Einführung in die Lineare und Kombinatorische Optimierung (ADM I)

Skriptum zur Vorlesung im WS 2012/2013

Prof. Dr. Martin Grötschel
Institut für Mathematik
Technische Universität Berlin

Version vom 18. Oktober 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Einführendes Beispiel

Ein Unternehmen produziert am Standort A ein Gut, das es mit der Bahn zu den Städten B, C und D transportieren möchte. Genauer, es werden wöchentlich 6 Waggons benötigt, von denen 2 nach B, einer nach C sowie 3 nach D befördert werden müssen. Auf Anfrage des Unternehmens nennt die Bahn die maximalen wöchentlichen Beförderungskapazitäten (in Waggons) sowie die Kosten pro Waggon, siehe Tabelle 1.1.

Um sich die Situation zu veranschaulichen, macht der verantwortliche Planer eine Zeichnung der im Netz möglichen Verbindungen, ihrer Kapazitäten, sowie ihrer Kosten, siehe Abbildung 1.1. Diese Abbildung repräsentiert einen *gerichteten Graphen* (auch *Digraph* genannt) $D = (V, A)$, der aus *Knoten V* und *Bögen* (auch *gerichtete Kanten* genannt) $A \subseteq V \times V$ besteht, wobei die Bögen die Knoten miteinander verbinden. Die Knoten entsprechen dabei den Städten A, B, C und D, die Bögen den möglichen Verbindungen zwischen diesen Städten. Zusätzlich zu dieser Information enthält der Graph in Abbildung 1.1 weitere Daten, die abstrakt als *Bogengewichte* bezeichnet werden und jedem Bogen gewisse von der jeweiligen Fragestellung abhängige Werte zuordnen. Konkret haben wir die Bogengewichte $l\colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $u\colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $c\colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die jeweils die Mindestzahl der Waggons pro Woche (hier immer 0), maximale Anzahl der Waggons pro Woche sowie Kosten pro Waggon auf jeder Verbindung angeben. (Die „Benamung"der Variablen und Daten erfolgt entsprechend dem üblichen Vorgehen in der englischsprachigen Literatur; „V" steht für „vertices", „A" für „arcs", „l" und „u" für „lower bound" und „upper bound", „c" für „cost" usw.)

Der Planer möchte nun die kostengünstigste Möglichkeit bestimmen, die 6 Waggons zu ihren Zielorten zu transportieren. Dies ist ein typisches Problem der *kombinatorischen Optimierung*, welche sich (ganz allgemein formuliert) damit beschäftigt, aus einer endlichen Menge, deren Elemente „Lösungen" genannt werden und die bewertet sind, eine beste

Verbindung	**maximale Anzahl Waggons pro Woche**	**Kosten pro Waggon**
A nach B	4	5
A nach C	3	1
B nach C	2	2
B nach D	3	2
C nach D	4	1

Tabelle 1.1: Kapazitäten und Kosten der Verbindungen im Bahnnetz.

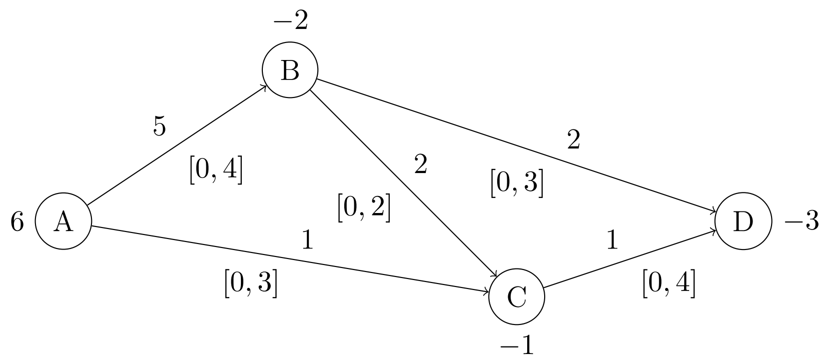

Abbildung 1.1: Beispielproblem als gerichteter Graph. Die Zahl an einem Knoten gibt an, wieviele Waggons dort bereitgestellt werden (positiv) bzw. wieviele Waggons angeliefert werden (negativ). Zahlen oberhalb eines Bogens geben die Transportkosten pro Waggon, Intervalle unterhalb eines Bogens die Kapazitäten der Verbindung an.

