig für die linearen Programme (P), (D) des Beweises von (1.21). Aus dem Satz vom schwachen komplementären Schlupf (11.25) aus ADM I folgt, dass sie auch optimal sind. Daraus folgt $c^T x = c_0$ und somit $x \in F$.

(ii) $\implies$ (iii) folgt direkt aus dem obigen Beweis. $\square$

Aus Satz (1.22) folgt, dass zur Darstellung einer Seitenfläche von $P(A, b)$ keine zusätzliche Ungleichung benötigt wird. Man braucht lediglich in einigen der Ungleichungen des Systems $Ax \leq b$ Gleichheit zu fordern. Da jede nichtleere Seitenfläche auf diese Weise erzeugt werden kann, folgt:

(1.23) Korollar. Sind $A \in \mathbb{K}^{(m,n)}$, $b \in \mathbb{K}^m$, dann hat das Polyeder $P(A, b)$ höchstens $2^m + 1$ Seitenflächen. $\triangle$

Beweis. $M = \{1, \dots, m\}$ hat 2^m Teilmengen. Für jede Teilmenge $I \subseteq M$ ist $P \cap \{x \mid A_I \cdot x = b_I\}$ eine Seitenfläche von P . Dazu kommt u. U. noch die leere Seitenfläche. $\square$

1.4 Gültige Ungleichungen, Seitenflächen und Dimension

Man kann Seitenflächen auf ähnliche Weise durch Einführung von Abbildungen analog zu eq bzw. fa bezüglich der Darstellung $P = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$ charakterisieren. Diese Kennzeichnungen von Seitenflächen sind jedoch technisch aufwendiger. Der interessierte Leser sei dazu auf Bachem and Grötschel (1982) verwiesen.

Wir wollen nun zeigen, dass man auch die Dimension einer Seitenfläche eines Polyeders explizit berechnen kann. Zunächst führen wir einen Hilfsbegriff ein.

(1.24) Definition. Ein Element x eines Polyeders P heißt innerer Punkt von P , wenn x in keiner echten Seitenfläche von P enthalten ist. $\triangle$

Achtung! Innere Punkte eines Polyeders P sind nicht notwendig auch topologisch innere Punkte im Sinne der natürlichen Topologie des $\mathbb{K}^n$. Unsere inneren Punkte sind topologisch innere Punkte im Sinne der Relativtopologie auf P .

(1.25) Satz. Jedes nichtleere Polyeder besitzt innere Punkte. $\triangle$

Beweis. Sei $P = P(A, b)$ und $I = \text{eq}(P(A, b))$, $J = M \setminus I$. Gilt $I = M$, so hat P keine echten Seitenflächen, also ist jedes Element von P ein innerer Punkt. Andernfalls ist das System $Ax \leq b$ äquivalent zu

$$\begin{aligned} A_I x &= b_I, \\ A_J x &\leq b_J. \end{aligned}$$

P hat innere Punkte heißt dann, dass es ein x gibt mit $A_I x = b_I$ und $A_J x < b_J$. Zu jedem $i \in J$ existiert nach Definition ein Vektor $y^{(i)} \in P$ mit $A_i y^{(i)} < b_i$. Setze $y := \frac{1}{|J|} \sum_{i \in J} y^{(i)}$, dann ist y Konvexkombination von Elementen von P , also $y \in P$, und es gilt $A_J y < b_J$. Mithin ist y ein innerer Punkt von P . $\square$

(1.26) Satz. Sei F Seitenfläche eines Polyeders $P(A, b)$ und $\bar{x} \in F$. Der Vektor $\bar{x}$ ist ein innerer Punkt von F genau dann, wenn $\text{eq}(\{\bar{x}\}) = \text{eq}(F)$. $\triangle$

Beweis. $\bar{x}$ ist genau dann ein innerer Punkt von F , wenn die kleinste (im Sinne der Mengeninklusion) Seitenfläche von F , die $\bar{x}$ enthält, F selbst ist. Offenbar ist $\text{fa}(\text{eq}(\{\bar{x}\}))$ die minimale Seitenfläche von P , die $\bar{x}$ enthält. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

(1.27) Satz. Ist $F \neq \emptyset$ eine Seitenfläche des Polyeders $P(A, b) \subseteq \mathbb{K}^n$, dann gilt

$$\dim(F) = n - \text{rang}(A_{\text{eq}(F)}). \quad \triangle$$

Beweis. Sei $I := \text{eq}(F)$. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass $n = \text{rang}(A_I) + \dim(\text{kern}(A_I))$ gilt. Zu zeigen ist also: $\dim(F) = \dim(\text{kern}(A_I))$. Seien

$$r := \dim(\text{kern}(A_I)) \quad \text{und} \quad s := \dim(F).$$

„ $r \geq s$ “: Da $\dim(F) = s$, gibt es $s + 1$ affin unabhängige Vektoren $x_0, x_1, \dots, x_s \in F$. Dann sind die Vektoren $x_1 - x_0, \dots, x_s - x_0$ linear unabhängig und erfüllen $A_I(x_i - x_0) = 0$. $\text{kern}(A_I)$ enthält also mindestens s linear unabhängige Vektoren, also gilt $r \geq s$.

1 Polyedertheorie

„ $s \geq r$ “: Nach (1.25) besitzt F einen inneren Punkt $\bar{x} \in F$. Nach (1.26) gilt $\text{eq}(\{\bar{x}\}) = \text{eq}(F) = I$, und daraus folgt für $J := M \setminus I$:

$$\begin{aligned} A_I \bar{x} &= b_I, \\ A_J \bar{x} &< b_J. \end{aligned}$$

Ist $r = 0$, so gilt $s \geq 0$ wegen $\bar{x} \in F$. Sei also $r \geq 1$, und $\{x_1, \dots, x_r\}$ sei eine Basis von $\text{kern}(A_I)$. Für $p = 1, \dots, r$ und $j \in J$ setze:

$$\begin{aligned} \delta_{jp} &:= \begin{cases} \infty, & \text{falls } A_j x_p = 0 \\ \frac{b_j - A_j \bar{x}}{A_j x_p} & \text{andernfalls,} \end{cases} \\ \varepsilon &:= \min\{\delta_{jp} \mid j \in J, p \in \{1, \dots, r\}\}. \end{aligned}$$

(Setze $\varepsilon \neq 0$ beliebig, falls $\delta_{jp} = \infty$ für alle j, p .) Für $i \in I$ und alle $p \in \{1, \dots, r\}$ gilt nun

$$A_i(\bar{x} + \varepsilon x_p) = A_i \bar{x} + \varepsilon A_i x_p = A_i \bar{x} = b_i,$$

da $A_i x_p = 0$. Für $j \in J$ gilt

$$\begin{aligned} A_j(\bar{x} + \varepsilon x_p) &= A_j \bar{x} + \varepsilon A_j x_p \\ &\leq A_j \bar{x} + \delta_{jp} A_j x_p \\ &= A_j \bar{x} + b_j - A_j \bar{x} \\ &= b_j. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\bar{x} + \varepsilon x_p \in F$ für alle $p \in \{1, \dots, r\}$. Da die Vektoren $\varepsilon x_1, \dots, \varepsilon x_r$ linear unabhängig sind, sind die Vektoren $\bar{x}, \bar{x} + \varepsilon x_1, \dots, \bar{x} + \varepsilon x_r$ affin unabhängig. Das heißt, F enthält mindestens $r + 1$ affin unabhängige Vektoren, und somit gilt $\dim(F) = s \geq r$. $\square$

(1.28) Korollar. $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{K}^n$ sei ein nichtleeres Polyeder, dann gilt:

(a) $\dim(P) = n - \text{rang}(A_{\text{eq}(P)})$.

(b) Ist $\text{eq}(P) = \emptyset$, dann ist P volldimensional (d. h. $\dim(P) = n$).

(c) Ist F eine echte Seitenfläche von P , dann gilt $\dim(F) \leq \dim(P) - 1$. $\triangle$

Mit Hilfe von Satz (1.27) kann man auch die affine Hülle einer Seitenfläche auf einfache Weise bestimmen.

(1.29) Satz. Sei $F \neq \emptyset$ eine Seitenfläche des Polyeders $P(A, b)$, dann gilt

$$\text{aff}(F) = \{x \mid A_{\text{eq}(F)} x = b_{\text{eq}(F)}\}. \quad \triangle$$

Beweis. Es seien $I := \text{eq}(F)$ und $T := \{x \mid A_I x = b_I\}$. Offenbar ist T ein affiner Raum und wegen $F \subseteq T$ gilt $\text{aff}(F) \subseteq \text{aff}(T) = T$. Sei $s = \dim(F)$, dann folgt aus Satz (1.27), dass $\dim(\text{kern}(A_I)) = s$ und somit $\dim(T) = s$ gilt. Aus $\dim(\text{aff}(F)) = \dim T$ und $\text{aff}(F) \subseteq T$ folgt $\text{aff}(F) = T$. $\square$

1.5 Facetten und Redundanz

Wie wir bereits bemerkt haben, kann man zu einem Ungleichungssystem $Ax \leq b$ beliebig viele Ungleichungen hinzufügen, ohne die Lösungsmenge des Systems zu ändern. Wir wollen nun untersuchen, wie man ein gegebenes Polyeder mit möglichst wenigen Ungleichungen darstellen kann. Dies ist speziell für die lineare Optimierung wichtig, da der Rechenaufwand zur Auffindung einer Optimallösung in der Regel von der Anzahl der vorgelegten Ungleichungen abhängt. Gesucht wird also eine Minimaldarstellung eines Polyeders, um rechentechnische Vorteile zu haben. Es wird sich zeigen, dass hierbei diejenigen Ungleichungen, die maximale echte Seitenflächen eines Polyeders definieren, eine wesentliche Rolle spielen. Deshalb wollen wir derartige Seitenflächen untersuchen.

(1.30) Definition. $Ax \leq b$ sei ein Ungleichungssystem, und M sei die Zeilenindexmenge von A .

- (a) Sei $I \subseteq M$, dann heißt das System $A_I x \leq b_I$ unwesentlich oder redundant bezüglich $Ax \leq b$, wenn $P(A, b) = P(A_{M \setminus I}, b_{M \setminus I})$ gilt.
- (b) Enthält $Ax \leq b$ ein unwesentliches Teilsystem $A_I x \leq b_I$, dann heißt $Ax \leq b$ redundant, andernfalls irredundant.
- (c) Eine Ungleichung $A_i x \leq b_i$ heißt wesentlich oder nicht redundant bezüglich $Ax \leq b$, wenn $P(A, b) \neq P(A_{M \setminus \{i\}}, b_{M \setminus \{i\}})$ gilt.
- (d) Eine Ungleichung $A_i x \leq b_i$ heißt implizite Gleichung bezüglich $Ax \leq b$, wenn $i \in \text{eq}(P(A, b))$ gilt.
- (e) Ein System $Ax \leq a$, $Bx = b$ heißt irredundant, wenn $Ax \leq a$ keine unwesentliche Ungleichung bezüglich des Systems $Ax \leq a$, $Bx \leq b$, $-Bx \leq -b$ enthält und B vollen Zeilenrang hat.
- (f) Eine nichttriviale Seitenfläche F von $P(A, b)$ heißt Facette von $P(A, b)$, falls F in keiner anderen echten Seitenfläche von $P(A, b)$ enthalten ist. $\triangle$

Wir weisen ausdrücklich darauf hin, dass Redundanz bzw. Irredundanz keine Eigenschaft des Polyeders $P(A, b)$ ist, sondern eine Eigenschaft des Ungleichungssystems $Ax \leq b$. Wir werden sehen, dass ein Polyeder viele irredundante Beschreibungen haben kann. Ferner ist auch die Annahme falsch, dass man immer durch das gleichzeitige Weglassen aller unwesentlichen Ungleichungen eines Systems $Ax \leq b$ eine irredundante Beschreibung von $P(A, b)$ erhält. Wir wollen nun zunächst unwesentliche Ungleichungen charakterisieren.

(1.31) Satz. Ein Ungleichungssystem $A_I x \leq b_I$ ist unwesentlich bezüglich $Ax \leq b$ genau dann, wenn es eine Matrix $U \in \mathbb{K}_+^{(|I|, m)}$ gibt mit $UA = A_I$, $Ub \leq b_I$ und $U_I = 0$. $\triangle$

Beweis. Für jedes $i \in I$ ist nach (1.20) die Ungleichung $A_i x \leq b_i$ gültig bezüglich $P(A_{M \setminus I}, b_{M \setminus I})$ genau dann, wenn es einen Vektor $\bar{u}_i \geq 0$ gibt mit $\bar{u}_i^T A_{M \setminus I} = A_i$. und

$\bar{u}_i^T b \leq b_i$. Dies ist genau dann der Fall, wenn es eine Matrix $U \in \mathbb{K}_+^{(|I|, m)}$ gibt mit $UA = A_I$, $Ub \leq b_I$ und $U_{\cdot I} = 0$. $\square$

(1.32) Korollar. $A_i.x \leq b_i$ ist genau dann redundant bezüglich $Ax \leq b$, wenn es einen Vektor $u \in \mathbb{K}_+^m$ gibt mit $u^T A = A_i$, $u^T b \leq b_i$, $u_i = 0$. $\triangle$

Der nächste Satz zeigt, wann man Ungleichungen nicht mehr weglassen kann, ohne das Polyeder zu ändern.

(1.33) Satz. $P = P(A, b) \neq \emptyset$ sei ein Polyeder. Sei $\emptyset \neq I \subseteq M \setminus \text{eq}(P)$ und $P' := P(A_{M \setminus I}, b_{M \setminus I})$. Dann gilt

$$P \neq P' \iff \exists \text{ nichttriviale Seitenfläche } F \subseteq P \text{ mit } \text{eq}(F) \subseteq I \cup \text{eq}(P). \quad \triangle$$

Beweis. Im Weiteren bezeichnen wir mit $\text{eq}_{P'}$ die „equality set“-Abbildung bezüglich P' . Es gilt offenbar $\text{eq}_{P'}(F) \subseteq \text{eq}(F)$.

„ $\Leftarrow$ “ Angenommen, es gilt $P = P'$, und F sei eine beliebige nichttriviale Seitenfläche von P (und somit auch von P'). Da F eine nichttriviale Seitenfläche von P' ist, gibt es ein $i \in (M \setminus I) \setminus \text{eq}_{P'}(P')$ mit $i \in \text{eq}_{P'}(F)$. Daraus folgt $\text{eq}(F) \not\subseteq I \cup \text{eq}(P)$.

„ $\Rightarrow$ “ Angenommen, es gilt $P \neq P'$. Wegen $P \subseteq P'$ heißt dies, es existiert ein Vektor $v \in P' \setminus P$, und somit gibt es eine Indexmenge $\emptyset \neq K \subseteq I$ mit der Eigenschaft $A_i.v \leq b_i \forall i \in M \setminus K$ und $A_i.v > b_i \forall i \in K$. Nach Satz (1.25) hat P einen inneren Punkt, sagen wir w , d. h. es gilt $A_i.w = b_i \forall i \in \text{eq}(P)$ und $A_i.w < b_i \forall i \in M \setminus \text{eq}(P)$.

Wir betrachten nun einen Punkt y auf der Strecke zwischen v und w , d. h. $y = \lambda w + (1 - \lambda)v$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$. Aufgrund der Voraussetzungen gilt:

$$\begin{aligned} A_i.y &= b_i \quad \forall i \in \text{eq}(P) \\ A_i.y &< b_i \quad \forall i \in M \setminus (\text{eq}(P) \cup K), \text{ falls } \lambda > 0. \end{aligned}$$

Ist $i \in K$, so gilt

$$\begin{aligned} A_i.y \leq b_i &\iff \lambda A_i.w + (1 - \lambda)A_i.v \leq b_i \\ &\iff \lambda A_i.(w - v) \leq b_i - A_i.v \\ &\iff \lambda \geq \frac{b_i - A_i.v}{A_i.(w - v)} \quad (\text{da } A_i.(w - v) < 0). \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} \mu &:= \max \left\{ \frac{b_i - A_i.v}{A_i.(w - v)} \mid i \in K \right\}, \\ L &:= \left\{ i \in K \mid \mu = \frac{b_i - A_i.v}{A_i.(w - v)} \right\}, \end{aligned}$$

dann gilt $z := \mu w + (1 - \mu)v \in P$, $\emptyset \neq L \subseteq K \subseteq I$ und

$$\begin{aligned} A_i.z &= b_i \quad \forall i \in L \\ A_i.z &< b_i \quad \forall i \in K \setminus L. \end{aligned}$$

Daraus folgt, z ist ein innerer Punkt von $F := \text{fa}(L \cup \text{eq}(P))$. Nach (1.26) gilt dann $\text{eq}(F) = \text{eq}(\{z\}) = L \cup \text{eq}(P)$, und das bedeutet, dass F eine nichttriviale Seitenfläche von P mit $\text{eq}(F) \subseteq I \cup \text{eq}(P)$ ist. $\square$

Wir werden nun wichtige Eigenschaften von Facetten bestimmen, Nichtredundanz kennzeichnen und Facetten charakterisieren.

(1.34) Satz. *Sei F eine Facette von $P = P(A, b)$, dann gilt:*

(a) $\text{eq}(P) \subset \text{eq}(F)$.

(b) Für alle $i \in \text{eq}(F) \setminus \text{eq}(P)$ gilt

$$F = \text{fa}(\{i\}) = \{x \in P \mid A_i \cdot x = b_i\}. \quad \triangle$$

Beweis. (a) gilt offensichtlich für alle nichttrivialen Seitenflächen von P .

(b) Die Abbildung fa ist inklusionsumkehrend, d. h.

$$I \subseteq J \implies \text{fa}(I) \supseteq \text{fa}(J).$$

Daraus folgt $F = \text{fa}(\text{eq}(F)) \subseteq \text{fa}(\{i\})$. Da $i \notin \text{eq}(P)$, muss $\text{fa}(\{i\})$ eine echte Seitenfläche von P sein. Aus der Maximalität von F folgt die Behauptung. $\square$

(1.35) Korollar. *Sei $P = P(A, b)$ ein Polyeder und $\mathcal{F}$ die Menge der Facetten von P . Dann gilt:*

(a) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}, F_1 \neq F_2 \implies \text{eq}(F_1) \cap \text{eq}(F_2) = \text{eq}(P)$.

