Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

ADM II - Diskrete Optimierung
Sommersemester 2013

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
Dr. Axel Werner
Torsten Klug
Antje Lehmann

Übungsblatt 7

Abgabetermin: 29.05.2012 bis 14:15 in MA041

Aufgabe 21. **10 Punkte**

Das azyklische Subdigraphen Problem (ASP) besteht, darin, in einem Digraphen mit Bogengewichten einen Subdigraphen ohne gerichteten Kreis zu finden, dessen Gewicht maximal ist. Versucht, Bogengewichte für den vollständigen Digraphen D_n so zu bestimmen, dass der Greedy-Algorithmus zur Lösung des ASP angewendet auf diesen Digraphen einen möglichst schlechten (verglichen mit dem optimalen) azyklischen Subdigraphen liefert.

Aufgabe 22. **2+3+5 Punkte**

Definition 1 Eine Teilmenge $F \subseteq E$ heißt *abgeschlossen*, wenn

$$r(F \cup \{e\}) > r(F) \qquad \forall e \in E \setminus F$$

gilt.

Eine Teilmenge $F \subseteq E$ heißt *separabel*, wenn es zwei Teilmengen $F_1, F_2 \subseteq F$ mit $F_1 \neq \emptyset, F_2 \neq \emptyset$, $F_1 \cup F_2 = F$ und $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ gibt, sodass

$$r(F) = r(F_1) + r(F_2),$$

anderenfalls heißt F *inseparabel*.

Zeigt die folgende Aussagen:

a) Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph (schlingenfrei, keine parallelen Kanten). Eine Teilmenge $F \subseteq E$ ist abgeschlossen und inseparabel im graphischen Matroid auf E genau dann, wenn

- entweder $F = \{e\}$, $e \in E$ gilt
- oder wenn F die Kantenmenge eines knoteninduzierten Untergraphen $(W, E(W))$ mit $|W| \geq 3$ ist, der 2-fach knotenzusammenhängend ist.

b) Sei $(E, \mathcal{I})$ das Partitionsmatroid auf E, das definiert ist durch $E_1, \ldots, E_k \subseteq E$ und $b_1, \ldots, b_k$ mit $1 \leq b_i < |E_i|$ für alle $i = 1, \ldots, k$. $F \subseteq E$ ist genau dann abgeschlossen und inseparabel in $\mathcal{I}$, wenn $F = E_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt.

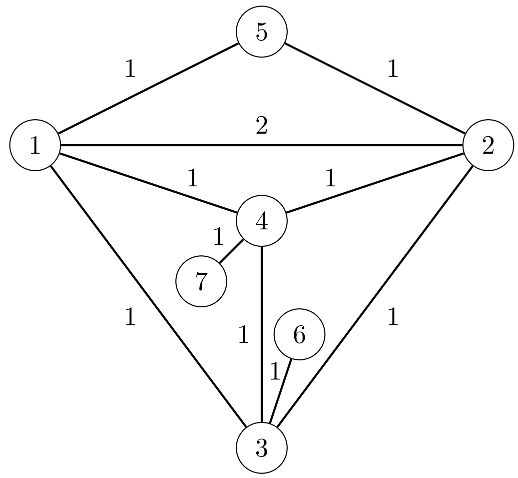

Abbildung 1: Graph

Aufgabe 23. **5+5 Punkte**

Wir betrachten den vollständigen Graphen $K_7 = (V, E)$ mit sieben Knoten $\{1, \dots, 7\}$. $\mathcal{I}$ sei das Unabhängigkeitssystem auf E, das aus allen hamiltonschen Kreisen in K_7 und allen Teilmengen davon besteht. Betrachte die Zielfunktion, die sich aus den Kantengewichten in Abbildung 1 ergibt. (Alle nicht gezeichneten Kanten haben den Wert 0.)

(a) Findet ein Element von $\mathcal{I}$ mit maximalem Wert c_0 (Beweis!) und gebt c_0 an.

(b) Die Ungleichungen

$$\begin{aligned} x(\delta(v)) &\leq 2, && \forall v \in V \\ x(E(W)) &\leq |W| - 1, && 2 \leq |W| \leq 6 \end{aligned}$$

sind offensichtlich Rangungleichungen. Findet einen nichtnegativen Vektor $x^* \in \mathbb{K}^E$, der diese Rangungleichungen erfüllt und dessen Zielfunktionswert größer als c_0 ist.

Fragen: klug@zib.de