Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

ADM II - Diskrete Optimierung
Sommersemester 2013

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
Dr. Axel Werner
Torsten Klug
Antje Lehmann

Übungsblatt 11

Abgabetermin: 26.06.2013 bis 14:15 in MA041

Gesucht ist eine zulässige Lösung zu folgendem konvexen Gleichungssystem. Seien $a_j (1 \leq j \leq n)$ und b Vektoren im $\mathbb{R}^m$.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j y_j = b,\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ \text{mit } y_j \geq 0, \forall 1 \leq j \leq n. \tag{1}$$

Wir definieren $p_j = \frac{a_j - b}{\|a_j - b\|}$. Für die euklidische Norm von p_j gilt also: $\|p_j\| = 1$. Weiterhin hat System (1) genau dann eine Lösung, wenn auch das folgende System lösbar ist.

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = 0,\ \sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\ \text{mit } x_j \geq 0, \forall 1 \leq j \leq n. \tag{2}$$

Aufgabe 32. **10 Punkte**

Beweist die behauptete Äquivalenz der Systeme (1) und (2).

Man kann sich die Spaltenvektoren p_j als Punkte im $\mathbb{R}^m$ auf der Einheitsspähre (d.h. die Hyperfläche die den Rand der hochdimensionalen Einheitskugel bildet) um den Ursprung vorstellen. System (2) zu lösen bedeutet dann, diesen Punkten Gewichte, x_j, zuzuordnen, so dass ihr gemeinsamer Schwerpunkt im Ursprung liegt. Betrachtet dazu folgenden Algorithmus:

1. (Initialisierung) Initialisiere $x^1 := e_1$ durch den ersten Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n, z^1 := p_1$, sowie $u_1 := \|z^1\|$ und $t := 1$.

2. (Berechnung der Richtung) Zu Beginn der t-ten Iteration existiert eine Approximationslösung $x := x^t$ mit $\|x^t\| = 1$. Bestimme

$$z^t = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^t \quad \text{und} \quad u_t = \|z^t\|.$$

Finde $1 \leq s \leq n$, so dass $(v_t :=) p_s^T z^t \leq p_j^T z^t, \forall 1 \leq j \leq n$.

3. (Test auf Unzulässigkeit) Fall $v_t > 0$, hat das System(2) keine Lösung.

4. (Iteration) Bestimme x^{t+1} durch folgende Schritte:

$$\lambda = \frac{1 - v_t}{u_t^2 - 2v_t + 1},$$
$$z^{t+1} = \lambda z^t + (1-\lambda)p_s,$$
$$x_j^{t+1} = \begin{cases} \lambda x_j^t, & j \neq s, \\ \lambda x_s^t + (1-\lambda), & j = s. \end{cases}$$

Setze $t := t + 1$ und gehe zu Schritt 2.

Aufgabe 33. **10 Punkte**

a) Zeigt, dass die Abbruchbedingung aus Schritt 3 stimmt.

b) Genau genommen wird z^t in der hier gegebenen Fassung zweifach berechnet, nämlich in Schritt 2 und 4. Zeigt, dass dies konsistent ist.

c) Gib den Formeln aus Schritt 4 eine geometrische Deutung (ein Bild sagt mehr als 1000 Worte). Verifiziere die Formeln im Sinne dieser Deutung und beschreibe die geometrische Intuition für dieses Approximationsverfahren.

Aufgabe 34. **10 Punkte**

Zeigt, dass gilt:

a)

$$u_{t+1}^2 = \frac{u_t^2 - v_t^2}{u_t^2 - 2v_t + 1}$$

b)

$$\frac{1}{u_t^2} + 1 \leq \frac{1}{u_{t+1}^2}$$

Fragen: klug@zib.de