(b) $|\mathcal{F}| \leq m - |\text{eq}(P)|$.

(c) Es gibt eine Menge $I \subseteq M$ mit folgenden Eigenschaften

(c₁) $I \subseteq M \setminus \text{eq}(P)$,

(c₂) $|I| = |\mathcal{F}|$,

(c₃) $F \in \mathcal{F} \iff \exists \text{ genau ein } i \in I \text{ mit } F = \text{fa}(\{i\})$. $\triangle$

Jede Menge $I \subseteq M$ mit den Eigenschaften (c₁), (c₂), (c₃) wollen wir *Facetten-Indexmenge* nennen. Satz (1.34)(b) zeigt, dass man Facetten von P dadurch erhält, dass man in nur einer Ungleichung $A_i \cdot x \leq b_i$ des Systems $Ax \leq b$ Gleichheit fordert. Jedoch ist es keineswegs so, dass für alle $i \in M$ die Menge $\text{fa}(\{i\})$ eine Facette von P ist! Dies gilt nur für solche $i \in M$, die in einer Facettenindexmenge enthalten sind.

(1.36) Satz. *Seien $P = P(A, b) \neq \emptyset$ ein Polyeder und $\mathcal{F}$ die Menge der Facetten von P . Seien M die Zeilenindexmenge von A , $I \subseteq M \setminus \text{eq}(P)$ und $J \subseteq \text{eq}(P)$. Sei $P' := \{x \mid A_J \cdot x = b_J, A_I \cdot x \leq b_I\}$, dann gilt:*

(a) $P = P' \iff$ (a₁) $\forall F \in \mathcal{F} \text{ gilt } I \cap \text{eq}(F) \neq \emptyset$ und
(a₂) $\text{rang}(A_J) = \text{rang}(A_{\text{eq}(P)})$.

$$(b) \ P = P(A_{I \cup \text{eq}(P)}, b_{I \cup \text{eq}(P)}) \iff \forall F \in \mathcal{F} \text{ gilt } I \cap \text{eq}(F) \neq \emptyset. \quad \triangle$$

Beweis. Mit $J = \text{eq}(P)$ folgt (b) direkt aus (a). Wir beweisen (a).

„ $\implies$ “ Nach Definition gilt offenbar $J = \text{eq}_{P'}(P')$. Angenommen (a₂) ist nicht erfüllt, d. h. $\text{rang}(A_J) < \text{rang}(A_{\text{eq}(P)})$. Dann folgt aus der Dimensionsformel (1.28)(a) $\dim(P') > \dim(P)$ und somit muss $P \neq P'$ gelten. Widerspruch!

Angenommen (a₁) ist nicht erfüllt. Dann gibt es eine Facette F von P mit $\text{eq}(F) \subseteq M \setminus I = (M \setminus I) \cup \text{eq}(P)$. Folglich gilt $P \neq P'$ nach Satz (1.33). Widerspruch!

„ $\impliedby$ “ Wir zeigen zunächst, dass unter der Voraussetzung (a₂) gilt:

$$A_J x = b_J \implies A_{\text{eq}(P)} x = b_{\text{eq}(P)}.$$

Da $P' \neq \emptyset$, gilt $\text{rang}(A_J, b_J) = \text{rang}(A_J) = \text{rang}(A_{\text{eq}(P)}) = \text{rang}(A_{\text{eq}(P)}, b_{\text{eq}(P)})$. Das heißt, für alle $i \in \text{eq}(P)$ existieren $K \subseteq J$ und $\lambda_k, k \in K$, mit $A_i = \sum_{k \in K} \lambda_k A_k$, $b_i = \sum_{k \in K} \lambda_k b_k$. Erfüllt also der Vektor x das System $A_J x = b_J$, so gilt für alle $i \in \text{eq}(P)$

$$A_i x = \sum_{k \in K} \lambda_k A_k x = \sum_{k \in K} \lambda_k b_k = b_i.$$

Nach (a₁) gilt für jede Facette F von P : $\text{eq}(F) \not\subseteq M \setminus I$, und da Facetten maximale echte Seitenflächen sind und eq inklusionsumkehrend ist, folgt daraus $\text{eq}(G) \not\subseteq M \setminus I$ für alle echten Seitenflächen G von P . Aus Satz (1.33) folgt daher $P = P'$. $\square$

(1.37) Korollar. Seien $P = P(A, b) \neq \emptyset$ ein Polyeder, $I \subseteq M \setminus \text{eq}(P)$, $J \subseteq \text{eq}(P)$ und $P = \{x \mid A_J x = b_J, A_I x \leq b_I\}$. Diese Darstellung von P ist genau dann irredundant, wenn gilt:

(a) I ist eine Facetten-Indexmenge von P .

(b) A_J ist eine $(\text{rang}(A_{\text{eq}(P)}), n)$ -Matrix mit vollem Zeilenrang. $\triangle$

(1.38) Korollar. Sei $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{K}^n$ ein volldimensionales Polyeder (also $\text{eq}(P) = \emptyset$, bzw. $\dim(P) = n$), dann gilt für alle $I \subseteq M$

$P(A_I, b_I)$ ist eine irredundante Beschreibung von P

$\iff I$ ist Facetten-Indexmenge von P . $\triangle$

(1.39) Satz. Sei $P = P(A, b)$ ein Polyeder, und F sei eine nichttriviale Seitenfläche von P . Dann sind äquivalent:

(i) F ist eine Facette von P .

(ii) F ist eine maximale echte Seitenfläche von P .

(iii) $\dim(F) = \dim(P) - 1$.

- (iv) F enthält $\dim(P)$ affin unabhängige Vektoren.
- (v) Sei $c^T x \leq c_0$ eine bezüglich P gültige Ungleichung mit $F = \{x \in P \mid c^T x = c_0\}$, dann gilt für alle gültigen Ungleichungen $d^T x \leq \delta$ mit $F \subseteq \{x \in P \mid d^T x = \delta\}$: Es gibt einen Vektor $u \in \mathbb{K}^{\text{eq}(P)}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \geq 0$ mit

$$\begin{aligned} d^T &= \alpha c^T + u^T A_{\text{eq}(P).}, \\ \delta &= \alpha c_0 + u^T b_{\text{eq}(P)}. \end{aligned} \quad \triangle$$

Beweis. (i) $\iff$ (ii): nach Definition.

(iv) $\iff$ (iii): trivial.

(iii) $\implies$ (ii): Angenommen F ist keine Facette, dann existiert eine echte Seitenfläche G von P mit $F \subset G \subset P$. Aus (1.28)(c) folgt dann $\dim(F) \leq \dim(G) - 1 \leq \dim(P) - 2$, Widerspruch!

(i) $\implies$ (v): Sei F eine beliebige Facette von P . Wir nehmen zunächst an, dass $A_I.x \leq b_I$, $A_J.x = b_J$ eine irredundante Darstellung von $P(A, b)$ ist mit $1 \in I$ und dass $F = \{x \in P \mid A_1.x = b_1\}$ gilt. Sei nun $d^T x \leq \delta$ eine gültige Ungleichung mit $F \subseteq \{x \in P \mid d^T x = \delta\}$. Aufgrund von Folgerung (1.20) gibt es Vektoren $v \geq 0$ und w mit $v^T A_I. + w^T A_J. = d^T$ und $v^T b_I + w^T b_J \leq \delta$ (in der Tat gilt hier Gleichheit, da $\{x \mid d^T x = \delta\}$ eine Stützhyperebene ist). Angenommen, es gibt einen Index $i \in I \setminus \{1\}$ mit $v_i > 0$, dann gilt nach (1.21) $i \in \text{eq}(F)$. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass I eine Facettenindexmenge ist. Hieraus folgt (v).

(v) $\implies$ (iii): Da F eine echte Seitenfläche von P ist, gilt $\dim(F) \leq \dim(P) - 1$. Angenommen $\dim(F) \leq \dim(P) - 2$. O. B. d. A. können wir annehmen, dass $F = \{x \in P \mid A_1.x = b_1\}$ gilt. Aus (1.27) folgt

$$\text{rang}(A_{\text{eq}(F).}) \geq \text{rang}(A_{\text{eq}(P).}) + 2.$$

Mithin gibt es einen Index $i \in \text{eq}(F) \setminus (\text{eq}(P) \cup \{1\})$, so dass der Zeilenvektor $A_i.$ linear unabhängig von den Zeilenvektoren $A_j.$, $j \in \text{eq}(P) \cup \{1\}$, ist. Das aber heißt, dass das System

$$A_i. = \alpha A_1. + u^T A_{\text{eq}(P).}$$

keine Lösung α, u hat. Wegen $F \subseteq \{x \in P \mid A_i.x = b_i\}$ ist dies ein Widerspruch zu (v). $\square$

(1.40) Korollar. Seien $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{K}^n$ ein volldimensionales Polyeder und $F = \{x \in P \mid c^T x = c_0\}$ eine Seitenfläche von P . Dann sind äquivalent:

- (i) F ist Facette von P .
- (ii) $\dim(F) = n - 1$.

- (iii) Für alle gültigen Ungleichungen $d^T x \leq \delta$, $d \neq 0$, mit $F \subseteq \{x \in P \mid d^T x = \delta\}$ gilt:
Es existiert ein $\alpha > 0$ mit

$$\begin{aligned} d^T &= \alpha c^T, \\ \delta &= \alpha c_0. \end{aligned} \quad \triangle$$

(1.41) Beispiel. Wir betrachten das Polyeder $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{R}^2$, das wie folgt gegeben ist (siehe Abbildung 1.2).

$$A = \begin{pmatrix} A_1. \\ A_2. \\ A_3. \\ A_4. \\ A_5. \\ A_6. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

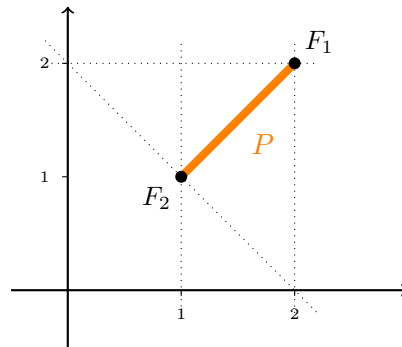


Abbildung 1.2: Ein 1-dimensionales Polyeder in $\mathbb{R}^2$

P hat 4 Seitenflächen, nämlich $\emptyset$, P und $F_1 = \{(2)\}$, $F_2 = \{(1)\}$. F_1 und F_2 sind Facetten von P . Es gilt $\text{eq}(P) = \{1, 2\}$, $\text{eq}(F_1) = \{1, 2, 3, 4\}$, $\text{eq}(F_2) = \{1, 2, 5, 6\}$, $\text{eq}(\emptyset) = \{1, \dots, 6\}$. Die Mengen $\{3, 5\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 5\}$, $\{4, 6\}$ sind die Facettenindexmengen von P . Eine irredundante Beschreibung von P ist z. B. gegeben durch

$$P = \{x \mid A_1.x = 0, A_3.x \leq b_3, A_5.x \leq b_5\}.$$

Übrigens sind die Ungleichungen $A_i.x \leq b_i$, $i = 3, 4, 5, 6$ redundant bezüglich $P(A, b)$. Die Ungleichungssysteme $A_I.x \leq b_I$ mit $I = \{3, 5\}$ oder $I = \{4, 6\}$ sind z. B. ebenfalls redundant. Aber $A_I.x \leq b_I$ ist nicht redundant bezüglich $P(A, b)$, falls $I = \{3, 4, 5\}$. $\triangle$

1.6 Rezessionskegel, Linienraum und Homogenisierung

An dieser Stelle ist es nützlich einige weitere Objekte einzuführen, die man Polyedern (bzw. allgemeinen Mengen) zuordnen kann. Das Studium dieser Objekte ist für sich

selbst betrachtet sehr interessant. Wir wollen diese Mengen jedoch nur als Hilfsmittel zur Vereinfachung von Beweisen verwenden, weswegen wir nicht weiter auf theoretische Untersuchungen dieser Mengen eingehen werden.

(1.42) Definition. Sei $S \subseteq \mathbb{K}^n$ eine beliebige Menge. Wir definieren

$$(a) \text{ rec}(S) := \{y \in \mathbb{K}^n \mid \exists x \in S, \text{ so dass } \forall \lambda \geq 0 \text{ gilt } x + \lambda y \in S\},$$

$$(b) \text{ lineal}(S) := \{y \in \mathbb{K}^n \mid \exists x \in S, \text{ so dass } \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ gilt } x + \lambda y \in S\},$$

$$(c) \text{ hog}(S) := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x \in S \right\}^{\circ\circ}.$$

Die Menge $\text{rec}(S)$ heißt Rezessionskegel von S , $\text{lineal}(S)$ heißt Linearitätsraum oder Linienraum von S , und $\text{hog}(S)$ heißt Homogenisierung von S . $\triangle$

Wir wollen nun die oben eingeführten Mengen bezüglich Polyedern charakterisieren. Nennen wir einen Vektor y mit $x + \lambda y \in S$ für alle $\lambda \geq 0$ eine „Richtung nach Unendlich“, so besteht der Rezessionskegel einer Menge S aus allen Richtungen nach Unendlich. Für Polyeder gilt Folgendes:

(1.43) Satz. Sei $P = P(A, b) = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$ ein nichtleeres Polyeder, dann gilt

$$\text{rec}(P) = P(A, 0) = \text{cone}(E). \quad \triangle$$

Beweis. (a) $\text{rec}(P) = P(A, 0)$.

Ist $y \in \text{rec}(P)$, so existiert ein $x \in P$ mit $x + \lambda y \in P \forall \lambda \geq 0$. Daraus folgt $b \geq A(x + \lambda y) = Ax + \lambda Ay$. Gäbe es eine Komponente von Ay , die größer als Null ist, sagen wir $(Ay)_i > 0$, so wäre der Vektor $x + \lambda_0 y$ mit

$$\lambda_0 = \frac{b_i - (Ax)_i}{(Ay)_i} + 1$$

nicht in $P(A, b)$, Widerspruch!

Ist $y \in P(A, 0)$, so gilt für alle $x \in P(A, b)$ und $\lambda \geq 0$, $A(x + \lambda y) = Ax + \lambda Ay \leq b + 0 = b$, also ist $y \in \text{rec}(P)$.

(b) $\text{rec}(P) = \text{cone}(E)$.

Die Inklusion $\text{cone}(E) \subseteq \{y \in \mathbb{K}^n \mid \forall x \in S, \forall \lambda \geq 0 : x + \lambda y \in S\} \subseteq \text{rec}(P)$ ist offensichtlich. Umgekehrt sei $y \in \text{rec}(P)$, dann existiert wieder ein $x \in P$ wie oben. Angenommen $y \notin \text{cone}(E)$, dann gibt es nach dem Farkas-Lemma (ADM I Skript (11.2)(c)) ein u mit $u^T E \leq 0$ und $u^T y > 0$. Für jedes $z \in P$ folgt dann mit gewissen λ_i , $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\sum_i \lambda_i = 1$ und $\mu_i \geq 0$:

$$\begin{aligned} u^T z &= u^T \sum_i \lambda_i V_{\cdot i} + u^T \sum_i \mu_i E_{\cdot i} = \sum_i \lambda_i u^T V_{\cdot i} + u^T E \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{|E|} \end{pmatrix} \leq \sum_i \lambda_i u^T V_{\cdot i} \\ &\leq \max_i u^T V_{\cdot i} \end{aligned}$$

Andererseits gilt aber $u^T(x + \lambda y) = u^T x + \lambda u^T y \rightarrow \infty$, für $\lambda \rightarrow \infty$, ein Widerspruch zu $x + \lambda y \in P$ für alle $\lambda \geq 0$. $\square$

1 Polyedertheorie

Insbesondere folgt aus dem Beweis auch, dass $\text{rec}(P) = \{y \in \mathbb{K}^n \mid \forall x \in P \text{ und } \forall \lambda \geq 0 \text{ gilt } x + \lambda y \in P\}$ für Polyeder P gilt. Ist P ein Kegel, so gilt natürlich $P = \text{rec}(P)$, und offenbar ist ein Polyeder P genau dann ein Polytop, wenn $\text{rec}(P) = \{0\}$. Abbildung 1.3 zeigt ein Polyeder und seinen Rezessionskegel.

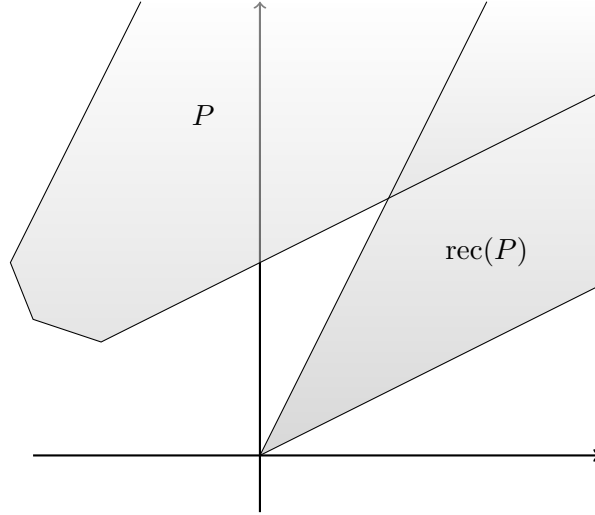


Abbildung 1.3: Ein Polyeder und sein Rezessionskegel

Aus Definition (1.42) folgt $\text{lineal}(P) = \text{rec}(P) \cap (-\text{rec}(P))$. Offenbar ist $\text{lineal}(P)$ ein linearer Teilraum des $\mathbb{K}^n$, und zwar ist es der größte lineare Teilraum $L \subseteq \mathbb{K}^n$, so dass $x + L \subseteq P$ für alle $x \in P$ gilt. Analytisch können wir $\text{lineal}(P)$ wie folgt darstellen.