Lösung auszusuchen. Die in der kombinatorischen Optimierung auftretenden Probleme sind in der Regel „strukturiert". In unserem Fall ist eine Grundstruktur durch einen Digraphen und die Funktionen l, u und c gegeben. Die Menge der Lösungen, über die optimiert werden soll, besteht aus der Menge aller möglichen Transporte von A zu den Zielen B, C und D. Kombinatorische Optimierungsprobleme können durch Enumeration aller Lösungen gelöst werden. Dies ist vielleicht in diesem Beispiel, aber im Allgemeinen keine gute Idee. In der Vorlesung geht es u. a. darum, mathematische Methoden zu entwickeln, um deartige Probleme (einigermaßen) effizient zu lösen.

In unserem Beispiel überlegt sich nun der Planer, dass er lediglich entscheiden muss, wieviele Waggons auf jeder der 5 Verbindungen befördert werden sollen. Dazu führt er die *Variablen* $f_{AB}, f_{AC}, f_{BC}, f_{BD}$ und f_{CD} ein. „f" steht für „flow" oder „Fluss". Er überlegt sich, dass jede der Variablen mindestens den Wert 0 haben muss und nicht größer als die von der Bahn vorgegebene Kapazitätsgrenze sein darf. Außerdem notiert er sich, dass jede Variable nur ganzzahlige Werte annehmen kann. Insgesamt gelangt er so zu den Bedingungen

$$\begin{aligned} f_{AB} \in \mathbb{Z}, &\quad 0 \le f_{AB} \le 4, \\ f_{AC} \in \mathbb{Z}, &\quad 0 \le f_{AC} \le 3, \\ f_{BC} \in \mathbb{Z}, &\quad 0 \le f_{BC} \le 2, \\ f_{BD} \in \mathbb{Z}, &\quad 0 \le f_{BD} \le 3, \\ f_{CD} \in \mathbb{Z}, &\quad 0 \le f_{CD} \le 4. \end{aligned}$$

Mit diesen Variablen können die Gesamtkosten eines Transportes leicht als

$$5f_{AB} + f_{AC} + 2f_{BC} + 2f_{BD} + f_{CD}$$

dargestellt werden, und das Ziel ist, diese Gesamtkosten so gering wie möglich zu halten. Deswegen spricht man hier auch von der Zielfunktion (englisch: objective function). Nun muss der Planer noch die Bedingungen festlegen, die den gewünschten Transport von A nach B, C und D beschreiben. Zunächst müssen 6 Waggons A verlassen, was sich als Gleichung

$$f_{AB} + f_{AC} = 6$$

schreiben lässt. Von den Waggons, die in B ankommen, sollen 2 dort verbleiben und der Rest weiter nach C und D fahren:

$$f_{AB} = 2 + f_{BC} + f_{BD}.$$

Analog können auch die Bedingungen in C und D formuliert werden.

Insgesamt hat der Planer nun folgende mathematische Formulierung vorliegen:

$$\begin{aligned}
&\min 5f_{AB} + f_{AC} + 2f_{BC} + 2f_{BD} + f_{CD} && \text{(1.1a)}\\
&\quad f_{AB} + f_{AC} = 6 && \text{(1.1b)}\\
&\quad -f_{AB} + f_{BC} + f_{BD} = -2 && \text{(1.1c)}\\
&\quad -f_{AC} - f_{BC} + f_{CD} = -1 && \text{(1.1d)}\\
&\quad -f_{BD} - f_{CD} = -3 && \text{(1.1e)}\\
&0 \le f_{AB} \le 4 && \text{(1.1f)}\\
&0 \le f_{AC} \le 3 && \text{(1.1g)}\\
&0 \le f_{BC} \le 2 && \text{(1.1h)}\\
&0 \le f_{BD} \le 3 && \text{(1.1i)}\\
&0 \le f_{CD} \le 4 && \text{(1.1j)}\\
&\quad f_{AB},\ f_{AC},\ f_{BC},\ f_{BD},\ f_{CD} \in \mathbb{Z} && \text{(1.1k)}
\end{aligned}$$

