

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
Dr. Axel Werner
Torsten Klug
Benedikt Bodendorf

3. Übungsblatt

(Komplexitätstheorie)

Abgabetermin: 7.11.2012 bis 14:15 in MA041

Aufgabe 9.

4 Punkte

Bestimmt die Laufzeit- und Speicherplatzfunktion des folgenden Algorithmus:

Eingabe: ganze Zahl n

- 1: $k := \langle n \rangle$
- 2: **for** $i = 1, \dots, k$ **do**
- 3: $n := n \cdot n \cdot n$
- 4: **end for**
- 5: Gib n aus.

Aufgabe 10.

4 Punkte

Beschreibt einen Algorithmus mit linearer Laufzeit, der für jedes Problembeispiel des Erfüllbarkeitsproblems (SAT) eine Wahrheitsbelegung findet, die mindestens die Hälfte der Klauseln erfüllt.

Aufgabe 11.

4 Punkte

Sei A die Adjazenzmatrix eines gerichteten Graphen $D = (V, A)$, $|V| = n$. Zeigt: D ist genau dann stark zusammenhängend, wenn $R = A + A^2 + \dots + A^n$ keine 0 Einträge enthält.

Hinweis: Überlegt euch erst was A^2 bedeutet. Beweist dann eure vermutete Eigenschaft für A^i per Induktion ($A^i = A^{i-1}A$).

Aufgabe 12.

8 Punkte

Für diese Aufgabe definieren wir einige Entscheidungsprobleme:

TSP-Entscheidungsproblem:

Gegeben: Ein vollständiger ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichtung $c : E \rightarrow \mathbb{N}$ und eine Zahl $K \in \mathbb{N}$.

Frage: Gibt es in G einen Kreis durch alle Knoten („Tour“) der Länge $\leq K$ (Länge = Summe der Kantengewichte auf dem Kreis)?

Hamiltonkreis:

Gegeben: Ein ungerichteter Graph G .

Frage: Enthält G einen Hamiltonkreis, d.h. einen Kreis durch alle Knoten von G ?

Hamiltonweg:

Gegeben: Ein ungerichteter Graph G .

Frage: Enthält G einen Hamiltonweg, d.h. einen Weg durch alle Knoten von G ?

$[u, v]$ -Hamiltonweg:

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und zwei verschiedene Knoten $u, v \in V$.

Frage: Enthält G einen Hamiltonweg, der bei u startet und bei v endet?

Bemerkung: Alle genannten Probleme können auch auf gerichteten Graphen betrachtet werden. Man sucht dann gerichtete Kreise bzw. gerichtete Wege durch alle Knoten.

In der folgenden Aufgabe darf vorausgesetzt werden, dass Hamiltonkreis über ungerichteten Graphen NP-vollständig ist.

Zeigt die NP-Vollständigkeit der folgenden Probleme:

- a) TSP-Entscheidungsproblem,
- b) $[u, v]$ -Hamiltonweg,
- c) Hamiltonweg,
- d) alle genannten Probleme auf gerichteten Graphen.

Hinweis: Reduziert Hamiltonkreis auf a) und c), und b) auf c).

Fragen: klug@zib.de