(1.44) Satz. Sei $P = P(A, b) = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$ ein nichtleeres Polyeder, dann gilt

$$\text{lineal}(P) = \{x \mid Ax = 0\} = \text{cone}(\{e \in E \mid -e \in \text{cone}(E)\}). \quad \triangle$$

Beweis. Wegen $\text{lineal}(P) = \text{rec}(P) \cap (-\text{rec}(P))$ folgt die Behauptung direkt aus (1.43). $\square$

Wir kommen nun zur Homogenisierung. Die Definition der Homogenisierung erscheint etwas kompliziert: Man wende zweimal die Kegelpolarität auf die Menge S an! Geometrisch betrachtet ist $\text{hog}(S)$ der Durchschnitt aller Ungleichungen mit rechter Seite 0, die gültig bezüglich $\{\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in S\}$ sind.

(1.45) Satz. Sei $P = P(A, b) = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$ ein nichtleeres Polyeder. Sei

$$B = \begin{pmatrix} A & -b \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

dann gilt

$$\text{hog}(P) = P(B, 0) = \text{cone}(\{\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \mid v \in V\}) + \text{cone}(\{\begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} \mid e \in E\}). \quad \triangle$$

Beweis. Setzen wir $P_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x \in P \right\}$, so gilt offensichtlich

$$P_1 = \text{conv}(\left\{ \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \mid v \in V \right\} + \text{cone}(\left\{ \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} \mid e \in E \right\}).$$

Aus Folgerung (1.20)(iii) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} P_1^\circ &= \{z \in \mathbb{K}^{n+1} \mid z^T u \leq 0 \forall u \in P_1\} \\ &= \{z \in \mathbb{K}^{n+1} \mid z^T \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0 \forall v \in V, z^T \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} \leq 0 \forall e \in E\} \\ &= \left\{ z \mid \begin{pmatrix} V^T & \mathbf{1} \\ E^T & 0 \end{pmatrix} z \leq 0 \right\} = P \left(\begin{pmatrix} V^T & \mathbf{1} \\ E^T & 0 \end{pmatrix}, 0 \right). \end{aligned}$$

Mit Folgerung (1.7) $P(A, 0)^\circ = \text{cone}(A^T)$ erhalten wir nun

$$\text{hog}(P) = P_1^{\circ\circ} = P \left(\begin{pmatrix} V^T & \mathbf{1} \\ E^T & 0 \end{pmatrix}, 0 \right)^\circ = \text{cone} \begin{pmatrix} V & E \\ \mathbf{1}^T & 0^T \end{pmatrix}.$$

Die zweite Charakterisierung von $\text{hog}(P)$ folgt aus einer anderen Darstellung von P_1° . Es gilt nämlich mit Satz (1.18):

$$\begin{aligned} P_1^\circ &= \left\{ \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1} \mid y^T x + \lambda \mathbf{1} \leq 0 \forall x \in P \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1} \mid y^T x \leq -\lambda \forall x \in P \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1} \mid \begin{pmatrix} y \\ -\lambda \end{pmatrix} \in P^\gamma \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1} \mid \begin{pmatrix} y \\ -\lambda \end{pmatrix} \in \text{cone} \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ b^T & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \text{cone} \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ -b^T & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Folgerung (1.10) impliziert nun

$$\text{hog}(P) = P_1^{\circ\circ} = \left(\text{cone} \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ -b^T & -1 \end{pmatrix} \right)^\circ = P \left(\begin{pmatrix} A & -b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, 0 \right). \quad \square$$

In Abbildung 1.4 sind ein Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^1$, die im obigen Beweis definierte Menge P_1 und $\text{hog}(P)$ dargestellt.

(1.46) Bemerkung. Sei $P \subseteq \mathbb{K}^n$ ein Polyeder, dann gilt:

$$(a) \quad x \in P \iff \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{hog}(P).$$

$$(b) \quad x \in \text{rec}(P) \iff \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{hog}(P). \quad \triangle$$

Beweis. (a) ist trivial.

(b) Sei $P = P(A, b)$ eine Darstellung von P , dann gilt $\text{hog}(P) = P(B, 0)$ mit $B = \begin{pmatrix} A & -b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Folglich gilt nach (1.45) und (1.43)

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{hog}(P) \iff \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in P(B, 0) \iff Ax \leq 0 \iff x \in \text{rec}(P). \quad \square$$

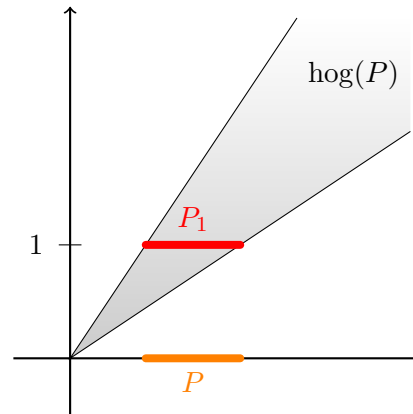


Abbildung 1.4: 1-dimensionaler Polyeder und seine Homogenisierung

1.7 Extremalen von spitzen Polyedern

Wir wollen nachfolgend einige Aussagen über spitze Polyeder beweisen, die sich – entsprechend modifiziert – auch für allgemeine Polyeder zeigen lassen. Dabei treten jedoch einige unschöne technische Komplikationen auf, so dass wir hier auf die Behandlung dieser Verallgemeinerung verzichten.

Wir erinnern daran, dass ein Polyeder spitz genannt wird, wenn es eine Ecke (null-dimensionale Seitenfläche) besitzt. Die folgende Aussage erweitert Satz (8.11) aus dem ADM I Skript.

(1.47) Satz. Sei $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{K}^n$ ein nichtleeres Polyeder, dann sind äquivalent:

- (1) P ist spitz.
- (2) $\text{rang}(A) = n$.
- (3) $\text{rec}(P)$ ist spitz, d. h. 0 ist eine Ecke von $\text{rec}(P)$.
- (4) Jede nichtleere Seitenfläche von P ist spitz.
- (5) $\text{hog}(P)$ ist spitz.
- (6) P enthält keine Gerade.
- (7) $\text{rec}(P)$ enthält keine Gerade.
- (8) $\text{lineal}(P) = \{0\}$. △

Beweis. Die Äquivalenz von (1), (2) und (4) wurde schon in ADM I in Satz (8.11) gezeigt.

Aus der Äquivalenz von (1) und (2) folgt direkt die Äquivalenz der Aussagen (2), (3) und (4), da

$$\text{rec}(P) = P(A, 0), \text{ nach (1.43),}$$

$$\text{hog}(P) = P\left(\begin{pmatrix} A & -b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, 0\right), \text{ nach (1.45).}$$

(3) $\implies$ (6). Angenommen P enthält eine Gerade $G = \{u + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$, $v \neq 0$, dann gilt $b \geq A(u + \lambda v) = Au + \lambda Av$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$. Daraus folgt $A(\lambda v) \leq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und somit $v, -v \in \text{rec}(P)$, d. h. $0 = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}(-v)$ ist eine Konvexkombination. Also ist 0 keine Ecke von $\text{rec}(P)$.

(6) $\implies$ (3). Ist $\text{rec}(P)$ nicht spitz, so ist 0 echte Konvexkombination von Vektoren aus $\text{rec}(P)$, sagen wir $0 = \lambda u + (1 - \lambda)v$, $u \neq 0 \neq v$, $0 < \lambda < 1$. Dann aber ist neben u auch $-\lambda u = (1 - \lambda)v \in \text{rec}(P)$ und folglich ist $G = \{\mu u \mid \mu \in \mathbb{K}\}$ eine Gerade in $\text{rec}(P)$, und für alle $x \in P$ ist $x + G$ eine Gerade in P .

Die Äquivalenz von (7) und (8) zu den übrigen Aussagen ist nun offensichtlich. $\square$

Der folgende Hilfssatz über innere Punkte wird im Weiteren benötigt.

(1.48) Lemma. *Ist F eine nichtleere Seitenfläche von $P = P(A, b)$, gilt $I = \text{eq}(F)$, und ist $B = \{y^1, \dots, y^k\}$ eine Basis des Kerns von A_I , dann gibt es zu jedem inneren Punkt $x \in F$ von F ein $\varepsilon > 0$, so dass $x \pm \varepsilon y^j \in P$ für alle $j = 1, \dots, k$ gilt.* $\triangle$

Beweis. Übungsaufgabe. $\square$

(1.49) Definition. *Sei P ein Polyeder. Ein Vektor $z \in \text{rec}(P) \setminus \{0\}$ heißt Extremale (oder Extremalvektor) von P , wenn $\text{cone}(\{z\})$ ein Extremalstrahl von $\text{rec}(P)$ ist.* $\triangle$

Nur spitze Polyeder haben Extremalen. Denn ist P nicht spitz, so ist nach (1.47) $\text{rec}(P)$ nicht spitz, also ist der Nullvektor eine echte Konvexkombination zweier von Null verschiedener Vektoren, sagen wir $0 = \lambda u + (1 - \lambda)v$, $0 < \lambda < 1$. Ist $F = \text{cone}(\{z\})$ ein Extremalstrahl von $\text{rec}(P)$, so gibt es eine bezüglich $\text{rec}(P)$ gültige Ungleichung $c^T x \leq 0$ mit $F = \{x \in \text{rec}(P) \mid c^T x = 0\}$. Nun gilt $0 = c^T 0 = c^T(\lambda u + (1 - \lambda)v) = \lambda c^T u + (1 - \lambda)c^T v \leq 0$. Aus $c^T u \leq 0$, $c^T v \leq 0$ folgt $c^T u = c^T v = 0$ und somit $u, v \in F$, ein Widerspruch. Aussagen über Extremalen machen also nur für spitze Polyeder Sinn.

Ist K speziell ein spitzer polyedrischer Kegel, so ist (wegen $\text{rec}(K) = K$) eine Extremale von K ein Vektor $z \in K$, so dass $\text{cone}(\{z\})$ ein Extremalstrahl von K ist. Das heißt, jeder auf einem Extremalstrahl von K gelegener und von Null verschiedener Vektor ist eine Extremale von K .

(1.50) Satz. *Seien $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{K}^n$ ein spitzen Polyeder und $z \in \text{rec}(P) \setminus \{0\}$. Dann sind äquivalent:*

(1) z ist eine Extremale von P .

(2) $\text{cone}(\{z\})$ ist ein Extremalstrahl von $\text{rec}(P)$.

- (3) z lässt sich nicht als echte konische Kombination zweier linear unabhängiger Elemente von $\text{rec}(P)$ darstellen.
- (4) $(\text{rec}(P) \setminus \text{cone}\{z\}) \cup \{0\}$ ist ein Kegel.
- (5) $\text{rang}(A_{\text{eq}(\{z\})}) = n - 1$ (wobei sich eq auf das System $Ax \leq 0$ bezieht). $\triangle$

Beweis. (1) $\iff$ (2). Definition.

(2) $\implies$ (3). Ist $F := \text{cone}(\{z\})$ ein Extremalstrahl von $\text{rec}(P)$, so ist F eine eindimensionale Seitenfläche von $\text{rec}(P)$, d. h. F kann keine zwei linear unabhängigen Vektoren enthalten. Insbesondere gibt es eine bezüglich $\text{rec}(P)$ gültige Ungleichung $c^T x \leq 0$ mit $F = \{x \in \text{rec}(P) \mid c^T x = 0\}$. Gibt es zwei linear unabhängige Vektoren $u, v \in \text{rec}(P)$ und $\lambda, \mu > 0$ mit $z = \lambda u + \mu v$, so gilt $0 = c^T z = c^T(\lambda u + \mu v) = \lambda c^T u + \mu c^T v \leq 0$. Daraus folgt $c^T u = c^T v = 0$, d. h. $u, v \in F$, ein Widerspruch.

(3) $\iff$ (4). Trivial.

(3) $\implies$ (5). Sei $I = \text{eq}(\{z\})$, dann ist z innerer Punkt von $F := \{x \in \text{rec}(P) \mid A_I x = 0\}$. Ist $\text{rang}(A_I) < n - 1$, dann enthält der Kern von A_I einen von z linear unabhängigen Vektor u . Nach Lemma (1.48) gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $z \pm \varepsilon u \in \text{rec}(P)$ gilt. Dann aber gilt $z = \frac{1}{2}(z + \varepsilon u) + \frac{1}{2}(z - \varepsilon u)$, d. h. z ist echte konische Kombination von zwei linear unabhängigen Elementen von $\text{rec}(P)$, Widerspruch. Offenbar ist $\text{rang}(A_I) \neq n$.

(5) $\implies$ (2). Sei $I = \text{eq}(\{z\})$, dann folgt für $F = \{x \in \text{rec}(P) \mid A_I x = 0\}$ aus der Voraussetzung, dass $\dim(F) = 1$ gilt. Da $\text{rec}(P)$ spitz ist, enthält nach (1.47) $\text{rec}(P)$ keine Gerade, also muss die eindimensionale Seitenfläche F der Strahl $\text{cone}(\{z\})$ sein. $\square$

Wir wollen nun noch eine Beziehung zwischen den Ecken und Extremalen eines spitzen Polyeders und den Extremalen seiner Homogenisierung aufzeigen.

(1.51) Satz. Sei $P \subseteq \mathbb{K}^n$ ein spitzes Polyeder, dann gilt:

- (a) x ist Ecke von $P \iff \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Extremale von $\text{hog}(P)$.
- (b) z ist Extremale von $P \iff \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Extremale von $\text{hog}(P)$. $\triangle$

Beweis. Sei $P = P(A, b)$, dann gilt nach Satz (1.45) $\text{hog}(P) = P(B, 0)$ mit

$$B = \begin{pmatrix} A & -b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Sei $I = \text{eq}(\{x\})$ bezüglich $P(A, b)$. x ist Ecke von $P \iff \text{rang}(A_I) = n$ (nach Satz (8.8) aus dem ADM I Skript) $\iff \text{rang}(B_{\text{eq}(\{\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\})}) = n$ (denn die neu hinzugekommene Ungleichung ist nicht mit Gleichheit erfüllt) $\stackrel{(1.50)}{\iff} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Extremale von $\text{hog}(P)$.

$$(b) \quad z \text{ ist Extremale von } P \iff z \text{ ist Extremale von } \text{rec}(P) \stackrel{(1.50)}{\iff} \text{rang}(A_{\text{eq}(\{z\})}) = n - 1 \iff \text{rang}(B_{\text{eq}(\{z\})}) = n \stackrel{(1.50)}{\iff} \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist Extremale von } \text{hog}(P). \quad \square$$

1.8 Weitere Darstellungssätze

Wir knüpfen hier an Abschnitt 1.3 an, wo wir bereits verschiedene Darstellungssätze bewiesen haben. Einige dieser Sätze können wir mit Hilfe der nun gewonnenen Erkenntnisse verschärfen.

Ist K ein polyedrischer Kegel und gilt $K = \text{cone}(E)$, dann nennen wir E eine *Kegelbasis von K* , wenn es keine echte Teilmenge E' von E gibt mit $K = \text{cone}(E')$ und wenn jede andere minimale Menge F mit $K = \text{cone}(F)$ dieselbe Kardinalität wie E hat. Ist P ein Polytop, dann heißt eine Menge V mit $P = \text{conv}(V)$ *konvexe Basis von P* , wenn V keine echte Teilmenge besitzt, deren konvexe Hülle P ist, und wenn jede andere minimale Menge W mit $P = \text{conv}(W)$ dieselbe Kardinalität wie V hat.

Trivialerweise sind die Elemente einer Kegelbasis E *konisch unabhängig*, d. h. kein $e \in E$ ist konische Kombination der übrigen Elemente von E ; und die Elemente einer konvexen Basis sind *konvex unabhängig*, d. h. kein Element von V ist Konvexkombination der übrigen Elemente von V . Es gilt aber keineswegs, dass jeder Vektor $x \in \text{cone}(E)$ bzw. $x \in \text{conv}(V)$ eine eindeutige konische bzw. konvexe Darstellung durch Vektoren aus E bzw. V hat. In dieser Hinsicht unterscheiden sich also Kegelbasen und konvexe Basen von Vektorraumbasen.

(1.52) Satz. Sei $\{0\} \neq K \subseteq \mathbb{K}^n$ ein spitzer polyedrischer Kegel, dann sind äquivalent:

- (1) E ist eine Kegelbasis von K .
- (2) E ist eine Menge, die man dadurch erhält, dass man aus jedem Extremalstrahl von K genau einen von Null verschiedenen Vektor (also eine Extremale von K) auswählt. $\triangle$

Beweis. Ist z Extremale von K , so ist $K' := (K \setminus \text{cone}(\{z\})) \cup \{0\}$ nach (1.50) ein Kegel. Folglich gilt $\text{cone}(E) \subseteq K'$ für alle Teilmengen E von K' . Also muss jede Kegelbasis von K mindestens ein (aus der Basiseigenschaft folgt sofort „genau ein“) Element von $\text{cone}(\{z\}) \setminus \{0\}$ enthalten.

Zum Beweis, dass jede wie in (2) spezifizierte Menge eine Kegelbasis ist, benutzen wir Induktion über $d = \dim K$. Für Kegel der Dimension 1 ist die Behauptung trivial. Sei die Behauptung für Kegel der Dimension d richtig und K ein Kegel mit $\dim K = d + 1$. Sei $y \in K \setminus \{0\}$ beliebig und $c \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ ein Vektor, so dass die Ecke 0 von K die eindeutig bestimmte Lösung von $\max\{c^T x \mid x \in K\}$ ist (c existiert nach Satz (8.8) aus dem ADM I Skript). Sei $z \in \{x \mid c^T x = 0\} \setminus \{0\}$. Dann ist für die Gerade

$$G = \{y + \lambda z \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

die Menge $K \cap G$ ein endliches Streckenstück (andernfalls wäre $z \in \text{rec}(K) = K$, und wegen $c^T z = 0$ wäre 0 nicht der eindeutige Maximalpunkt). Folglich gibt es zwei Punkte

z_1 und z_2 , die auf echten Seitenflächen, sagen wir F_1 und F_2 , von K liegen, so dass $K \cap G = \text{conv}(\{z_0, z_1\})$. Die Dimensionen der Seitenflächen F_1, F_2 sind höchstens d , F_1 und F_2 sind Kegel, und die Extremalstrahlen von F_1 und F_2 sind Extremalstrahlen von K . Nach Induktionsvoraussetzung werden z_1 und z_2 durch die in (2) festgelegten Mengen bezüglich F_1 und F_2 konisch erzeugt. Daraus folgt, dass y durch jede Menge des Typs (2) konisch erzeugt werden kann. Dies impliziert die Behauptung. $\square$

(1.53) Korollar. *Jeder spitze polyedrische Kegel besitzt eine – bis auf positive Skalierung der einzelnen Elemente – eindeutige Kegelbasis.* $\triangle$

(1.54) Korollar. *Jeder spitze polyedrische Kegel $K \neq \{0\}$ ist die Summe seiner Extremalstrahlen, d. h. sind $\text{cone}(\{e_i\})$, $i = 1, \dots, k$ die Extremalstrahlen von K , so gilt*

$$K = \text{cone}(\{e_1, \dots, e_k\}) = \sum_{i=1}^k \text{cone}(\{e_i\}). \quad \triangle$$

Der folgende Satz verschärft (1.13) für spitze Polyeder.