Ein Optimierungsproblem dieser Art, in dem alle Variablen ganzzahlig alle Nebenbedingungen lineare Gleichungen oder Ungleichungen sind, und dessen Zielfunktion ebenfalls linear ist, heißt *Ganzzahliges Lineares Programm* oder als englische Abkürzung kurz *ILP* (oft auch nur *IP*, wenn aus dem Kontext klar ist, dass Nebenbedingungen und Zielfunktion linear sind). Sind alle Variablen kontinuierlich, so spricht man von einem *Linearen Programm* oder kurz *LP*. Zum Beispiel ist das Optimierungsproblem (1.1a)–(1.1j) ein LP.

Um nun eine optimale Transportvariante zu bestimmen, beschließt der Planer, die Ganzzahligkeitsbedingungen (1.1k) zunächst zu ignorieren, da dann nur ein lineares Gleichungssystem mit Variablenschranken übrig bleibt. Dem Planer fällt auf, dass die vier Gleichungen (1.1b) bis (1.1e) linear abhängig sind, weil sie sich zu 0 summieren. Man kann sich leicht überlegen, dass eine beliebige Gleichung gestrichen werden kann und die verbleibenden drei Gleichungen linear unabhängig sind. Wie wir aus der Linearen Algebra wissen, ist dann der Lösungsraum des Gleichungssystems ein 2-dimensionaler affiner Unterraum des $\mathbb{R}^5$. Mithilfe des Gauss-Algorithmus berechnet der Planer folgende

Parametrisierung dieses Unterraums:

$$\begin{pmatrix} f_{AB} \\ f_{AC} \\ f_{BC} \\ f_{BD} \\ f_{CD} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Aus der Parametrisierung (1.2) und den Schranken (1.1f) bis (1.1j) leitet der Planer das folgende LP her:

$$\min -6s + t \tag{1.3a}$$
$$-s + t \geq -1 \tag{1.3b}$$
$$-s + t \leq 1 \tag{1.3c}$$
$$2 \leq s \leq 3 \tag{1.3d}$$
$$0 \leq t \leq 3. \tag{1.3e}$$

Dieses LP ist „äquivalent" zu LP (1.1a)–(1.1j) in folgendem Sinn: Es gibt eine bijektive Abbildung zwischen den Lösungsräumen der beiden LPs, die mit den durch die Zielfunktionen gegebenen Ordnungen kompatibel ist. Mit anderen Worten: Jede Optimallösung von LP (1.3) entspricht genau einer Optimallösung von LP (1.1a)–(1.1j) und umgekehrt. Daher genügt es, das LP (1.3) zu lösen.

Da in LP (1.3) nur zwei Variablen vorkommen, kann man die zulässige Menge aller Paare (s, t), die alle Bedingungen erfüllen, graphisch darstellen (siehe Abbildung 1.2). Aus dieser Abbildung kann man direkt die optimale Lösung ablesen: Die optimale Lösung ist derjenige Punkt der grauen Fläche, der am weitesten in der dem Zielfunktionsvektor entgegengesetzten Richtung liegt (weil minimiert wird). Im Beispiel ist dies der Punkt $(3, 2)$, der der Lösung $f_{AB} = 3$, $f_{AC} = 3$, $f_{BC} = 0$, $f_{BD} = 1$, $f_{CD} = 2$ entspricht. Da alle Werte ganzzahlig sind, ist der Planer zufrieden und kommuniziert den enstprechenden Plan dem Bahnunternehmen.

Ist es immer so, dass bei ganzzahligen Problemdaten ein lineares Programm eine Optimallösung besitzt, die ganzzahlig ist? Natürlich nicht! Und deswegen geht unsere Story weiter: Nach einigen Tagen bekommt der Planer von der Bahn den Bescheid, dass die Waggons so leider nicht befördert werden können, weil die Kapazität des Rangierbahnhofs in C nicht ausreicht. Die Bahn beschreibt die Kapazitätsbeschränkung des Rangierbahnhofs genauer und der Planer bekommt die zusätzliche Bedingung

$$2f_{AC} + f_{BC} \leq 5,$$

die er via (1.2) in die äquivalente Bedingung

$$s + t \leq 4 \tag{1.4}$$

übersetzt. Das resultierende LP (1.3) mit der zusätzlichen Ungleichung (1.4) hat nun keine ganzzahlige Optimallösung mehr (siehe Abbildung 1.2); die Optimallösung ist $(2.5, 1.5)$ bzw. $f_{AB} = 3.5$, $f_{AC} = 2.5$, $f_{BC} = 0$, $f_{BD} = 1.5$, $f_{CD} = 1.5$ im Originalproblem.

