Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
Dr. Axel Werner
Torsten Klug
Antje Lehmann

Übungsblatt 3

Abgabetermin: 30.04.2012 bis 16:15 in MA041

Aufgabe 7. **4+4+2 Punkte**

a) Zeigt, dass eine Menge $P \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann ein Polyeder ist, wenn es endliche Teilmengen V, E und L des $\mathbb{R}^n$ mit $P = \mathsf{conv}(V) + \mathsf{cone}(E) + \mathsf{lin}(L)$ gibt.

b) Bestimmt eine solche Zerlegung für das Polyeder $P(A, b)$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Existiert das Maximum der Funktion $c^T x$ mit $c = (3, -2, -1)$ auf $P(A, b)$ (Keine Berechnung erforderlich.)?

Aufgabe 8. **4 + 6 Punkte**

Für einen zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ sei das Polytop

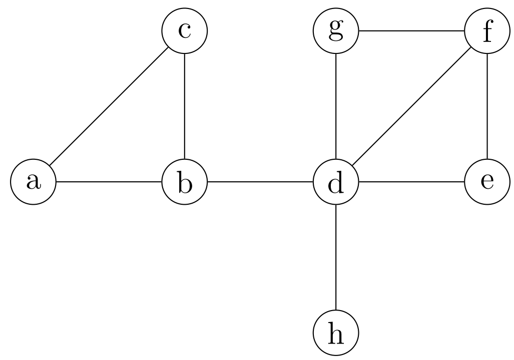
$$\mathsf{ST}(G) := \mathsf{conv}\{\chi^T \in \mathbb{R}^E \mid T \subseteq E,\ (V, T) \text{ aufspannender Baum von } G\}$$

definiert. ($\chi^T_e = 1$ falls $e \in T$, sonst 0.)

(a) Zeige dass $\dim(\mathsf{ST}(C_n)) = n - 1$ ist, wobei C_n der Kreis auf n Knoten ist.

(b) Zeige dass $\dim(\mathsf{ST}(K_n)) = \binom{n}{2} - 1$, wobei K_n der vollständige Graph auf n Knoten ist.

(c) **Zusatzaufgabe** (5 Punkte)
Zeige dass $\dim(\mathsf{ST}(G)) = |E| - |\text{Blöcke}|$, wobei G ein beliebig zusammenhängender Graph ist. Ein *Block* ist eine Brücke oder ein von einem maximalem Kreis induzierter Teilgraph.



Der Beispielgraph hat die Blöcke $\{a, b, c\}, \{b, d\}, \{d, e, f, g\}, \{d, h\}$.

Aufgabe 9. **10 Punkte**

Beweist das folgende Lemma aus der Vorlesung:

Lemma *Ist F eine nichtleere Seitenfläche von $P = P(A, b)$, gilt $I = \mathsf{eq}(F)$, und ist $B = \{y^1, \ldots, y^k\}$ eine Basis des Kerns von $A_{I\cdot}$, dann gibt es zu jedem inneren Punkt $x \in F$ von F ein $\varepsilon > 0$, so dass $x \pm \varepsilon y^j \in P$ für alle $j = 1, \ldots, k$ gilt.*

Fragen: klug@zib.de