(1.55) Satz. *Jedes spitze Polyeder P lässt sich darstellen als die Summe der konvexen Hülle seiner Ecken und der konischen Hülle seiner Extremalen, d. h. sind V die Eckenmenge von P und $\text{cone}(\{e\})$, $e \in E$, die Extremalstrahlen von $\text{rec}(P)$ (bzw. ist E eine Kegelbasis von $\text{rec}(P)$), so gilt*

$$P = \text{conv}(V) + \text{cone}(E). \quad \triangle$$

Beweis. Sei $\text{hog}(P)$ die Homogenisierung von P . Da P spitz ist, ist $\text{hog}(P)$ nach (1.47) ein spitzer Kegel. Nach (1.54) ist $\text{hog}(P)$ die Summe seiner Extremalstrahlen $\text{cone}(\{e'_i\})$, $i = 1, \dots, k$. O. B. d. A. können wir annehmen, dass $e'_i = \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix}$, $i = 1, \dots, p$, und $e'_i = \begin{pmatrix} e_i \\ 0 \end{pmatrix}$, $i = p+1, \dots, k$ gilt. Aus (1.51) folgt: $V = \{v_1, \dots, v_p\}$ ist die Eckenmenge von P und $E = \{e_{p+1}, \dots, e_k\}$ ist die Extremalenmenge von P . Nach (1.46) gilt $x \in P \iff \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{hog}(P)$ und somit folgt $x \in P \iff x = \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i + \sum_{i=p+1}^k \mu_i e_i$, $\lambda_i, \mu_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$, d. h. $x \in \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$. $\square$

(1.56) Korollar (Satz von Krein-Milman). *Sei P ein Polyeder und V die Menge seiner Ecken, dann gilt*

$$P \text{ ist ein Polytop} \iff P = \text{conv}(V). \quad \triangle$$

(1.57) Korollar. *Polytope haben eine eindeutige konvexe Basis.* $\triangle$

Für die lineare Optimierung ist die folgende Beobachtung wichtig.

(1.58) Satz. *Seien $P \subseteq \mathbb{K}^n$ ein spitzes Polyeder und $c \in \mathbb{K}^n$. Das lineare Programm $\max c^T x$, $x \in P$ ist genau dann unbeschränkt, wenn es eine Extremale e von P gibt mit $c^T e > 0$.* $\triangle$

Beweis. Seien V die Eckenmenge von P und E eine Kegelbasis von $\text{rec}(P)$, dann gilt nach (1.55) $P = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$. Es ist $\gamma := \max\{c^T v \mid v \in V\} < \infty$, da V endlich und $\gamma = \max\{c^T x \mid x \in \text{conv}(V)\}$. Gilt $c^T e \leq 0 \ \forall e \in E$, so ist $\gamma = \max\{c^T x \mid x \in P\} < \infty$. Falls also $\max\{c^T x \mid x \in P\}$ unbeschränkt ist, muss für mindestens ein $e \in E$ gelten $c^T e > 0$. Die umgekehrte Richtung ist trivial. $\square$

Wie bereits bemerkt, haben Elemente von spitzen Polyedern P i. A. keine eindeutige Darstellung als konvexe und konische Kombination von Ecken und Extremalen. Man kann jedoch zeigen, dass zu einer derartigen Darstellung von Elementen von P nicht allzu viele Ecken und Extremalen benötigt werden.

(1.59) Satz. *Es seien $K \subseteq \mathbb{K}^n$ ein spitzer Kegel und $0 \neq x \in K$. Dann gibt es Extremalen $y_1, \dots, y_d$ von K , wobei $d \leq \dim(K) \leq n$ gilt, mit*

$$x = \sum_{i=1}^d y_i. \quad \triangle$$

Beweis. Es seien $\text{cone}(\{e_i\})$ die Extremalstrahlen von K , $i = 1, \dots, k$, dann gibt es nach (1.54) Skalare $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, k$, mit

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i.$$

Unter allen möglichen Darstellungen von x dieser Art sei die obige eine, so dass $I = \{i \in \{1, \dots, k\} \mid \lambda_i > 0\}$ minimal ist. Sagen wir, es gilt $I = \{1, \dots, d\}$. Angenommen die Vektoren e_i , $i \in I$ sind linear abhängig, dann gibt es $\mu_1, \dots, \mu_d \in \mathbb{K}$, nicht alle μ_i Null, so dass gilt

$$\sum_{i=1}^d \mu_i e_i = 0.$$

Angenommen $\mu_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, d$, und o. B. d. A. sei $\mu_1 > 0$. Dann ist $-e_1 = \sum_{i=2}^d \frac{\mu_i}{\mu_1} e_i$ eine konische Kombination, und nach Satz (1.44) gilt $e_1 \in \text{lineal}(K)$. Dies widerspricht nach (1.47) der Voraussetzung K ist spitz.

O. B. d. A. können wir daher annehmen, dass gilt $\mu_1 < 0$ und

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \max \left\{ \frac{\lambda_i}{\mu_i} \mid \mu_i < 0 \right\}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} e_1 &= - \sum_{i=2}^d \frac{\mu_i}{\mu_1} e_i, \\ x &= \sum_{i=2}^d \left(\lambda_i - \frac{\lambda_1}{\mu_1} \mu_i \right) e_i. \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

Diese Darstellung von x ist eine konische Kombination, denn

$$\begin{aligned}\mu_i \geq 0 &\implies \lambda_i - \frac{\lambda_1}{\mu_1} \mu_i \geq 0, \\ \mu_i < 0 &\implies \frac{\lambda_i}{\mu_i} \leq \frac{\lambda_1}{\mu_1} \implies \lambda_i \geq \frac{\lambda_1}{\mu_1} \mu_i,\end{aligned}$$

also kann x mit weniger als d Extremalen konisch dargestellt werden, Widerspruch zur Minimalität! Da ein Kegel höchstens $\dim(K)$ linear unabhängige Vektoren enthält, folgt $d \leq \dim(K)$. Setzen wir $y_i = \lambda_i e_i$, $i = 1, \dots, d$, so sind die Vektoren y_i Extremalen von K mit der gewünschten Eigenschaft. $\square$

(1.60) Korollar. Ist $P \subseteq \mathbb{K}^n$ ein spitzes Polyeder und ist $x \in P$, dann gibt es Ecken $v_0, v_1, \dots, v_k$ und Extremalen $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_d$ von P mit $d \leq \dim(P)$ und nichtnegative Skalare $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ mit $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$, so dass gilt

$$x = \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i + \sum_{i=k+1}^d e_i.$$

$\triangle$

Beweis. Nach (1.47) ist $\text{hog}(P)$ ein spitzer Kegel, und die Dimension von $\text{hog}(P)$ ist $\dim(P) + 1$. Nach (1.46) gilt $x \in P \iff \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{hog}(P)$. Nach Satz (1.59) ist $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ konische Kombination von $d + 1 \leq \dim(P) + 1$ Extremalen von $\text{hog}(P)$. O. B. d. A. können wir annehmen, dass gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^k \begin{pmatrix} y_i \\ \lambda_i \end{pmatrix} + \sum_{i=k+1}^d \begin{pmatrix} e_i \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda_i > 0$, $i = 0, \dots, k$. Für $v_i := \frac{1}{\lambda_i} y_i$ gilt dann

$$x = \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i + \sum_{i=k+1}^d e_i, \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1.$$

Ferner sind nach (1.51) die Vektoren v_i Ecken von P und die Vektoren e_i Extremalen von P . Also haben wir die gewünschte Kombination von x gefunden. $\square$

Das folgende direkte Korollar von (1.60) wird in der Literatur häufig **Satz von Caratheodory** genannt.

(1.61) Korollar. Ist $P \subseteq \mathbb{K}^n$ ein Polytop, dann ist jedes Element von P Konvexkombination von höchstens $\dim(P) + 1$ Ecken von P . $\triangle$

Literaturverzeichnis

A. Bachem and M. Grötschel. New aspects of polyhedral theory. In B. Korte, editor, *Modern Applied Mathematics – Optimization and Operations Research*. North-Holland, Amsterdam, 1982.

- J. Bochnak, M. Coste, and M.-F. Roy. *Real algebraic geometry*. Springer, 1998.
- H. Bosse, M. Grötschel, and M. Henk. Polynomial inequalities representing polyhedra. *Mathematical Programming*, 103(1):35–44, May 2005.
- B. Grünbaum. *Convex Polytopes*, volume 221 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2nd edition, 2003.
- J. Matoušek. *Lectures on Discrete Geometry*, volume 212 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2002.
- G. M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*, volume 152 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2010.

2 Matroide und Unabhängigkeitssysteme

Wir werden nun einige sehr allgemeine Klassen von kombinatorischen Optimierungsproblemen kennenlernen. Diese enthalten die in den Kapiteln 5 bis 7 in ADM I betrachteten Probleme. Der in Kapitel 5 von ADM I eingeführte Greedy-Algorithmus wird hier von besonderer Bedeutung sein. Allerdings treten bei der algorithmischen Behandlung der hier besprochenen allgemeinen Probleme einige Schwierigkeiten auf, die wir eingehend diskutieren müssen.

Gute Bücher über Matroidtheorie sind Oxley (1992), Truemper (1992) und Welsh (1976), ein lesenswerter Übersichtsartikel ist Welsh (1995). Optimierungsprobleme auf Matroiden werden z. B. in Bixby and Cunningham (1995) und Lee (2004), Seiten 49–74, ausführlich behandelt. Eine umfassende Übersicht über Matroide, submodulare Funktionen und verwandte Strukturen findet sich in Part IV, Volume B von Schrijver (2003) auf den Seiten 649–852.

2.1 Allgemeine Unabhängigkeitssysteme

E sei im folgenden immer eine endliche Menge, 2^E bezeichne die Menge aller Teilmengen von E .

(2.1) Definition. Eine Menge $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ heißt Unabhängigkeitssystem (oder monotones Mengensystem) auf E , wenn $\mathcal{I}$ die folgenden Axiome erfüllt:

$$(I.1) \quad \emptyset \in \mathcal{I},$$

$$(I.2) \quad F \subseteq G \in \mathcal{I} \implies F \in \mathcal{I}.$$

Häufig wird auch das Paar $(E, \mathcal{I})$ Unabhängigkeitssystem genannt. Die Teilmengen von E , die in $\mathcal{I}$ enthalten sind, heißen unabhängige Mengen, alle übrigen Teilmengen von E heißen abhängige Mengen. $\triangle$

Mit jedem Unabhängigkeitssystem $(E, \mathcal{I})$ sind auf kanonische Weise andere Mengensysteme verbunden, die wir nun kurz einführen wollen.

Die bezüglich Mengeninklusion minimalen abhängigen Teilmengen von E heißen *Zirkuits* (oder *Kreise*), d. h. $C \subseteq E$ ist ein Zirkuit, wenn C abhängig ist und wenn C keine von sich selbst verschiedene abhängige Teilmenge enthält. Die Menge aller Zirkuits (bzgl. eines Unabhängigkeitssystems $\mathcal{I}$) heißt *Zirkuitsystem* und wird mit $\mathcal{C}$ bezeichnet.

Ist $F \subseteq E$, so heißt jede Teilmenge von F , die unabhängig ist und die in keiner anderen unabhängigen Teilmenge von F enthalten ist, *Basis* von F , d. h.

$$B \text{ Basis von } F \iff (B, B' \in \mathcal{I}, B \subseteq B' \subseteq F \implies B = B').$$

2 Matroide und Unabhängigkeitssysteme

Die Menge aller Basen der Grundmenge E heißt *Basissystem* (bzgl. $\mathcal{I}$) und wird mit $\mathcal{B}$ bezeichnet.

Für jede Menge $F \subseteq E$ heißt die ganze Zahl

$$r(F) := \max\{|B| \mid B \text{ Basis von } F\}$$

Rang von F . Die Rangfunktion r ist also eine Funktion, die 2^E in die nicht-negativen ganzen Zahlen abbildet.

Offenbar induziert jedes Unabhängigkeitssystem $\mathcal{I}$ auf E ein eindeutig bestimmtes Zirkuitsystem, ein eindeutig bestimmtes Basissystem und eine eindeutig bestimmte Rangfunktion. Es gilt auch die Umkehrung, wie wir nachfolgend (ohne Beweis) skizzieren.

Zirkuitsysteme und Basissysteme sind nach Definition *Antiketten* (*Clutter*), d. h. Systeme von Mengen, so dass keine zwei Mengen ineinander enthalten sind.

Ist $\mathcal{B} \neq \emptyset$ eine Antikette auf E , so ist

$$\mathcal{I} := \{I \subseteq E \mid \exists B \in \mathcal{B} \text{ mit } I \subseteq B\}$$

ein Unabhängigkeitssystem auf E , und $\mathcal{B}$ ist das zu $\mathcal{I}$ gehörige Basissystem.

Ist $\mathcal{C} \neq \{\emptyset\}$ eine Antikette auf E , so ist

$$\mathcal{I} := \{I \subseteq E \mid I \text{ enthält kein Element von } \mathcal{C}\} \quad (2.2)$$

ein Unabhängigkeitssystem, und $\mathcal{C}$ ist das zu $\mathcal{I}$ gehörige Zirkuitsystem.

Die oben definierte Rangfunktion hat folgende Eigenschaften. Sie ist *subkardinal*, d. h. für alle $F \subseteq E$ gilt

$$r(F) \leq |F|,$$

sie ist *monoton*, d. h. für alle $F, G \subseteq E$ gilt

$$F \subseteq G \implies r(F) \leq r(G),$$

und sie ist *stark subadditiv*, d. h. für alle $F \subseteq E$, für alle ganzen Zahlen $k \geq 1$, für alle endlichen Indexmengen $K \subseteq \mathbb{N}$ und für alle Familien $(F_i)_{i \in K}$ von Teilmengen von F mit der Eigenschaft, dass $|\{i \in K \mid e \in F_i\}| = k$ für alle $e \in F$, gilt

$$k \cdot r(F) \leq \sum_{i \in K} r(F_i).$$

Ist $r : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}_+$ eine subkardinale, monotone, stark subadditive Funktion, so ist

$$\mathcal{I} := \{I \subseteq E \mid r(I) = |I|\}$$

ein Unabhängigkeitssystem, dessen Rangfunktion die Funktion r ist.

Unabhängigkeitssysteme $\mathcal{I}$ auf einer Grundmenge E definieren also mathematische Strukturen, die äquivalent durch Zirkuitsysteme, Basissysteme oder Rangfunktionen gegeben werden können. Unabhängigkeitssysteme sind sehr allgemeine Objekte und besitzen zu wenig Struktur, um tief liegende Aussagen über sie machen zu können.

Sei für jedes Element $e \in E$ ein Gewicht $c_e \in \mathbb{R}$ gegeben. Für $F \subseteq E$ setzen wir wie üblich

$$c(F) := \sum_{e \in F} c_e.$$

Das Problem, eine unabhängige Menge $I^* \in \mathcal{I}$ zu finden, so dass $c(I^*)$ maximal ist, heißt *Optimierungsproblem über einem Unabhängigkeitssystem $\mathcal{I}$* , d. h. wir suchen

$$\max\{c(I) \mid I \in \mathcal{I}\}. \quad (2.3)$$

Offenbar macht es hier keinen Sinn, Gewichte c_e zu betrachten, die nicht positiv sind. Denn wenn $I^* \in \mathcal{I}$ optimal ist, gilt $I' := I^* \setminus \{e \in E \mid c_e \leq 0\} \in \mathcal{I}$ (wegen (I.2)) und $c(I') \geq c(I^*)$, also ist I' ebenfalls eine optimale unabhängige Menge. Deswegen werden wir uns im Weiteren bei Optimierungsproblemen über Unabhängigkeitssystemen auf Gewichtsfunktionen beschränken, die positiv oder nicht-negativ sind.

Bei Optimierungsproblemen über Basissystemen ist es dagegen auch sinnvoll, negative Gewichte zuzulassen. Ist ein Basissystem $\mathcal{B}$ auf der Grundmenge E gegeben und sind $c_e \in \mathbb{R}$ Gewichte, so nennen wir

$$\min\{c(B) \mid B \in \mathcal{B}\} \quad (2.4)$$

Optimierungsproblem über einem Basissystem $\mathcal{B}$.

(2.5) Beispiel.