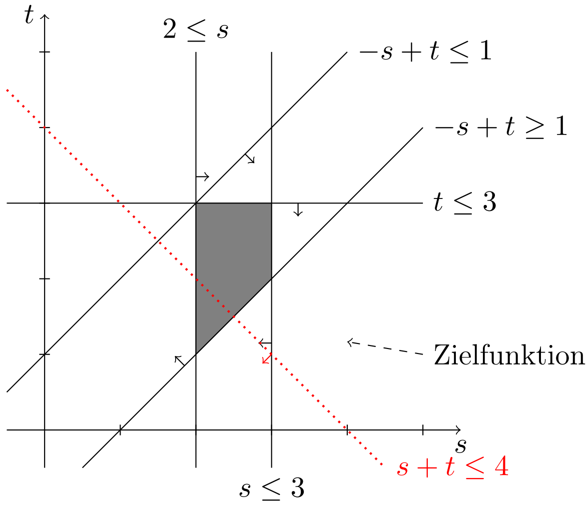

Abbildung 1.2: Graphische Darstellung des Optimierungsproblems (1.3). Die graue Menge ist die Menge der zulässigen Lösungen. Der gestrichelte Pfeil zeigt die Richtung, in der die Zielfunktion ansteigt. Die gepunktete Ungleichung entspricht der zusätzlichen Kapazitätsbedingung der Bahn.

Schluss, Variante 1: Der Planer ist nun mit seinem Schulwissen am Ende und fragt seinen Freund, einen Mathematiker, um Rat. Dieser empfiehlt ihm, sein Problem mit der Software SCIP (siehe `http://scip.zib.de`) zur Lösung ganzzahliger Optimierungsproblems zu lösen. Damit findet der Planer die neue Lösung $f_{AB} = 4$, $f_{AC} = 2$, $f_{BC} = 0$, $f_{BD} = 2$, $f_{CD} = 1$, mit der nun auch die Bahn einverstanden ist.

Schluss, Variante 2: Der Planer schaut sich die zulässige Menge in Abbildung 1.2 genau an und stellt fest, dass nur die ganzzahligen Punkte $(2, 1)$ und $(2, 2)$ zulässig sind. Er wählt den billigeren der beiden und gelangt zu der neuen Lösung $f_{AB} = 4$, $f_{AC} = 2$, $f_{BC} = 0$, $f_{BD} = 2$, $f_{CD} = 1$, mit der nun auch die Bahn einverstanden ist.

Die vorliegende Einführung ist natürlich „nur“ ein didaktisches Beispiel. Wir haben gezeigt, wie man aus einer praktischen Fragestellung (die wir so vereinfacht haben, dass ihre Lösung graphisch gefunden werden kann), ein mathematisches Problem erstellt. Man nennt solch ein Vorgehen *mathematische Modellierung*. Es ist keineswegs so, dass jedem praktischen Problem ein eindeutiges mathematisches Modell entspricht. Es gibt viele unterschiedliche Modellierungsmethoden. Für welche man sich entscheidet, ist eine Frage des Geschmacks, der Vorbildung, oder der Algorithmen, die zur Lösung der mathematischen Modelle verfügbar sind. Ein einfaches Beispiel ist die Modellierung einer ja/nein-Entscheidung: Wir möchten ausdrücken, dass eine reelle Variable x nur die Werte 0 oder 1 annehmen darf ($x = 0$ entspricht „nein“, $x = 1$ entspricht „ja“). Das können wir z. B. auf die folgenden Weisen erreichen:

- $x \in \{0, 1\}$,
- $0 \leq x \leq 1$, $x \in \mathbb{Z}$,

- $x = x^2$.

