Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

ADM II - Diskrete Optimierung
Sommersemester 2013

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
Dr. Axel Werner
Torsten Klug
Antje Lehmann

Übungsblatt 6

Abgabetermin: 22.05.2012 bis 14:15 in MA041

Aufgabe 16. — 10 Punkte

Gegeben sei ein vollständiger Digraph $D_n = (V, A)$ mit n Knoten. Eine *Tour (gerichteter Hamiltonkreis)* ist ein gerichteter Kreis in D_n, der jeden Knoten enthält. $\mathcal{T}$ ist die Menge aller Touren in D_n. Zeigt, dass das Unabhängigkeitssystem $\tilde{\mathcal{T}}$ der Teilmengen von Touren in D_n,

$$\tilde{\mathcal{T}} := \{I \subseteq A \mid \exists T \in \mathcal{T} \text{ mit } I \subseteq T\},$$

als Durchschnitt von 3 Matroiden darstellbar ist.

Aufgabe 17. — 3+3+4 Punkte

Sei $G = (V, E)$ ein beliebiger Graph. Mit

$$\mathcal{M}(G) = \{M \subseteq E \mid M \text{ Matching}\}$$

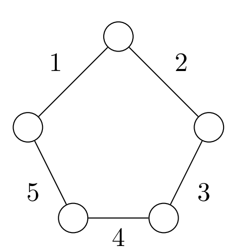
bezeichnen wir das Unabhängigkeitssystem der Matchings in G.

a) Sei G bipartit. Zeigt, dass $\mathcal{M}(G)$ im allgemeinen kein Matroid ist, aber als Durchschnitt der Unabhängigkeitssysteme zweier Matroide dargestellt werden kann.

b) Zeigt, dass für alle Graphen G für den Rangquotienten $q(\mathcal{M}(G))$ des Unabhängigkeitssystems $\mathcal{M}(G)$ gilt:

$$q(\mathcal{M}(G)) \geq \frac{1}{2}$$

c) Zeigt, dass $\mathcal{M}(G)$ für den folgenden Graphen G nicht als Durchschnitt von weniger als drei Matroiden dargestellt werden kann.



Hinweis: Zeigt zunächst mit Hilfe des Zirkuitaustauschaxioms, dass die beiden minimal abhängigen Mengen $\{1, 2\}$ und $\{2, 3\}$ nicht beide Zirkuits eines Matroids $(E, \mathcal{I})$ mit $\mathcal{M}(G) \subseteq \mathcal{I}$ sein können.

Aufgabe 18. **5+5 Punkte**

Sei B das Basis-System eines Matroids M auf einer Grundmenge E.

a) Zeigt, dass der Greedy-Max-Algorithmus das folgende Bottleneck-Problem für $c \geq 0$ optimal löst:
$$\max_{B \in \mathcal{B}} \min_{i \in B} c(i)$$

b) Zeigt, dass der Greedy-Min-Algorithmus für beliebige Gewichte c das folgende Bottleneck-Problem optimal löst:
$$\min_{B \in \mathcal{B}} \max_{i \in B} c(i)$$

Aufgabe 19. **Tutorium**

a) Zeigt, wie sich die Menge aller aufspannenden Arboreszenzen als Durchschnitt der Basissysteme zweier Matroide schreiben lässt.

b) Schreibt für $u, v \in V$ mit $u \neq v$ die Menge der hamiltonschen Wege von u nach v als Durchschnitt der Basisfamilien dreier Matroide.

Aufgabe 20. **Tutorium**

a) Gebt ein Beispiel für zwei Matroide M_1 und M_2 auf der Menge E an, so dass eine Teilmenge $X \subseteq E$ genau dann ein Zirkuit von M_1 ist, wenn es eine Basis von M_2 ist.

b) Charakterisiert alle Paare von Matroiden (M_1, M_2) mit der Eigenschaft aus a).

Letztes Blatt der ersten Semesterhälfte!!!

Fragen: klug@zib.de