- (a) Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Knotenmenge $S \subseteq V$ heißt *stabil (Clique)*, falls je zwei Knoten aus S nicht benachbart (benachbart) sind. Die Menge der stabilen Knotenmengen (Cliques) ist ein Unabhängigkeitssystem auf V . Die Aufgabe – bei gegebenen Knotengewichten – eine gewichtsmaximale stabile Menge (Clique) zu finden, ist ein Optimierungsproblem über einem Unabhängigkeitssystem, vergleiche ADM I (3.13).
- (b) Ein *Wald* in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Kantenmenge, die keinen Kreis enthält. Die Menge aller Wälder bildet ein Unabhängigkeitssystem auf E . Das Problem, einen maximalen Wald in G zu finden, war Hauptthema von ADM I, Abschnitt 5.2. Offenbar ist in einem zusammenhängenden Graphen G die Menge der aufspannenden Bäume genau die Menge der Basen des Unabhängigkeitssystems der Wälder. Das Problem, einen minimalen aufspannenden Baum zu finden (siehe ADM I, Satz (5.13)), ist somit ein Optimierungsproblem über einem Basissystem.
- (c) Ein *Matching* in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Kantenmenge $M \subseteq E$, so dass jeder Knoten aus V in höchstens einer Kante aus M enthalten ist. Die Menge aller Matchings ist ein Unabhängigkeitssystem auf E . Das Matchingproblem ADM I, (3.10) ist also ein Optimierungsproblem über einem Unabhängigkeitssystem. Die Aufgabe, in einem vollständigen Graphen mit Kantengewichten ein minimales perfektes Matching zu finden, ist ein Optimierungsproblem über einem Basissystem. Analog bilden die zulässigen Lösungen eines 1-kapazitierten b -Matchingproblems ein Unabhängigkeitssystem.

- (d) Gegeben sei ein vollständiger Digraph $D_n = (V, A)$ mit n Knoten und Bogenlängen c_{ij} für alle $(i, j) \in A$. Eine *Tour* (*gerichteter Hamiltonkreis*) ist ein gerichteter Kreis in D_n , der jeden Knoten enthält. Die Aufgabe, eine Tour mit minimalem Gewicht zu finden, heißt *asymmetrisches Travelling-Salesman-Problem*, siehe ADM I, (3.12). Die Menge $\mathcal{T}$ aller Touren ist kein Unabhängigkeitssystem, jedoch eine Antikette, also Basissystem eines Unabhängigkeitssystems. Das asymmetrische TSP ist somit ein Optimierungsproblem über einem Basissystem. Wir können es aber auch als Optimierungsproblem über einem Unabhängigkeitssystem auffassen. Dies geht wie folgt: Setzen wir

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{T}} &:= \{I \subseteq A \mid \exists T \in \mathcal{T} \text{ mit } I \subseteq T\}, \\ c'_{ij} &:= \max\{|c_{ij}| \mid (i, j) \in A\} + 1 - c_{ij},\end{aligned}$$

so ist $\tilde{\mathcal{T}}$ ein Unabhängigkeitssystem, und jede Lösung von $\max\{c'(I) \mid I \in \tilde{\mathcal{T}}\}$ ist eine Tour, die – bezüglich der Gewichte c_{ij} – minimales Gewicht hat. (Auf die gleiche Weise kann man viele andere Optimierungsprobleme über Basissystemen in Optimierungsprobleme über Unabhängigkeitssystemen überführen.) Ebenso ist das symmetrische TSP ein Optimierungsproblem über einem Basissystem.

- (e) Gegeben sei ein gerichteter Graph $D = (V, A)$. Ein *Branching* in D ist eine Bogenmenge $B \subseteq A$, die keinen Kreis (im ungerichteten Sinne) enthält, und die die Eigenschaft hat, dass jeder Knoten $v \in V$ Endknoten von höchstens einem Bogen aus B ist. Die Menge aller Branchings ist ein Unabhängigkeitssystem auf A . Das Problem, in einem vollständigen Digraphen eine minimale aufspannende Arboreszenz zu finden, ist ein Optimierungsproblem über einem Basissystem, siehe ADM I, (3.11). $\triangle$

Überlegen Sie sich, welche der übrigen Beispiele aus ADM I, Abschnitt 3.3 als Optimierungsprobleme über Unabhängigkeits- oder Basissystemen aufgefasst werden können und welche nicht.

Verschiedene praktische Fragestellungen führen auch zu Optimierungsproblemen über Zirkuits. Sind die Elemente $e \in E$ durch Gewichte c_e bewertet, so kann man das Problem untersuchen, ein Zirkuit $C \in \mathcal{C}$ zu finden, das minimales Gewicht $c(C)$ hat. Die Aufgabe, in einem Graphen einen kürzesten Kreis zu bestimmen, ist z. B. von diesem Typ.

Allgemeiner noch ist folgende Frage von Interesse. Wir sagen, dass eine Menge $Z \subseteq E$ ein *Zyklus* ist, wenn Z die Vereinigung von paarweise disjunkten Zirkuits ist, d. h. wenn es Zirkuits $C_1, \dots, C_k$ gibt mit $C_i \cap C_j = \emptyset$, $1 \leq i < j \leq k$, so dass $Z = \bigcup_{i=1}^k C_i$. Sind die Elemente $e \in E$ mit Gewichten c_e belegt, so sucht man nach einem Zyklus maximalen Gewichts. Das Chinesische Postbotenproblem (siehe ADM I, (3.12)) und das Max-Cut-Problem (siehe ADM I, (3.15)) sind z. B. von diesem Typ. Aus Zeitgründen können wir auf Optimierungsprobleme über Zirkuits bzw. Zyklen nicht eingehen, siehe hierzu Barahona and Grötschel (1986) und Grötschel and Truemper (1989).

2.2 Matroide

Wie die Beispiele aus dem vorigen Abschnitt zeigen, enthalten Optimierungsprobleme über Unabhängigkeitssystemen sowohl polynomial lösbare als auch $\mathcal{NP}$ -vollständige Probleme. Man wird daher nicht erwarten können, dass für diese Probleme eine „gute“ Lösungstheorie existiert. Wir wollen nun eine Spezialklasse von Unabhängigkeitssystemen einführen, für die es so etwas gibt. In einem noch zu präzisierenden Sinn (siehe Folgerung (2.15)) ist dies die Klasse der Unabhängigkeitssysteme, für die der Greedy-Algorithmus (siehe ADM I, (5.7)) eine Optimallösung liefert.

(2.6) Definition. Ein Matroid M besteht aus einer Grundmenge E zusammen mit einem Unabhängigkeitssystem $\mathcal{I} \subseteq 2^E$, das eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

$$(I.3) \quad I, J \in \mathcal{I}, |I| = |J| - 1 \implies \exists j \in J \setminus I \text{ mit } I \cup \{j\} \in \mathcal{I},$$

$$(I.3') \quad I, J \in \mathcal{I}, |I| < |J| \implies \exists K \subseteq J \setminus I \text{ mit } |I \cup K| = |J|, \text{ so dass } I \cup K \in \mathcal{I},$$

$$(I.3'') \quad F \subseteq E \text{ und } B, B' \text{ Basen von } F \implies |B| = |B'|. \quad \triangle$$

Das heißt also, das Unabhängigkeitssystem eines Matroids auf E ist ein Mengensystem $\mathcal{I} \subseteq 2^E$, das die Axiome (I.1), (I.2) und eines der Axiome (I.3), (I.3'), (I.3'') erfüllt. Ein solches System erfüllt automatisch auch die beiden übrigen der drei Axiome (I.3), (I.3'), (I.3'').

Ein Wort zur Terminologie! Nach der obigen Definition ist ein Matroid M ein Paar $(E, \mathcal{I})$ mit den oben aufgeführten Eigenschaften. Wenn klar ist, um welche Grundmenge E es sich handelt, spricht man häufig auch einfach von dem Matroid $\mathcal{I}$, ohne dabei E explizit zu erwähnen. Man sagt auch, M (bzw. $\mathcal{I}$) ist ein Matroid auf E .

In Definition (2.6) haben wir von den „äquivalenten Bedingungen“ (I.3), (I.3'), (I.3'') gesprochen. Diese Äquivalenz muss natürlich bewiesen werden. Da wir hier jedoch keine Vorlesung über Matroide halten wollen, können wir auf die Beweise (aus Zeitgründen) nicht eingehen. Das gleiche gilt für die nachfolgend gemachten Aussagen über Zirkuit- und Basissysteme und Rangfunktionen. Beweise der hier gemachten Aussagen findet der interessierte Leser z. B. in Oxley (1992) und Welsh (1976).

Wie wir bereits gesehen haben, können Unabhängigkeitssysteme über Zirkuits, Basen oder Rangfunktionen beschrieben werden. Ist $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und sind $\mathcal{C}, \mathcal{B}, r$ das zugehörige Zirkuit-, Basissystem bzw. die zugehörige Rangfunktion, so ist natürlich $\mathcal{I}$ durch die Angabe von $\mathcal{C}, \mathcal{B}$ oder r eindeutig beschrieben. Gelegentlich werden daher auch die Paare $(E, \mathcal{C}), (E, \mathcal{B}), (E, r)$ als Matroide bezeichnet, meistens dann, wenn es bei einer speziellen Untersuchung sinnvoller erscheint, mit Zirkuits, Basen oder Rangfunktionen statt mit Unabhängigkeitssystemen zu arbeiten.

Sicherlich induzieren nicht alle Zirkuit- oder Basissysteme oder alle Rangfunktionen Unabhängigkeitssysteme von Matroiden. Diese Antiketten bzw. Funktionen müssen spezielle Eigenschaften haben, damit das zugehörige Unabhängigkeitssystem das Axiom (I.3) erfüllt. Einige solcher Eigenschaften wollen wir kurz auflisten.

(2.7) Satz.

- (a) Eine Antikette $\mathcal{C} \subseteq 2^E$, $\mathcal{C} \neq \{\emptyset\}$, ist das **Zirkuitsystem eines Matroids** auf E genau dann, wenn eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

$$(C.1) \quad C_1, C_2 \in \mathcal{C}, C_1 \neq C_2, z \in C_1 \cap C_2 \implies \exists C_3 \in \mathcal{C} \text{ mit } C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{z\},$$

$$(C.1') \quad C_1, C_2 \in \mathcal{C}, C_1 \neq C_2, y \in C_1 \setminus C_2 \implies \forall x \in C_1 \cap C_2 \exists C_3 \in \mathcal{C} \text{ mit } y \in C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}.$$

- (b) Eine Antikette $\mathcal{B} \subseteq 2^E$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$, ist das **Basissystem eines Matroids** auf E genau dann, wenn das folgende Axiom erfüllt ist:

$$(B.1) \quad B_1, B_2 \in \mathcal{B}, x \in B_1 \setminus B_2 \implies \exists y \in B_2 \setminus B_1 \text{ mit } (B_1 \cup \{y\}) \setminus \{x\} \in \mathcal{B}.$$

- (c) Eine Funktion $r : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}$ ist die **Rangfunktion eines Matroids** auf E genau dann, wenn eines der beiden folgenden äquivalenten Axiomensysteme erfüllt ist:

$$(R.1) \quad r(\emptyset) = 0,$$

$$(R.2) \quad F \subseteq E, e \in E \implies r(F) \leq r(F \cup \{e\}) \leq r(F) + 1,$$

$$(R.3) \quad F \subseteq E, f, g \in E \text{ mit } r(F \cup \{g\}) = r(F \cup \{f\}) = r(F) \implies r(F \cup \{g, f\}) = r(F),$$

beziehungsweise

$$(R.1') \quad F \subseteq E \implies 0 \leq r(F) \leq |F| \quad (r \text{ ist subkardinal}),$$

$$(R.2') \quad F \subseteq G \subseteq E \implies r(F) \leq r(G) \quad (r \text{ ist monoton}),$$

$$(R.3') \quad F, G \subseteq E \implies r(F \cup G) + r(F \cap G) \leq r(F) + r(G) \quad (r \text{ ist submodular}). \triangle$$

Es gibt noch einige hundert weitere äquivalente Definitionen von Matroiden (die Äquivalenz ist – auch in den obigen Fällen – nicht immer offensichtlich). Wir wollen uns jedoch mit den obigen begnügen.

Ist $\mathcal{I}_1$ ein Matroid auf einer Grundmenge E_1 und $\mathcal{I}_2$ ein Matroid auf E_2 , so heißen $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ *isomorph*, falls es eine bijektive Abbildung $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ gibt mit

$$\varphi(F) \text{ ist unabhängig in } \mathcal{I}_2 \iff F \text{ ist unabhängig in } \mathcal{I}_1.$$

Eine Teilmenge $F \subseteq E$ heißt *abgeschlossen (bezüglich $\mathcal{I}$)*, falls gilt

$$r(F) < r(F \cup \{e\}) \text{ für alle } e \in E \setminus F.$$

Die Matroidtheorie kann man als eine gemeinsame Verallgemeinerung gewisser Aspekte der Graphentheorie und der linearen Algebra ansehen. Die beiden Beispiele, aus denen die Matroidtheorie entstanden ist, wollen wir daher zuerst vorstellen.

(2.8) Beispiel.**(a) Graphische Matroide**

Das in (2.5)(b) definierte Unabhängigkeitssystem der Wälder eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Matroid. Ist $F \subseteq E$, so zerfällt (V, F) in Zusammenhangskomponenten $G_1 = (V_1, F_1), \dots, G_k = (V_k, F_k)$. Die Basen der Zusammenhangskomponenten $G_1, \dots, G_k$ sind die aufspannenden Bäume von $G_1, \dots, G_k$. Jede Vereinigung von aufspannenden Bäumen von $G_1, \dots, G_k$ ist eine Basis von F . Die Zirkuits von $\mathcal{I}$ sind die Kreise des Graphen G (daher der Name!). Der Rang einer Menge $F \subseteq E$ ist gegeben durch

$$r(F) = |V(F)| - \text{Anzahl } k \text{ der Komponenten von } (V(F), F),$$

wobei $V(F)$ die Menge aller Knoten $v \in V$ bezeichnet, die in mindestens einer Kante aus F enthalten sind, vergleiche ADM I, Korollar (5.5).

Die Matroide, die wie oben angegeben auf einem Graphen definiert werden können (bzw. isomorph zu solchen sind), heißen *graphische Matroide*.

(b) Matrix-Matroide

Sei $A = (a_{ij})$ eine (m, n) -Matrix über einem beliebigen Körper K mit Spaltenvektoren $A_1, \dots, A_n$. $E = \{1, \dots, n\}$ sei die Menge der Spaltenindizes von A . Eine Teilmenge $F \subseteq E$ heißt unabhängig, wenn die Vektoren A_j , $j \in F$, linear unabhängig in K^m sind. Da jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge wiederum linear unabhängig ist, ist das so definierte Mengensystem $\mathcal{I}$ offenbar ein Unabhängigkeitssystem. Die Menge aller Basen von E ist die Menge aller $B \subseteq E$, so dass die Vektoren A_j , $j \in B$, eine Basis des durch die Spaltenvektoren von A aufgespannten linearen Teilraums von K^m bilden. Das Basisaxiom (B.1) ist in diesem Falle aufgrund des Steinitz'schen Austauschsatzes erfüllt. (Dieser Satz war die Motivation für (B.1).)

Matroide, die auf die hier angegebene Weise konstruiert werden können, heißen *Matrix-Matroide*. Die Rangfunktion von $\mathcal{I}$ entspricht der aus der linearen Algebra bekannten Rangfunktion des K^m beschränkt auf die Spalten von A . Ist $\mathcal{I}$ ein Matroid auf E und gibt es einen Körper K und eine (m, n) -Matrix A über K , so dass $\mathcal{I}$ zu dem Matrix-Matroid bezüglich A isomorph ist, dann heißt $\mathcal{I}$ *repräsentierbar (über K)*. (Natürlich kann man hier etwas verallgemeinern und anstelle von Körpern Schiefkörper oder andere geeignete Objekte betrachten und Repräsentierbarkeit über diesen studieren.) Matroide, die über dem zweielementigen Körper $GF(2)$ repräsentierbar sind, heißen *binär*. Eine umfassende Untersuchung dieser wichtigen Klasse von Matroiden findet sich in Truemper (1992). Matroide, die über allen Körpern repräsentierbar sind, nennt man *regulär*.

(c) Binäre Matroide

Die über dem zweielementigen Körper $GF(2)$ repräsentierbaren Matroide kann man auf sehr einfache Weise durch eine 0/1-Matrix repräsentieren. Seien M ein binäres Matroid auf E , T eine Basis von E und $S := E \setminus T$. Wir können o. B. d. A. annehmen, dass $T = \{e_1, \dots, e_m\}$ und $S = \{e_{m+1}, \dots, e_n\}$ gilt. Eine das Matroid M (mit Rang

2 Matroide und Unabhängigkeitssysteme

m) repräsentierende Matrix A erhält man wie folgt: A hat m Zeilen und n Spalten. Die i -te Zeile „repräsentiert“ das i -te Basiselement e_i , $1 \leq i \leq m$, die j -te Spalte das j -te Element e_j , $1 \leq j \leq n$, von E ; A hat die folgende Form (genannt *Standardform* oder *Standardrepräsentation*):

$$A = (I_m, B),$$

wobei I_m die (m, m) -Einheitsmatrix ist. Die j -te Spalte von A , $m + 1 \leq j \leq n$, wird wie folgt konstruiert. Fügt man das Element e_j zur Basis T hinzu, so kann man beweisen, dass genau ein Zirkuit entsteht, genannt das Fundamentalzirkuit zu e_j . Für das graphische Matroid des Beispielgraphen in Abbildung 2.1 ergibt sich so die folgende Standardrepräsentation:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1					0	0	0	0	0
2		1			0	0	1	1	1	0
3			1			0	1	0	1	0
4		0		1		1	1	1	0	0
5					1	1	1	0	0	0

△

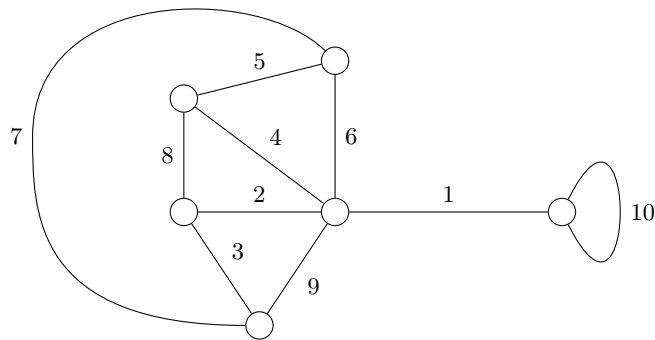


Abbildung 2.1: Graph mit 10 Kanten

Es folgt nun eine Liste weiterer interessanter Matroide.

(2.9) Beispiel.