Welche Modellierung sinnvoll ist, kann man nicht grundsätzlich entscheiden. Die Wahl des Modells hängt vom gewählten Gesamtmodell und der geplanten algorithmischen Vorgehensweise ab.

1.2 Optimierungsprobleme

Wir wollen zunächst ganz informell, ohne auf technische Spitzfindigkeiten einzugehen, mathematische Optimierungsprobleme einführen. Sehr viele Probleme lassen sich wie folgt formulieren.

Gegeben seien eine Menge S und eine geordnete Menge $(T, \leq)$, d. h. zwischen je zwei Elementen $s, t \in T$ gilt genau eine der folgenden Beziehungen $s < t$, $s > t$ oder $s = t$. Ferner sei eine Abbildung $f : S \to T$ gegeben. Gesucht ist ein Element $x^* \in S$ mit der Eigenschaft $f(x^*) \geq f(x)$ für alle $x \in S$ (Maximierungsproblem) oder $f(x^*) \leq f(x)$ für alle $x \in S$ (Minimierungsproblem). Es ist üblich, hierfür eine der folgenden Schreibweisen zu benutzen:

$$\begin{array}{lll} \max_{x \in S} f(x) & \text{oder} & \max\{f(x) \mid x \in S\}, \\ \min_{x \in S} f(x) & \text{oder} & \min\{f(x) \mid x \in S\}. \end{array} \tag{1.5}$$

In der Praxis treten als geordnete Mengen $(T, \leq)$ meistens die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ oder die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ auf, alle mit der natürlichen Ordnung versehen (die wir deswegen auch gar nicht erst notieren). Die Aufgabe (1.5) ist viel zu allgemein, um darüber etwas Interessantes sagen zu können. Wenn S durch die Auflistung aller Elemente gegeben ist, ist das Problem entweder sinnlos oder trivial (man rechnet ganz einfach $f(x)$ für alle $x \in S$ aus). Das heißt, S muss irgendwie (explizit oder implizit) strukturiert sein, so dass vernünftige Aussagen über S möglich sind, ohne dass man alle Elemente in S einzeln kennt. Das gleiche gilt für die Funktion $f : S \to T$. Ist sie nur punktweise durch $x \mapsto f(x)$ gegeben, lohnt sich das Studium von (1.5) nicht. Erst wenn f durch hinreichend strukturierte "Formeln" bzw. "Eigenschaften" bestimmt ist, werden tieferliegende mathematische Einsichten möglich.

Die Optimierungsprobleme, die in der Praxis auftreten, haben fast alle irgendeine "vernünftige" Struktur. Das muss nicht unbedingt heißen, dass die Probleme dadurch auf einfache Weise lösbar sind, aber immerhin ist es meistens möglich, sie in das zur Zeit bekannte und untersuchte Universum der verschiedenen Typen von Optimierungsproblemen einzureihen und zu klassifizieren.

Im Laufe des Studiums werden Ihnen noch sehr unterschiedliche Optimierungsaufgaben begegnen. Viele werden von einem der folgenden Typen sein.

(1.6) Definition (Kontrollproblem):
Gegeben sei ein Steuerungsprozess (z. B. die Bewegungsgleichung eines Autos), etwa der Form

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

wobei u eine Steuerung ist (Benzinzufuhr). Ferner seien eine Anfangsbedingung

$$x(0) = x_0,$$

(z. B.: das Auto steht) sowie eine Endbedingung

$$x(T) = x_1$$

(z. B. das Auto hat eine Geschwindigkeit von 50 km/h) gegeben. Gesucht ist eine Steuerung u für den Zeitraum $[0, T]$, so dass z. B.

$$\int_0^T |u|^2 \, \mathrm{d}t$$

minimal ist (etwa minimaler Benzinverbrauch).

(1.7) Definition (Approximationsproblem):
Gegeben sei eine (numerisch schwierig auszuwertende) Funktion f, finde eine Polynom p vom Grad n, so dass

$$\|f - p\| \quad \text{oder} \quad \|f - p\|_\infty$$

minimal ist.

