Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
Dr. Axel Werner
Torsten Klug
Antje Lehmann

Übungsblatt 4

Abgabetermin: 08.05.2012 bis 14:15 in MA041

Aufgabe 10. **3+4+3 Punkte**

Sei $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polyeder.

a) Jede minimale Seitenfläche F von P ist ein affiner Raum. Insbesondere existiert eine Zeilenindexmenge I von A, so dass $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_{I.}x = b_I\}$ gilt.

b) Alle minimalen Seitenflächen von P haben dieselbe Dimension und sind von der Form $y + \operatorname{lineal}(P)$ mit $y \in P$, d.h., sie sind parallel.

c) Zu jedem linearen Programm mit endlicher Optimallösung gibt es einen affinen Raum R, so dass alle Elemente von R Optimallösungen des linearen Programms sind. Insbesondere gibt es zu jedem (endlich lösbaren) linearen Programm der Form $\max c^T x, Ax \leq b$ eine Zeilenindexmenge I, so dass alle Punkte in $\{x \mid A_{I.}x = b_I\}$ Optimallösungen sind.

Aufgabe 11. **10 Punkte**

Eine nichtleere Seitenfläche F eines Polyeders P mit $\dim(F) = \dim(P) - 2$ heißt *Subfacette* von P. Zeigt, dass es zu jeder Subfacette F von P genau zwei Facetten F_1 und F_2 mit $F_1 \cap F_2 = F$ gilt.

Aufgabe 12. **3+7 Punkte**

a) Jede nichttriviale Seitenfläche eines Polyeders ist Durchschnitt von Facetten des Polyeders.

b) Seien P ein Polyeder mit $\dim(P) = d$ und F eine Seitenfläche von P der Dimension k mit $0 \leq k < d$. Dann gibt es Seitenflächen $F_{k+1}, F_{k+2}, \ldots, F_{d-1}$ von P mit

   (a) $F_{k+1} \subseteq F_{k+2} \subseteq \ldots \subseteq F_{d-1} \subseteq P$,

   (b) $\dim(F_{k+i}) = k + i$, für $i = 1, \ldots, d - k - 1$,

   (Beweis durch Induktion über $d - k$).

Fragen: klug@zib.de