(a) Cographische Matroide

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Ein *Cokreis* ist eine Kantenmenge, deren Entfernung aus G die Komponentenzahl erhöht und die (mengeninklusionsweise) minimal bezüglich dieser Eigenschaft ist. Ein *Schnitt* ist eine Kantenmenge der Form

$$\delta(W) = \{ij \in E \mid i \in W, j \in V \setminus W\}, \quad W \subseteq V.$$

Jeder Cokreis ist offenbar ein Schnitt, und es ist einfach einzusehen, dass die Cokreise gerade die minimalen nicht-leeren Schnitte von G sind. Sind $\delta(W)$ und $\delta(W')$ verschiedene Cokreise und ist die Kante ij in beiden enthalten, so ist $\delta(W \triangle W')$ ein Schnitt, der ij nicht enthält. (Hier bezeichnet $W \triangle W'$ die *symmetrische Differenz* $(W \cup W') \setminus (W \cap W')$.) Ist $\delta(W \triangle W')$ kein Cokreis, so enthält er einen Cokreis, der natürlich ij auch nicht enthält. Daraus folgt, dass die Antikette der Cokreise das Axiom (C.1) erfüllt und somit das Zirkuitsystem eines Matroids auf E ist. Ein Matroid, das isomorph zu einem so definierten Matroid ist, heißt *cographisch*. Ist $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und M das cographische Matroid auf G , so ist das Basissystem $\mathcal{B}$ von M gegeben durch

$$\mathcal{B} = \{B \subseteq E \mid \exists \text{ aufspannender Baum } T \subseteq E \text{ mit } B = E \setminus T\}.$$

(b) **Uniforme Matroide**

Sei E eine Menge mit n Elementen, dann ist die Menge aller Teilmengen von E mit höchstens k Elementen ein Matroid auf E . Dieses Matroid heißt *uniform* und ist durch die Angabe von k und n bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Dieses Matroid wird mit $U_{k,n}$ bezeichnet. Das Basissystem von $U_{k,n}$ wird durch die Menge der Teilmengen von E mit genau k Elementen gebildet. Das Zirkuitsystem von $U_{k,n}$ besteht aus den Teilmengen von E mit $k+1$ Elementen. Die Matroide $U_{n,n}$ (d. h. die Matroide, in denen alle Mengen unabhängig sind) heißen *frei* (oder *trivial*). Für freie Matroide gilt $\mathcal{C} = \emptyset$, $\mathcal{B} = \{E\}$, $r(F) = |F|$ für alle $F \subseteq E$. Das uniforme Matroid $U_{2,4}$ ist das kleinste nicht binäre Matroid. Überlegen Sie sich einen Beweis hierfür!

(c) **Partitionsmatroide**

Sei E eine endliche Menge, und $E_1, \dots, E_k$ seien nicht-leere Teilmengen von E mit $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$, und $\bigcup_{i=1}^k E_i = E$. Seien $b_1, \dots, b_k$ nicht-negative ganze Zahlen, dann ist $\mathcal{I} := \{I \subseteq E \mid |I \cap E_i| \leq b_i, i = 1, \dots, k\}$ ein Matroid auf E , genannt *Partitionsmatroid*.

(d) **Transversalmatroide**

Sei E eine endliche Menge, $(E_i)_{i \in I}$ sei eine endliche Familie von Teilmengen von E . Eine Teilmenge $T \subseteq E$ ist eine *teilweise Transversale* (oder partielles Repräsentantensystem) von $(E_i)_{i \in I}$, falls es eine Indexmenge $J \subseteq I$ gibt mit $|J| = |T|$ und eine Bijektion $\pi : T \rightarrow J$, so dass $t \in E_{\pi(t)}$ für alle $t \in T$. Die Menge aller teilweisen Transversalen ist das Unabhängigkeitssystem eines Matroids auf E . (Dieses Ergebnis ist nicht trivial und hatte einen wesentlichen Einfluss auf die Transversaltheorie.) $\triangle$

Wir wollen nun noch einige konkrete Beispiele von Matroiden angeben und ihre Basis-, Zirkuitsysteme etc. explizit auflisten.

Betrachten wir den folgenden, in Abbildung 2.2 dargestellten Graphen $G = (V, E)$ mit $E = \{1, 2, \dots, 13\}$. Das Zirkuitsystem $\mathcal{C}$ des graphischen Matroids auf E ist gegeben durch die Menge aller Kreise in G , d. h.

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 7\}, \{9, 10, 11\}, \{11, 12, 13\}, \{9, 10, 12, 13\}\}.$$

2 Matroide und Unabhängigkeitssysteme

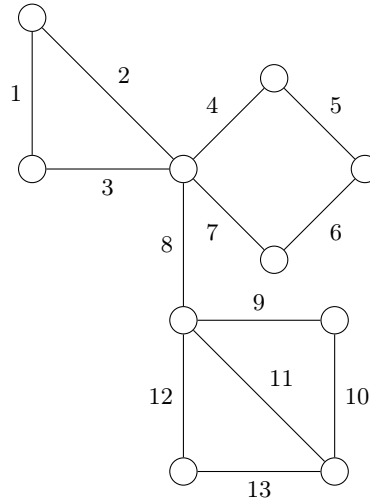


Abbildung 2.2: Graph G mit 13 Kanten

Das Zirkuitsystem $\mathcal{C}^*$ des cographischen Matroids auf E ist gegeben durch die Menge aller minimalen Schnitte, d. h.

$$\mathcal{C}^* = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}, \{8\}, \\ \{9, 10\}, \{9, 11, 12\}, \{9, 11, 13\}, \{10, 11, 12\}, \{10, 11, 13\}, \{12, 13\}\}.$$

Das Basissystem $\mathcal{B}$ des graphischen Matroids des folgenden Graphen $G = (V, E)$ (siehe Abbildung 2.3) mit $E = \{1, 2, 3, 4\}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}\},$$

und das Basissystem $\mathcal{B}^*$ des cographischen Matroids bezüglich G ist die folgende Anti-

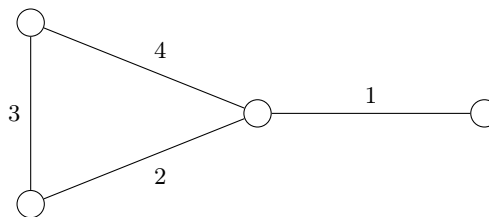
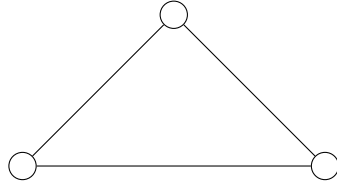


Abbildung 2.3: Graph G mit 4 Kanten

kette:

$$\mathcal{B}^* = \{\{4\}, \{3\}, \{2\}\}.$$

Das graphische Matroid des in Abbildung 2.4 dargestellten Graphen ist das uniforme Matroid $U_{2,3}$. Uniforme Matroide können also auch isomorph zu graphischen sein. Das uniforme Matroid $U_{2,4}$ ist jedoch nicht graphisch (Übungsaufgabe).

Abbildung 2.4: Graph zum uniformen Matroid $U_{2,3}$

Betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

als Matrix über dem Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$. Das Zirkuitsystem $\mathcal{C}$ des Matrix-Matroids M bezüglich A ist offenbar gegeben durch

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 4\}\},$$

und das Basissystem $\mathcal{B}$ des Matrix-Matroids M ist

$$\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}.$$

Ein aus der endlichen Geometrie stammendes Beispiel ist das **Fano-Matroid**, das häufig mit dem Symbol F_7 bezeichnet wird. Betrachten Sie Abbildung 2.5 Dies ist eine

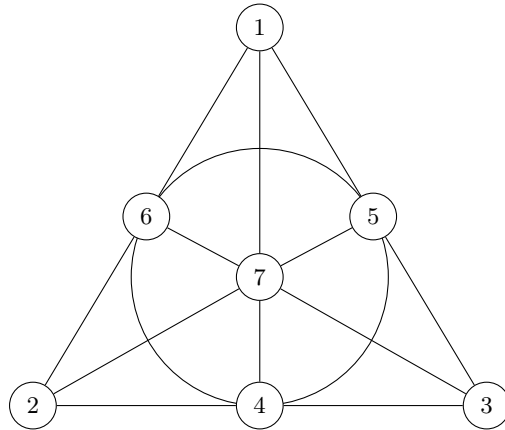


Abbildung 2.5: Fano-Ebene

graphische Darstellung der Fano-Ebene. Die Fano-Ebene hat 7 Punkte und 7 Geraden. Die 7 Geraden werden durch die 6 geraden Linien $\{1, 2, 6\}, \dots, \{3, 6, 7\}$ und den Kreis, der durch die Punkte $\{4, 5, 6\}$ geht, repräsentiert. Das Fano-Matroid F_7 ist auf der Menge $E = \{1, \dots, 7\}$ definiert. Eine Teilmenge B von E ist genau dann eine Basis von F_7 , wenn $|B| = 3$ und wenn die drei zu B gehörigen Punkte nicht kollinear sind, also nicht auf einer Geraden liegen. Die Menge $\{1, 2, 3\}$ ist somit eine Basis, $\{4, 5, 6\}$ dagegen nicht.

2 Matroide und Unabhängigkeitssysteme

Das Fano-Matroid ist binär. Wählen wir die Basis $T = \{1, 2, 3\}$, so ergibt die in (2.8)(c) beschriebene Konstruktion der Standardrepräsentation die folgende Matrix:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}\end{array}$$

die das Fano-Matroid F_7 über $GF(2)$ repräsentiert.

Wir wollen nun noch einen einfachen, aber interessanten Zusammenhang zwischen Unabhängigkeitssystemen und Matroiden erwähnen.

(2.10) Satz. *Jedes Unabhängigkeitssystem ist als Durchschnitt von Matroiden darstellbar, d. h. ist $\mathcal{I}$ ein Unabhängigkeitssystem auf E , dann gibt es Matroide $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_k$ auf E mit*

$$\mathcal{I} = \bigcap_{i=1}^k \mathcal{I}_i.$$

△

Beweis. Sei $\mathcal{C}$ das zu $\mathcal{I}$ gehörige Zirkuitsystem. Jedes Zirkuit $C \in \mathcal{C}$ definiert eine Antikette $\{C\} \subseteq 2^E$, die trivialerweise das Axiom (C.1) aus (2.7) erfüllt. Also ist das zu dem Zirkuitsystem $\{C\}$ gehörige Unabhängigkeitssystem $\mathcal{I}_C$ ein Matroid. Wir behaupten nun

$$\mathcal{I} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} \mathcal{I}_C.$$

Ist $I \in \mathcal{I}$, so ist kein Zirkuit $C \in \mathcal{C}$ in I enthalten, folglich ist nach (2.2) $I \in \mathcal{I}_C$ für alle $C \in \mathcal{C}$. Sei umgekehrt $I \in \mathcal{I}_C$ für alle $C \in \mathcal{C}$, so heißt dies, dass kein Zirkuit $C \in \mathcal{C}$ in I enthalten ist, und somit, dass I ein Element von $\mathcal{I}$ ist. □

Die im Beweis von Satz (2.10) angegebene Konstruktion zur Darstellung eines Unabhängigkeitssystems als Durchschnitt von Matroiden produziert i. A. eine riesige Zahl von Matroiden, die das Gewünschte leisten. Häufig kommt man mit viel weniger Matroiden aus.

Betrachten wir z. B. die Menge der Branchings $\mathcal{I} \subseteq 2^A$ in einem Digraphen $D = (V, A)$. Man kann einfach zeigen, dass das zugehörige Zirkuitsystem $\mathcal{C}$ aus den inklusionsminimalen Mengen der Vereinigung der folgenden Antiketten $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ besteht:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &:= \{C \subseteq A \mid |C| = 2 \text{ und die Endknoten der beiden Bögen in } C \text{ sind identisch}\}, \\ \mathcal{C}_2 &:= \{C \subseteq A \mid C \text{ ist ein Kreis (die Bogenrichtungen spielen keine Rolle)}\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{C}_1$ ist das Zirkuitsystem eines Partitionsmatroids auf A , dessen Unabhängigkeitssystem gegeben ist durch $\{B \subseteq A \mid |B \cap \delta^-(v)| \leq 1 \forall v \in V\}$, und $\mathcal{C}_2$ ist das Zirkuitsystem des graphischen Matroids auf D (hierbei wird D als Graph aufgefasst, d. h. die Bogenrichtungen werden ignoriert). Daraus folgt, dass das Unabhängigkeitssystem der Branchings

Durchschnitt von 2 Matroiden ist. Für den vollständigen Digraphen D mit n Knoten hätte die Konstruktion im Beweis von Satz (2.10) insgesamt

$$n \binom{n-1}{2} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (k-1)!$$

verschiedene Matroide geliefert.

Das Unabhängigkeitssystem $\tilde{\mathcal{I}}$ der Teilmengen von Touren im vollständigen Digraphen D_n mit n Knoten, siehe (2.5)(d), ist als Durchschnitt von 3 Matroiden darstellbar (Übungsaufgabe). Also ist das asymmetrische Travelling-Salesman-Problem als Optimierungsproblem über dem Durchschnitt von 3 Matroiden formulierbar.

2.3 Orakel

Um Eigenschaften von Matroiden oder Unabhängigkeitssystemen überprüfen zu können, muss man sich natürlich fragen, wie man Matroide geeignet darstellt, um z. B. ein Computerprogramm schreiben zu können, das Matroide als Input akzeptiert.

Betrachten wir zum Beispiel das in (2.3) formulierte Optimierungsproblem $\max\{c(I) \mid I \in \mathcal{I}\}$ über einem Unabhängigkeitssystem $\mathcal{I}$ auf E (Spezialfall: $(E, \mathcal{I})$ ist ein Matroid). Ist $\mathcal{I}$ als Liste aller unabhängigen Mengen gegeben, so ist das Optimierungsproblem völlig trivial. Wir durchlaufen die Liste, rechnen für jede Menge I der Liste den Wert $c(I)$ aus und wählen eine Menge I^* , so dass $c(I^*)$ maximal ist. Die Laufzeit dieses Enumerationsalgorithmus ist linear in der Inputlänge des Unabhängigkeitssystems.

Viele der Matroide und Unabhängigkeitssysteme, die wir in den vorausgegangenen Abschnitten definiert haben, sind jedoch in wesentlich kompakterer Form gegeben. Zum Beispiel ist ein Matrix-Matroid (2.8)(b) durch eine Matrix A (mit der Information, dass $I \subseteq E$ unabhängig genau dann ist, wenn die Spalten A_i , $i \in I$, linear unabhängig sind) gegeben, ein graphisches Matroid (2.8)(a) durch einen Graphen $G = (V, E)$ (zusammen mit der Information, dass $I \subseteq E$ unabhängig ist genau dann, wenn I keinen Kreis enthält), ein cographisches Matroid (2.9)(a) durch einen Graphen $G = (V, E)$ (zusammen mit der Information, dass $C \subseteq E$ ein Zirkuit ist genau dann, wenn C ein Cokreis ist). Würden wir die Inputlänge des Matroids als die Länge der Kodierung der Matrix A (für (2.8)(b)) bzw. als die Länge der Kodierung des Graphen G (für (2.8)(a)) definieren, hätte unser trivialer Enumerationsalgorithmus exponentielle Laufzeit in der Kodierungslänge dieses kompakten Inputs.

Die Frage ist also: Was ist eine „geeignete“ Kodierung eines Matroids? Motiviert durch die gerade angegebenen Beispiele könnte man glauben, dass die Angabe einer Liste aller unabhängigen Mengen eine unökonomische Methode sei. Jedoch geht es im allgemeinen nicht viel besser. Man kann nämlich zeigen, dass es mindestens

$$2^{2^{n/2}} \text{ Matroide mit } n \text{ Elementen}$$

gibt. Daraus folgt, dass es bei jeder beliebigen Kodierungsart immer Matroide gibt, deren Kodierung eine Länge hat, die mindestens $2^{n/2}$ beträgt.

Aufgrund dieser Tatsache hat sich ein anderes Konzept der Repräsentation von Matroiden durchgesetzt und als außerordentlich nützlich erwiesen. Matroide werden durch „Orakel“ dargestellt.

Wir treffen folgende Definition. Die *Kodierungslänge eines Matroids* $M = (E, \mathcal{I})$ ist die Anzahl der Elemente von E . Das Matroid selbst ist in einem Orakel „versteckt“, wobei das Orakel als ein Computerprogramm (Subroutine) interpretiert werden kann, das Fragen eines speziellen Typs beantwortet. Wir geben einige Beispiele (diese gelten natürlich nicht nur für Matroide, sondern analog auch für Unabhängigkeitssysteme) und gehen davon aus, dass wir die Grundmenge E kennen.

(2.11) Beispiel.

(a) Unabhängigkeitsorakel

Für jede Menge $F \subseteq E$ können wir das Orakel fragen, ob F unabhängig ist. Das Orakel antwortet mit „ja“ oder „nein“.

(b) Zirkuitorakel

Für jede Menge $F \subseteq E$ können wir das Orakel fragen, ob F ein Zirkuit ist. Das Orakel antwortet mit „ja“ oder „nein“.

(c) Basisorakel

Für jede Menge $F \subseteq E$ können wir das Orakel fragen, ob F eine Basis von E ist. Das Orakel antwortet mit „ja“ oder „nein“.

(d) Rangorakel

Für jede Menge $F \subseteq E$ können wir das Orakel fragen, wie groß der Rang von F ist. Die Antwort des Orakels ist „ $r(F)$ “.

△

Man sieht sofort, dass dieses theoretische Orakelkonzept dem Konzept von Unterprogrammen der Programmierung entspricht.

Wenn wir also Algorithmen betrachten wollen, die Eigenschaften von Matroiden überprüfen, so gehen wir immer davon aus, dass ein Matroid (oder Unabhängigkeitssystem) durch die Grundmenge E und ein Orakel gegeben ist, das im Verlaufe des Algorithmus befragt werden kann. Bei der Komplexitätsanalyse von Algorithmen für Matroide (Unabhängigkeitssysteme) wird dann ein Orakelaufruf (Unterprogrammaufruf) als ein Schritt gezählt. Achtung! Die Laufzeit beim Lesen der Antwort wird wie üblich berechnet. Gibt also ein Orakel eine Antwort, die z. B. $2^{|E|}$ Speicherplätze benötigt, so hat der Algorithmus automatisch eine exponentielle Laufzeit. Bei den in (2.11) angegebenen Orakeln kommt so ein Fall allerdings nie vor! Man nennt Verfahren, die Orakel aufrufen können, *Orakelalgorithmen*. Ist ihre Laufzeit in dem oben angegebenen Sinne polynomial in $|E|$, so sagt man, dass die Verfahren *orakelpolynomial* sind.