(1.8) Definition (Nichtlineares Optimierungsproblem):
Es seien f, g_i $(i = 1, \dots, m)$, h_j $(j = 1, \dots, p)$ differenzierbare Funktionen von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dann heißt

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &g_i(x) \le 0 \qquad i = 1, \dots, m \\ &h_i(x) = 0 \qquad j = 1, \dots, p \\ &\quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

ein nichtlineares Optimierungsproblem. Ist eine der Funktionen nicht differenzierbar, so spricht man von einem nichtdifferenzierbaren Optimierungsproblem. Im Allgemeinen wird davon ausgegangen, daß alle betrachteten Funktionen zumindest stetig sind.

(1.9) Definition (Konvexes Optimierungsproblem):
Eine Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, falls gilt: Sind $x, y \in S$ und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \le \lambda \le 1$, dann gilt $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **konvex**, falls für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \le \lambda \le 1$ und alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \ge f(\lambda x + (1 - \lambda) y).$$

Ist $S \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex (z. B. kann S wie folgt gegeben sein $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \le 0,\ i = 1, \dots, m\}$ wobei die g_i konvexe Funktionen sind), und ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, dann ist

$$\min_{x \in S} f(x)$$

ein konvexes Minimierungsproblem.

(1.10) Definition (Lineares Optimierungsproblem (Lineares Programm)): Gegeben seien $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, $b \in \mathbb{R}^m$, dann heißt

$$\begin{aligned} &\max c^T x \\ &Ax \leq b \\ &x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

lineares Optimierungsproblem.

(1.11) Definition (Lineares ganzzahliges Optimierungsproblem): Gegeben seien $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, $b \in \mathbb{R}^m$, dann heißt

$$\begin{aligned} &\max c^T x \\ &Ax \leq b \\ &x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

lineares ganzzahliges (oder kurz: ganzzahliges) Optimierungsproblem.

Selbst bei Optimierungsproblemen wie (1.6), ..., (1.11), die nicht sonderlich allgemein erscheinen mögen, kann es sein, dass (bei spezieller Wahl der Zielfunktion f und der Nebenbedingungen) die Aufgabenstellung (finde ein $x^* \in S$, so dass $f(x^*)$ so groß (oder klein) wie möglich ist) keine vernünftige Antwort besitzt. Es mag sein, dass f über S unbeschränkt ist; f kann beschränkt sein über S, aber ein Maximum kann innerhalb S nicht erreicht werden, d. h., das „max“ müßte eigentlich durch „sup“ ersetzt werden. S kann leer sein, ohne dass dies a priori klar ist, etc. Der Leser möge sich Beispiele mit derartigen Eigenschaften überlegen! Bei der Formulierung von Problemen dieser Art muss man sich also Gedanken darüber machen, ob die betrachtete Fragestellung überhaupt eine sinnvolle Antwort erlaubt.

In unserer Vorlesung werden wir uns lediglich mit den Problemen (1.10) und (1.11) beschäftigen. Das lineare Optimierungsproblem (1.10) ist sicherlich das derzeit für die Praxis bedeutendste Problem, da sich außerordentlich viele und sehr unterschiedliche reale Probleme als lineare Programme formulieren lassen, bzw. durch die Lösung einer endlichen Anzahl von LPs gelöst werden können. Außerdem liegt eine sehr ausgefeilte Theorie vor. Mit den modernen Verfahren der linearen Optimierung können derartige Probleme mit Hunderttausenden (und manchmal sogar mehr) von Variablen und Ungleichungen fast „mühelos“ gelöst werden. Dagegen ist Problem (1.11) viel schwieriger. Die Einschränkung der Lösungsmenge auf die zulässigen ganzzahligen Lösungen führt direkt zu einem Sprung im Schwierigkeitsgrad des Problems. Verschiedene spezielle lineare ganzzahlige Programme können in beliebiger Größenordnung gelöst werden. Bei wenig strukturierten allgemeinen Problemen des Typs (1.11) versagen dagegen auch die besten Lösungsverfahren manchmal bereits bei weniger als 100 Variablen und Nebenbedingungen.