Hat man einen Algorithmus, dessen Laufzeit orakelpolynomial in $|E|$ ist, so ist der Algorithmus für alle die Matroide (Unabhängigkeitssysteme) im üblichen Sinne polynomial, für die das Orakel durch einen in $|E|$ polynomialen Algorithmus realisiert werden kann. Dies ist zum Beispiel für Matrix-Matroide der Fall. Ein Unabhängigkeitsorakel kann man bei einer gegebenen Matrix durch Rangbestimmung mit Gauß-Elimination realisieren

(analog die drei anderen Orakel). Dies gilt auch für graphische und cographische Matroide, die durch einen Graphen $G = (V, E)$ gegeben sind. Zum Beispiel kann man die Unabhängigkeit einer Menge F im graphischen Matroid (F enthält keinen Kreis) durch Depth-First-Search testen; auch die übrigen drei Orakel kann man durch Algorithmen realisieren, deren Laufzeit polynomial in $|E|$ ist.

Eine wichtige Frage ergibt sich sofort. Sind die verschiedenen Orakel algorithmisch „äquivalent“? Das heißt, kann man ein Orakel durch ein anderes Orakel in orakelpolynomialer Zeit simulieren und umgekehrt? Zum Beispiel: Ist ein Unabhängigkeitsorakel gegeben, kann man dann einen Algorithmus entwerfen (der nur dieses Orakel benutzt und orakelpolynomial ist), der für jede Menge $F \subseteq E$ korrekt entscheidet, ob F ein Zirkuit ist oder nicht?

Für Matroide und die vier oben angegebenen Orakel wurde diese Frage von Hausmann and Korte (1981) wie folgt beantwortet.

(2.12) Satz. *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein beliebiges Matroid.*

- (a) *Das Unabhängigkeitsorakel und das Rangorakel sind bezüglich M „äquivalent“.*
- (b) *Das Basisorakel und das Zirkuitorakel können durch das Unabhängigkeitsorakel sowie durch das Rangorakel in orakelpolynomialer Zeit simuliert werden.*
- (c) *Es gibt keine anderen orakelpolynomialen Beziehungen zwischen diesen Orakeln. $\triangle$*

Man kann diesen Satz graphisch durch Abbildung 2.6 veranschaulichen. Ein Pfeil in diesem Diagramm besagt, dass das Orakel am Ende des Pfeils durch polynomial viele Aufrufe des Orakels an der Spitze des Pfeils simuliert werden kann. Ist zwischen zwei Kästchen kein Pfeil (in irgendeiner der beiden Richtungen), so besagt dies auch, dass es keine orakelpolynomialen Simulation dieser Art gibt. Z. B. kann man das Basisorakel nicht durch das Zirkuitorakel in orakelpolynomialer Zeit simulieren und umgekehrt. Dies zeigt man dadurch, dass man eine Klasse von Beispielen angibt, bei denen zur Entscheidung der Frage, ob eine Menge I eine Basis (ein Zirkuit) ist, eine Anzahl von Aufrufen des Zirkuitorakels (Basisorakels) notwendig ist, die exponentiell in $|E|$ ist.

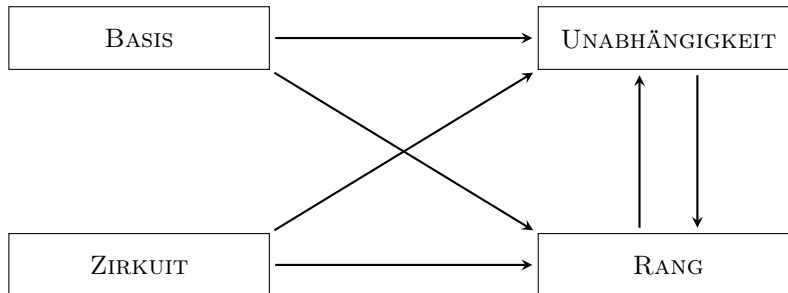


Abbildung 2.6: Orakelpolynomialreduktionen für Matroide

Hausmann and Korte (1980) haben dieselbe Fragestellung auch für allgemeine Unabhängigkeitssysteme untersucht, die – wie wir in Abschnitt 2.1 gesehen haben – äquivalent

durch Zirkuitsysteme, Basissysteme oder Rangfunktionen gegeben werden können. Der entsprechende Satz ist bildlich in Abbildung 2.7 veranschaulicht (Interpretation wie bei Abbildung 2.6).

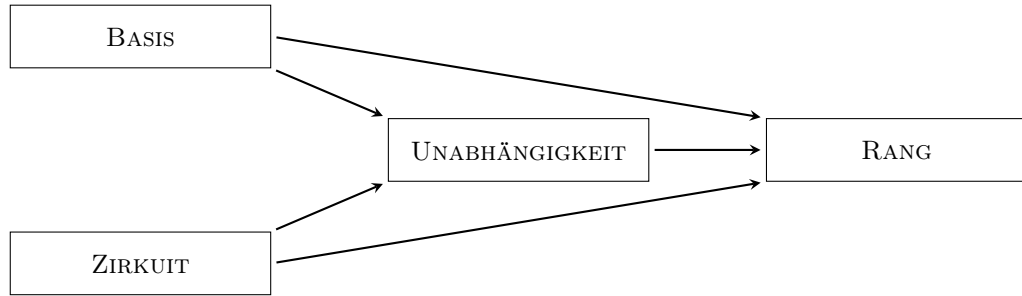


Abbildung 2.7: Orakelpolynomialreduktionen für allgemeine Unabhängigkeitssysteme

Insbesondere folgt, dass bei Unabhängigkeitssystemen das Rangorakel das stärkste ist. Durch dieses lassen sich die übrigen Orakel in orakelpolynomialer Zeit simulieren. Jedoch sind hier keine zwei Orakel algorithmisch „äquivalent“ (sie sind natürlich logisch äquivalent).

2.4 Optimierung über Unabhängigkeitssystemen

Wir wollen nun die Frage untersuchen, ob bzw. wie gut ein Optimierungsproblem der Form (2.3)

$$\max\{c(I) \mid I \in \mathcal{I}\},$$

wobei $\mathcal{I}$ ein Unabhängigkeitssystem auf einer Grundmenge E ist, gelöst werden kann. Wir betrachten dazu den folgenden trivialen Algorithmus, vergleiche ADM I, (5.7).

(2.13) Algorithmus GREEDY-MAX für Unabhängigkeitssysteme.

Eingabe: Grundmenge $E = \{1, \dots, n\}$ mit Gewichten $c_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in E$. Ferner ist ein Unabhängigkeitssystem $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ durch ein Unabhängigkeitsorakel (siehe (2.11)(a)) gegeben.

Ausgabe: Eine unabhängige Menge $I_g \in \mathcal{I}$.

1. Sortiere die Gewichte in nicht aufsteigender Reihenfolge (d. h. nach Beendigung von Schritt 1 können wir annehmen, dass $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n$ gilt).
2. Setze $I := \emptyset$.
3. FOR $i = 1$ TO n DO:
 - Ist $c_i \leq 0$, gehe zu 4.
 - Ist $I \cup \{i\}$ unabhängig (Orakelaufruf), dann setze $I := I \cup \{i\}$.
4. Setze $I_g := I$ und gib I_g aus. △

2.4 Optimierung über Unabhängigkeitssystemen

Der Greedy-Algorithmus durchläuft (nach der Sortierung in Schritt 1) die Elemente von E genau einmal, entweder er nimmt ein Element in die Menge I auf, oder er verwirft es für immer. Die am Ende des Verfahrens gefundene Lösung I_g nennen wir *Greedy-Lösung*.

Für eine Menge $F \subseteq E$ setzen wir

$$r_u(F) := \min\{|B| \mid B \text{ Basis von } F\}$$

und nennen $r_u(F)$ den *unteren Rang von F* . Wir setzen

$$q := \min_{F \subseteq E, r(F) > 0} \frac{r_u(F)}{r(F)}$$

und nennen q den *Rangquotient* von $\mathcal{I}$. Ist $(E, \mathcal{I})$ ein Matroid, so gilt nach (I.3'') natürlich $r_u(F) = r(F)$ für alle $F \subseteq E$ und somit $q = 1$. Das folgende Resultat wurde von Jencyns (1976) bewiesen.

(2.14) Satz. *Sei $\mathcal{I}$ ein Unabhängigkeitssystem auf E , seien I_g eine Greedy-Lösung von (2.13) und I_0 eine optimale Lösung von (2.3), dann gilt*

$$q \leq \frac{c(I_g)}{c(I_0)} \leq 1,$$

und für jedes Unabhängigkeitssystem gibt es Gewichte $c_i \in \{0, 1\}$, $i \in E$, so dass die erste Ungleichung mit Gleichheit angenommen wird. $\triangle$

Beweis. Wir können o. B. d. A. annehmen, dass $c_i > 0$ für $i = 1, \dots, n$ und dass $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n$ gilt. Aus notationstechnischen Gründen führen wir ein Element $n+1$ ein mit $c_{n+1} = 0$. Wir setzen

$$E_i := \{1, \dots, i\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Es gilt dann offenbar:

$$\begin{aligned} c(I_g) &= \sum_{i=1}^n |I_g \cap E_i| (c_i - c_{i+1}), \\ c(I_0) &= \sum_{i=1}^n |I_0 \cap E_i| (c_i - c_{i+1}). \end{aligned}$$

Da $I_0 \cap E_i \subseteq I_0$, gilt $I_0 \cap E_i \in \mathcal{I}$, und somit $|I_0 \cap E_i| \leq r(E_i)$. Die Vorgehensweise des Greedy-Algorithmus impliziert, dass $I_g \cap E_i$ eine Basis von E_i ist, also dass $|I_g \cap E_i| \geq r_u(E_i)$ gilt. Daraus folgt

$$|I_g \cap E_i| \geq |I_0 \cap E_i| \frac{r_u(E_i)}{r(E_i)} \geq |I_0 \cap E_i| q, \quad i = 1, \dots, n$$

und somit

$$\begin{aligned}
 c(I_g) &= \sum_{i=1}^n |I_g \cap E_i| (c_i - c_{i+1}) \\
 &\geq \sum_{i=1}^n |I_0 \cap E_i| q (c_i - c_{i+1}) \\
 &= q \sum_{i=1}^n |I_0 \cap E_i| (c_i - c_{i+1}) \\
 &= c(I_0)q.
 \end{aligned}$$

Die Ungleichung $1 \geq \frac{c(I_g)}{c(I_0)}$ ist trivial. Damit haben wir die Gültigkeit der Ungleichungskette bewiesen.

Sei nun $F \subseteq E$ mit $q = \frac{r_u(F)}{r(F)}$. Wir können annehmen, dass $F = \{1, \dots, k\}$ gilt und dass $B = \{1, \dots, p\} \subseteq F$ eine Basis von F ist mit $|B| = r_u(F)$. Wir setzen $c_i = 1$, $i = 1, \dots, k$, und $c_i = 0$, $i = k+1, \dots, n$. Dann liefert der Greedy-Algorithmus die Greedy-Lösung $I_g = B$ mit $c(I_g) = r_u(F)$, während für jede Optimallösung I_0 gilt $c(I_0) = r(F)$. Also wird für diese spezielle 0/1-Zielfunktion die linke Ungleichung in der Aussage des Satzes mit Gleichheit angenommen. $\square$

(2.15) Korollar. *Sei $\mathcal{I}$ ein Unabhängigkeitssystem auf E . Dann sind äquivalent:*

- (a) $(E, \mathcal{I})$ ist ein Matroid.
- (b) Für alle Gewichte $c \in \mathbb{R}^E$ liefert der Greedy-Algorithmus (2.13) eine Optimallösung von (2.3).
- (c) Für alle Gewichte mit 0/1-Koeffizienten liefert der Greedy-Algorithmus (2.13) eine Optimallösung von (2.3). $\triangle$

(2.15) wurde von verschiedenen Autoren unabhängig voneinander bewiesen. Edmonds (1971) zeigte insbesondere, wie man den Greedy-Algorithmus für Matroide als ein Verfahren zur Lösung spezieller linearer Programme deuten kann. Er liefert in der Tat auch duale Lösungen. Wir gehen darauf in Abschnitt ?? ein.

Da der Algorithmus (5.7) GREEDY-MAX aus ADM I offenbar eine Spezialisierung des Greedy-Algorithmus (2.13) für das graphische Matroid ist, liefert Folgerung (2.15) einen weiteren Beweis von ADM I, Satz (5.8).

Satz (2.14) ist ein Prototyp von Abschätzungssätzen für die Qualität von heuristischen Lösungen, wie wir sie später noch mehrfach kennenlernen werden. Der Greedy-Algorithmus (2.13) ist offenbar orakelpolynomial. Immer dann, wenn wir den Orakelauf- ruf (Unabhängigkeitstest) in Schritt 3 durch einen polynomialen Algorithmus realisieren können, ist der Greedy-Algorithmus ein polynomialer Algorithmus (im üblichen Sinne). Eine solche polynomiale Realisierung ist z. B. auf triviale Weise für das Cliquesproblem, Stabile-Menge-Problem, Travelling-Salesman-Problem und das azyklische Subdigraphen- problem möglich. Würde der Greedy-Algorithmus auch in diesen Fällen immer Optimallö- sungen liefern, hätten wir einen Beweis für $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ gefunden, da alle gerade aufgelisteten

Probleme $\mathcal{NP}$ -schwer sind. Wir können also nicht erwarten, dass der Greedy-Algorithmus immer optimale Antworten produziert. Die Frage, wie schlecht im schlechtest möglichen Falle eine Greedy-Lösung ist, beantwortet Satz (2.14) auf bestmögliche Weise. Er gibt eine sogenannte *Gütegarantie* an, die besagt, dass der Wert $c(I_g)$ jeder Greedy-Lösung nicht schlechter ist als $qc(I_o)$, wobei q der bereits erwähnte Rangquotient ist. Der Rangquotient liefert also eine Gütegarantie für die Lösungsqualität des Greedy-Algorithmus. Der Rangquotient ist im allgemeinen nicht einfach auszurechnen. Eine Abschätzung wird gegeben durch:

(2.16) Satz. *Sei $\mathcal{I}$ ein Unabhängigkeitssystem auf E , und $(E, \mathcal{I}_i)$, $i = 1, \dots, k$ sei eine minimale Zahl von Matroiden mit $\mathcal{I} = \bigcap_{i=1}^k \mathcal{I}_i$, dann gilt*

$$\min_{F \subseteq E, r(F) > 0} \frac{r_u(F)}{r(F)} \geq \frac{1}{k}. \quad \triangle$$

Daraus folgt zum Beispiel: Ist $\mathcal{I}$ ein Unabhängigkeitssystem, das Durchschnitt von 2 Matroiden ist, dann ist der Wert der Greedy-Lösung mindestens halb so groß wie der Wert der Optimallösung von (2.3). Insbesondere liefert also der Greedy-Algorithmus für Branchingprobleme Lösungen, deren Wert mindestens die Hälfte des Optimums beträgt.

Für das Branching-Problem gibt es einen polynomialen Lösungsalgorithmus. Es gibt also offenbar auch Probleme über Unabhängigkeitssystemen, die keine Matroide sind und für die effiziente Optimierungsverfahren existieren. Ein sehr tiefliegendes Resultat ist der folgende von Edmonds (1979) und Lawler (1975) gefundene Satz.

(2.17) Satz. *Seien $(E, \mathcal{I}_1)$ und $(E, \mathcal{I}_2)$ zwei Matroide gegeben durch Unabhängigkeitso-rakel, dann gibt es einen Algorithmus, der für jede beliebige Zielfunktion c das Problem $\max\{c(I) \mid I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\}$ in orakelpolynomialer Zeit löst.* $\triangle$

Der Algorithmus, der den Beweis des obigen Satzes liefert, ist relativ kompliziert, und sein Korrektheitsbeweis benötigt Hilfsmittel aus der Matroidtheorie, die uns hier nicht zur Verfügung stehen. Deshalb verzichten wir auf eine Angabe und Analyse dieses (sehr interessanten) Verfahrens.

Man fragt sich nun natürlich sofort, ob auch über dem Durchschnitt von 3 Matroiden in (orakel-)polynomialer Zeit optimiert werden kann. Dies geht (vermutlich) i. A. nicht. Man kann zeigen, dass das Optimierungsproblem für Unabhängigkeitssysteme, die Durchschnitt von 3 Matroiden sind, Probleme enthält, die $\mathcal{NP}$ -schwer sind.

Ein Beispiel hierfür ist das asymmetrische Travelling-Salesman-Problem (ATSP). Das zugehörige Unabhängigkeitssystem $\mathcal{H}$ ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{H} := \{S \subseteq A_n \mid S \text{ ist Teilmenge eines gerichteten hamiltonschen Kreises in } D_n = (V, A_n)\},$$

wobei D_n der vollständige gerichtete Graph auf n Knoten ist. Wir modifizieren D_n zu dem Graphen $D'_n = (V', A'_n)$, indem wir den Knoten $1 \in V$ in zwei neue Knoten $1, n+1 \in V'$ aufspalten. Alle Bögen aus A_n , die den Knoten 1 aus D_n als Anfangsknoten haben, haben

2 Matroide und Unabhängigkeitssysteme

auch $1 \in V'$ als Anfangsknoten; die Bögen aus A_n , die $1 \in V$ als Endknoten haben, bekommen den neuen Knoten $n+1 \in V'$ als Endknoten zugewiesen. Diese Konstruktion bewirkt, dass jedem gerichteten hamiltonschen Kreis in D_n ein gerichteter hamiltonscher Weg von 1 nach $n+1$ in D'_n entspricht und umgekehrt. Das ATSP-Unabhängigkeitssystem $\mathcal{H}$ ist dann (bis auf Benennung einiger Knoten und Bögen) identisch mit

$$\mathcal{H}' := \{S \subseteq A'_n \mid S \text{ ist Teilmenge eines gerichteten hamiltonschen Wegs von } 1 \text{ nach } n+1 \text{ in } D'_n\}.$$

Definieren wir auf A'_n die drei folgenden Unabhängigkeitssysteme

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &:= \{W \subseteq A'_n \mid W \text{ ist Wald}\}, \\ \mathcal{P}^- &:= \{F \subseteq A'_n \mid |F \cap \delta^-(v)| \leq 1 \ \forall v \in V'\}, \\ \mathcal{P}^+ &:= \{F \subseteq A'_n \mid |F \cap \delta^+(v)| \leq 1 \ \forall v \in V'\},\end{aligned}$$

so sind $\mathcal{W}$, $\mathcal{P}^-$, $\mathcal{P}^+$ Unabhängigkeitssysteme von Matroiden auf A'_n , und es gilt $\mathcal{H}' = \mathcal{W} \cap \mathcal{P}^- \cap \mathcal{P}^+$.

Wir wollen uns nun noch kurz dem Optimierungsproblem (2.4) über Basissystemen zuwenden. Wie bei Bäumen und Wäldern vorgeführt (siehe ADM I, Abschnitt 5.2), kann man ein Maximierungsproblem des Typs (2.3) mit Hilfe einer polynomialen Transformation in ein Minimierungsproblem (2.4) überführen und umgekehrt. Analog lässt sich auch aus (2.13) ein Minimierungsalgorithmus ableiten.

(2.18) Algorithmus GREEDY-MIN für Basissysteme.

Eingabe: Grundmenge $E = \{1, \dots, n\}$ mit Gewichten $c_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in E$, ein Unabhängigkeitssystem $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ gegeben durch ein Unabhängigkeitsorakel.

Ausgabe: Eine Basis $B_g \in \mathcal{I}$.

1. Sortiere die Gewichte in nicht absteigender Reihenfolge (nach Beendigung von Schritt 1 gelte $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$).
2. Setze $I := \emptyset$.
3. FOR $i = 1$ TO n DO:
Ist $I \cup \{i\} \in \mathcal{I}$ (Orakelaufruf), dann setze $I := I \cup \{i\}$.
4. Setze $B_g := I$ und gib B_g aus. $\triangle$

Offenbar ist B_g eine Basis der Grundmenge E des Unabhängigkeitssystems $\mathcal{I}$, gehört also zum zugehörigen Basissystem $\mathcal{B}$. Folgerung (2.15) impliziert:

(2.19) Satz. *Sei $\mathcal{I}$ ein Unabhängigkeitssystem auf E und $\mathcal{B}$ das zugehörige Basissystem. Dann sind äquivalent:*

- (a) $(E, \mathcal{I})$ ist ein Matroid.

- (b) Für alle Gewichte $c \in \mathbb{R}^E$ liefert der Greedy-Algorithmus (2.18) eine Optimallösung von $\min\{c(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$.
- (c) Für alle Gewichte $c \in \{0, 1\}^E$ liefert der Greedy-Algorithmus (2.18) eine Optimallösung von $\min\{c(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$. $\triangle$

Sortiert man in Schritt 1 von (2.18) die Gewichte in nicht aufsteigender Reihenfolge, so erhält man offenbar eine Basis maximalen Gewichts. Satz (2.19) gilt analog, wenn man „min“ durch „max“ ersetzt.

Leider kann man die schöne Abschätzung aus Satz (2.14) für die Gütegarantie von (2.13) nicht ohne weiteres auf Algorithmus (2.18) übertragen. In der Tat gibt es keine universelle Konstante, die bezüglich eines Problems die Qualität des Ergebnisses von (2.18) unabhängig von den Zielfunktionskoeffizienten beschränkt. Betrachten wir z. B. das Cliquen-Problem auf dem in Abbildung 2.8 dargestellten Graphen mit der Gewichts-

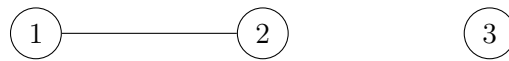


Abbildung 2.8: Graph, auf dem der Greedy-Algorithmus für das Cliquen-Problem beliebig schlechte Lösungen liefert

funktion $c_1 = 1$, $c_2 = M > 2$, $c_3 = 2$. Das zugehörige Unabhängigkeitssystem hat die Basen $\{1, 2\}$ und $\{3\}$. Bei Anwendung von (2.18) erhalten wir immer die Greedy-Lösung $B_g = \{1, 2\}$ mit Gewicht $1 + M$, während die Optimalbasis B_0 das Gewicht 2 hat. Der Quotient aus $c(B_g)$ und $c(B_0)$ geht also gegen ∞ falls $M \rightarrow \infty$. Denken Sie darüber nach, was diese (triviale) Beobachtung über die in Satz (2.14) angegebene Gütegarantie aussagt!

2.5 Ein primal-dualer Greedy-Algorithmus

Die Matroidtheorie ist aufgrund ihres technischen Apparates besonders gut dazu geeignet, eine gemeinsame Verallgemeinerung des primalen und des dualen Greedy-Algorithmus zur Berechnung minimaler aufspannender Bäume (siehe (5.9) und (5.11) im Skript zur ADM I) zu formulieren. Grundlegend hierfür ist der folgende

(2.20) Satz (und Definition). Sei M ein Matroid auf einer Grundmenge E mit Basissystem $\mathcal{B}$. Setze $\mathcal{B}^* := \{E \setminus B \mid B \in \mathcal{B}\}$. Dann ist $\mathcal{B}^*$ das Basissystem eines Matroids M^* auf E . M^* wird das zu M duale Matroid genannt. $\triangle$

Offensichtlich gilt für ein Basissystem

$$\mathcal{B}^{**} = \mathcal{B},$$

d. h. das zu M^* duale Matroid ist das Matroid M . Wir haben bereits ein Matroid und das dazu duale Matroid kennengelernt. Ist nämlich M das graphische Matroid auf einem

2 Matroide und Unabhängigkeitssysteme

Graphen G (siehe (2.8)(a)), so ist das cographische Matroid auf G (siehe (2.9)(a)) das zu M duale Matroid M^* .

Für Matrix-Matroide (siehe (2.8)(b)) kann man auf einfache Weise das duale Matroid konstruieren. Wir nehmen an, dass M durch die (m, n) -Matrix A (über irgendeinem Körper) definiert ist. O. B. d. A. können wir annehmen, dass A vollen Zeilenrang m hat. Mit Hilfe der Gauß-Elimination bringen wir A in **Standardform**, d. h. wir formen A so um, dass $A = (I, B)$ gilt, wobei I die (m, m) -Einheitsmatrix ist. (Möglichweise sind hierzu Zeilen- und Spaltenvertauschungen erforderlich.) Man kann nun zeigen, dass das zu M duale Matroid M^* durch die Matrix

$$(-B^T, I)$$

definiert ist. Hierbei ist I eine $(n-m, n-m)$ -Einheitsmatrix. Das vor Satz (2.10) beschriebene aus der Geometrie stammende Fano-Matroid F_7 hat folglich als duales Matroid das Matroid, das durch die folgende Matrix

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

über den Körper $GF(2)$ gegeben ist. (Man beachte, dass $-1 = 1$ in $GF(2)$ gilt.) Man nennt es das *duale Fano-Matroid* und bezeichnet es mit F_7^* .

In der Matroidtheorie hat sich die folgende Sprechweise eingebürgert. Ist M ein Matroid und A eine Basis oder ein Zirkuit des dualen Matroids M^* , so nennt man A auch eine *Cobasis* oder ein *Cozirkuit* von M . Analog heißt der Rang von A bezüglich der Rangfunktion von M^* auch der *Corang* von A . Ein *Zyklus* ist die Vereinigung von paarweise disjunkten Zirkuits, analog ist ein *Cozyklus* die Vereinigung paarweise disjunkter Cozirkuits. Die nachfolgenden (einfachen) Beobachtungen sind für die anschließenden Betrachtungen wichtig.

(2.21) Satz.

- (a) Ein System $\mathcal{C}$ von Teilmengen von E ist genau dann die Zirkuitmenge eines Matroids M auf E , wenn $\mathcal{C}$ genau die minimalen, nichtleeren Teilmengen $C \subseteq E$ enthält, so dass gilt: $|C \cap C^*| \neq 1$ für alle Cozirkuits C^* von M .
- (b) Sei B eine Basis (Cobasis) eines Matroids M , und sei $e \in E \setminus B$, dann enthält $B \cup \{e\}$ genau einen Zirkuit (Cozirkuit) C_e , der e enthält. C_e heißt der durch e und B erzeugte fundamentale Zirkuit (Cozirkuit). $\triangle$

(2.22) Satz. Sei M ein Matroid auf E mit Gewichten c_e für alle $e \in E$. Sei B eine Basis von M . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) B ist eine gewichtsminimale Basis.

- (ii) Für jedes Element $e \in E \setminus B$ gilt $c_e \geq c_f$ für alle f aus dem von e und B erzeugten fundamentalen Zirkuit K_e .
- (iii) Für jeden Cozirkuit C gilt $\min\{c_e \mid e \in C\} = \min\{c_e \mid e \in B \cap C\}$
- (iv) $E \setminus B$ ist eine gewichtsmaximale Cobasis.
- (v) Für jedes Element $e \in B$ gilt $c_e \leq c_f$ für alle f aus dem von e und $E \setminus B$ erzeugten fundamentalen Cozirkuit C_e .
- (vi) Für jeden Zirkuit K gilt $\max\{c_e \mid e \in K\} = \max\{c_e \mid e \in (E \setminus B) \cap K\}$. $\triangle$

Beweis. (i) $\iff$ (iv). Trivial, nach Definition.

- (i) $\Rightarrow$ (ii). Angenommen, es existieren $e \in E \setminus B$ und $f \in K_e$ mit $c_e < c_f$. Dann ist $(B \setminus \{f\}) \cup \{e\}$ eine Basis mit kleinerem Gewicht als B . Widerspruch!
- (ii) $\Rightarrow$ (iii). Angenommen, es existieren ein Cozirkuit C und $e \in C \setminus B$ mit $c_e < \min\{c_f \mid f \in B \cap C\}$. Sei K_e der durch e mit B erzeugte fundamentale Zirkuit. Dann existiert nach (2.21)(a) ein Element $f \in (K_e \setminus \{e\}) \cap C$. Aber dann gilt für $e \in E \setminus B$ und $f \in B$: $c_e < c_f$. Widerspruch!
- (iii) $\Rightarrow$ (i). Sei B' eine gewichtsminimale Basis, so dass $|B \cap B'|$ so groß wie möglich ist. Angenommen, es existiert ein Element $f \in B' \setminus B$. Sei C_f der von f mit $E \setminus B'$ erzeugte fundamentale Cozirkuit. Da B eine Basis ist, gilt $B \cap C_f \neq \emptyset$. Sei $g \in B \cap C_f$ mit $c_g = \min\{c_e \mid e \in B \cap C_f\}$. Nach (iii) gilt wegen $f \in C_f$: $c_f \geq c_g$. Nun aber ist $B'' := (B' \setminus \{f\}) \cup \{g\}$ eine Basis von M mit $c(B'') \leq c(B')$ und $|B \cap B''| > |B \cap B'|$. Widerspruch! Daraus folgt $B = B'$, und somit ist B gewichtsminimal.
- (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi) $\Rightarrow$ (iv) folgt aus Dualitätsgründen. $\square$

(2.23) Algorithmus Primal-dualer Greedy-Algorithmus.

Eingabe: Grundmenge E mit Gewichten c_e für alle $e \in E$ und ein Matroid $M = (E, \mathcal{I})$.

Ausgabe: Eine gewichtsminimale Basis B von M und eine gewichtsmaximale Cobasis B^* von M .

(Terminologie: Wir sagen, dass eine Menge S durch eine Menge F *überdeckt* ist, falls $F \cap S \neq \emptyset$.)

1. Setze $B := B^* := \emptyset$.
2. Führe einen (beliebigen) der beiden folgenden Schritte 3 oder 4 aus:
3. Primärer Schritt
 - 3.1. Sind alle Cozirkuits von M durch B überdeckt, STOP.
(Gib B und $B^* := E \setminus B$ aus.)
 - 3.2. Wähle einen Cozyklus $C \neq \emptyset$ von M , der nicht durch B überdeckt ist.

2 Matroide und Unabhängigkeitssysteme

3.3. Bestimme $f \in C$ mit $c_f = \min\{c_e \mid e \in C\}$.

3.4. Setze $B := B \cup \{f\}$ und gehe zu 2.

4. Dualer Schritt

4.1 Sind alle Zirkuits von M durch B^* überdeckt, STOP.
(Gib B^* und $B := E \setminus B^*$ aus.)

4.2 Wähle einen Zyklus $Z \neq \emptyset$ von M , der nicht durch B^* überdeckt ist.

4.3 Bestimme $g \in Z$ mit $c_g = \max\{c_e \mid e \in Z\}$.

4.4 Setze $B^* := B^* \cup \{g\}$ und gehe zu 2. $\triangle$

Will man Algorithmus (2.23) implementieren, so muss entweder für Schritt 3.1 oder für Schritt 4.1 (oder für die beiden Schritte) ein Algorithmus vorhanden sein, der die verlangten Überprüfungen durchführt. Wir gehen hier (in der Theorie) davon aus, dass ein Orakel die Aufgabe für uns erledigt. Ob das Orakel effizient implementierbar ist, hängt natürlich vom Matroidtyp ab, den man behandeln will.

(2.24) Satz. *Der obige Algorithmus (2.23) funktioniert.* $\triangle$

Beweis. Wir beweisen durch Induktion nach $|B| + |B^*|$, dass die jeweils während des Ablaufs des Verfahrens konstruierten Mengen B und B^* in einer gewichtsminimalen Basis bzw. gewichtsmaximalen Cobasis enthalten sind.

Für den Induktionsanfang $B = B^* = \emptyset$ ist die Behauptung trivial.

Wir nehmen an, dass der Satz gilt, wenn $|B| + |B^*| \leq k$, d.h. wenn wir Schritt 2 höchstens k -mal ausgeführt haben. Wir beginnen jetzt mit der $(k+1)$ -ten Ausführung von Schritt 2 und entscheiden uns, Schritt 3 durchzuführen. Sei B die bisher konstruierte Menge und B' eine gewichtsminimale Basis mit $B \subseteq B'$. Wir wählen in 3.2 einen Cozyklus C und in 3.3 ein Element $f \in C$. Gilt $f \in B'$, so ist alles klar. Anderenfalls sei $g \in C \cap B'$ ein Element, das mit f auf einem Cozirkuit liegt. Dann muss wegen 3.3 gelten $c_g \geq c_f$. $B'' := (B' \setminus \{g\}) \cup \{f\}$ ist damit eine Basis mit $c(B'') \leq c(B')$ und $\{f\} \cup B \subseteq B''$. Also ist $B \cup \{f\}$ in einer gewichtsminimalen Basis enthalten.

Entscheiden wir uns in 2 für die Durchführung von Schritt 4, so folgt die Behauptung analog.

Stellen wir in 3.1 fest, dass B eine Basis ist, so ist nach Induktion $c(B)$ minimal und $E \setminus B$ eine maximale Cobasis. Analog schließen wir im Falle, dass B^* in 4.1 als Cobasis erkannt wird. $\square$

Algorithmus (2.23) ist aufgrund der vielen Freiheitsgrade ein äußerst flexibel einsetzbares Instrument zur Konstruktion optimaler Basen und Cobasen. Durch geeignete Spezialisierung erhält man alle in Kapitel 5 des Skripts zur ADM I vorgestellten Algorithmen zur Bestimmung minimaler Bäume und einige weitere derartige Verfahren.

Literaturverzeichnis

- F. Barahona and M. Grötschel. On the cycle polytope of a binary matroid. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 40:40–62, 1986.
- R. E. Bixby and W. H. Cunningham. Matroid optimization and algorithms. In R. L. Graham, M. Grötschel, L. Lovász, editor, *Handbook of Combinatorics, Volume I*, chapter 11, pages 551–609. North-Holland, Amsterdam, 1995.
- J. Edmonds. Matroids and the greedy algorithm. *Mathematical Programming*, 1:127–136, 1971.
- J. Edmonds. Matroid intersection. *Annals of Discrete Mathematics*, 4:39–49, 1979.
- M. Grötschel and K. Truemper. Decomposition and Optimization over Cycles in Binary Matroids. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 46(3):306–337, 1989.
- D. Hausmann and B. Korte. The relative strength of oracles for independence systems. In J. Frehse, D. Pallaschke, and U. Trottenberg, editors, *Special topics of applied mathematics, functional analysis, numerical analysis, and optimization*, pages 195–211. North-Holland, Amsterdam, 1980.
- D. Hausmann and B. Korte. Algorithmic versus axiomatic definitions of matroids. *Mathematical Programming Studies*, 14:98–111, 1981.
- T. A. Jenkyns. The efficacy of the greedy algorithm. In F. Hoffman, L. Lesniak, and R. Mullin, editors, *Proceedings of the 7th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, Baton Rouge, 1976.
- E. L. Lawler. Matroid intersection algorithms. *Mathematical Programming*, 9:31–56, 1975.
- J. Lee. *A first course in combinatorial optimization*. University Press, Cambridge, 2004.
- J. G. Oxley. *Matroid Theory*. Oxford University Press, Oxford, 1992. ISBN 0-19-853563-5.
- A. Schrijver. *Combinatorial Optimization – Polyhedra and Efficiency*. Springer-Verlag, Berlin, 2003. ISBN 3-540-44389-4.
- K. Truemper. *Matroid Decomposition*. Academic Press, Boston, 1992.
- D. J. A. Welsh. *Matroid Theory*. Academic Press, London, 1976.
- D. J. A. Welsh. Matroids: Fundamental concepts. In R. L. Graham, M. Grötschel, L. Lovász, editor, *Handbook of Combinatorics, Volume I*, chapter 9, pages 481–526. North-Holland, Amsterdam, 1995.