Über Kontrolltheorie (Probleme des Typs (1.6)), Approximationstheorie (Probleme des Typs (1.7)), Nichtlineare Optimierung (Probleme des Typs (1.8)) und (1.9) werden an der TU Berlin Spezialvorlesungen angeboten. Es ist anzumerken, dass sich sowohl die Theorie als auch die Algorithmen zur Lösung von Problemen des Typs (1.6) bis (1.9) ganz erheblich von denen zur Lösung von Problemen des Typs (1.10) und (1.11) unterscheiden.

Ziel dieser Vorlesung ist zunächst, das Verständnis für Fragestellung der Optimierung und deren Anwendungen zu wecken. Die Studierenden sollen darüber hinaus natürlich in die Optimierungstheorie eingeführt werden und einige Werkzeuge theoretischer und algorithmischer Natur zur Lösung von linearen, kombinatorischen und ganzzahligen Optimierungsproblemen kennenlernen. Damit wird grundlegendes Rüstzeug zur Behandlung (Modellierung, numerischen Lösung) von brennenden Fragen der heutigen Zeit bereitgestellt. Die wirklich wichtigen Fragen benötigen zur ihrer Lösung jedoch erheblich mehr Mathematik sowie weitergehendes algorithmisches und informationstechnisches Know-how. Und ohne enge Zusammenarbeit mit Fachleuten aus Anwendungsdisziplinen wird man die meisten Fragen nicht anwendungsadäquat beantworten können. Einige Themen von derzeit großer Bedeutung, bei denen der Einsatz von mathematischer Optimierung (in Kombination mit vielfältigen Analysetechniken und praktischen Erfahrungen aus anderen Disziplinen) wichtig ist, hat der Präsident von acatech (Deutsche Akademie der Technikwissenschaften), Reinhard F. Hüttl, zu Beginn seiner Rede zur Eröffnung der Festveranstaltung 2012 am 16. Oktober 2012 im Konzerthaus am Gendarmenmarkt in Berlin beschrieben:

> *„Als wir im letzten Jahr an diesem Ort zur acatech-Festveranstaltung zusammenkamen, war die Energiewende bereits das, was man bürokratisch als „Beschlusslage“ bezeichnen würde. Gut ein Jahr nach diesem Beschluss bestimmen mehr Fragen als Antworten die Diskussion um unsere zukünftige Energieversorgung: Was wollen wir erreichen? - Den schnellstmöglichen Ausstieg aus der Kernenergie? Eine Verlangsamung des Klimawandels? Den raschen Ausbau erneuerbarer Energien? Möglichst hohe Energieeffizienz? Und wer sollte für welches Ziel und welche Maßnahme die Umsetzung verantworten? Und vor allem: Welche Ziele haben Priorität, und, um die dominierende Frage der letzten Tage und Wochen aufzugreifen, zu welchem Preis – im wörtlichen wie im übertragenen Sinne – wollen und können wir diese Ziele erreichen? Die Debatte der vergangenen Zeit hat gezeigt, dass es auf diese Fragen viele Antworten gibt. – In etwa so viele, wie es Interessensgruppen, Verbände, Unternehmen, Parteien und Parlamente gibt. Vielleicht lässt genau deshalb die Umsetzung der Energiewende auf sich warten. Auch die Wissenschaft hat keine endgültigen Antworten auf diese zentrale gesellschaftliche Frage. Aber: Wissenschaft kann helfen, Daten und Fakten zu sichten, ans Licht zu befördern und zu gewichten. Wissenschaft kann Handlungsoptionen darstellen und auch bewerten. Dies tun wir in unseren aktuellen Publikationen zu Fragen der Energie, der Mobilität, aber auch zu vielen anderen Themen. Das Entscheidungsprimat aber – und dies ist mir gerade in diesem Kontext sehr wichtig – lag und liegt bei der Politik.“*

Die mathematische Optimierung ist eine der wissenschaftlichen Disziplinen, die bei der Behandlung der skizierten Problemfelder und Fragen eingesetzt werden muss. Aber sie ist hier nur eine Hilfswissenschaft, denn die Formulierung von Gewichtungen und Zielen und die Bewertung von Ergebnissen unterliegen komplexen gesellschaftlichen Debatten. Wir sollten jedoch die Bedeutung der Mathematik hierbei nicht unterschätzen, sie hilft komplexe politische Entscheidungen (ein wenig) rationaler zu machen.